МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ЗАДАЧНИК ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА

2-е издание, исправленное и дополненное

Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям 010300 «Математика. Компьютерные науки», 010200 «Математика. Прикладная математика», 011000 «Механика. Прикладная математика» и специальности 090102 «Компьютерная безопасность»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2010

УДК 512 (076.1)
З154

Составитель А. Я. Овсянников

Рецензенты:

кафедра алгебры и теории чисел Уральского государственного педагогического университета (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент С. С. Коробков);

В. В. Кабанов, доктор физико-математических наук, профессор (Институт математики и механики УрО РАН)

Задачник по алгебре и геометрии для студентов первого курса :
З154 учеб. пособие / [сост. А. Я. Овсянников]. – 2-е изд., испр. и доп. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2010. – 232 с.

ISBN 978-5-7996-0569-8

Учебное пособие содержит задачи для решения на практических занятиях по курсам «Алгебра», «Алгебра и геометрия», «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра и геометрия».

Для студентов математико-механического факультета.

УДК 512 (076.1)

ISBN 978-5-7996-0569-8

Оглавление

От составителя

Данное учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по курсам высшей алгебры, линейной алгебры и геометрии, аналитической геометрии, алгебры и геометрии со студентами 1-го курса всех специальностей математико-механического и физического факультетов. Необходимость его подготовки объясняется тем, что на практических занятиях по указанным курсам приходится использовать большое число различных сборников задач, что вызывает определенные неудобства, а некоторых из требующихся на занятиях задач в большинстве сборников просто нет.

При подготовке пособия использованы источники [2–9, 11–18]. Часть задач любезно предоставлена преподавателями кафедры алгебры и дискретной математики УрГУ, читающими соответствующие курсы. Задачи нумеруются в пределах параграфа. Теоретические сведения не приводятся, за исключением определений некоторых понятий. При использовании задачника для самостоятельной работы необходимый теоретический материал можно найти в любом учебнике по алгебре или аналитической геометрии для университетов (см., например, [1, 10, 12]).

Открывает пособие список некоторых общеупотребительных обозначений, используемых в задачах как известные. Векторы и направленные отрезки, рассматриваемые в аналитической геометрии, обозначаются с помощью стрелок: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$. Линейное пространство над полем действительных чисел, которое состоит из всех этих векторов, будем обозначать через $\boldsymbol{V}_g$ и называть *пространством геометрических векторов*. Матрицы обозначаются полужирным шрифтом: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ...; для их развернутой записи используются круглые скобки. Линейные пространства обозначаются чуть более крупным полужирным шрифтом: $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, ..., их элементы — малыми буквами $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, ...; через $\boldsymbol{o}_V$ обозначается нулевой вектор линейного пространства $\boldsymbol{V}$.

Термин "линейное отображение" используется в случаях, когда рассматриваются отображения различных линейных пространств; для отображения пространства в себя используется термин "оператор". Линейные отображения и операторы обозначаются шрифтом, стилизованным под рукописный: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... Используется также термин "обратимое отображение".

В настоящем (втором) издании по сравнению с первым изданием (см.: [19]) несколько изменен набор задач и исправлены замеченные неточности и опечатки.

Выражаю глубокую признательность научному руководителю кафедры алгебры и дискретной математики Уральского государственного университета Льву Наумовичу Шеврину за внимание к работе над задачником и многочисленные полезные замечания. Благодарю всех сотрудников кафедры алгебры и дискретной математики и студентов математико-механического факультета, высказавших замечания по поводу неточностей в первом издании и пожелания по его улучшению.

Список обозначений

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества всех натуральных ($0 \notin \mathbb{N}$), всех целых, всех рациональных, всех действительных и всех комплексных чисел соответственно
$\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$ — множества всех положительных рациональных и всех положительных действительных чисел соответственно
$\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X
$|X|$ — число элементов конечного множества X
C_n^k — число сочетаний из n по k
(m, n) — наибольший общий делитель двух натуральных чисел или многочленов
$\boldsymbol{E}_n$ — единичная матрица порядка n
$\mathsf{r}(\boldsymbol{A})$ — ранг матрицы $\boldsymbol{A}$
$\mathsf{det}(\boldsymbol{A})$ — определитель матрицы $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}^\top$ — матрица, транспонированная к матрице $\boldsymbol{A}$
$\mathsf{dim}\boldsymbol{U}$ — размерность линейного пространства $\boldsymbol{U}$
$M^\perp$ — ортогональное дополнение к подмножеству M пространства со скалярным произведением
$\mathcal{E}$ — единичный оператор
$\mathsf{Im}(\mathcal{A})$, $\mathsf{Ker}(\mathcal{A})$, $\mathsf{r}(\mathcal{A})$, $\mathsf{d}(\mathcal{A})$ — образ, ядро, ранг и дефект линейного отображения $\mathcal{A}$ соответственно
$\cong$ — символ изоморфизма
$\rightleftharpoons$ — символ “есть по определению”

Глава 1

Начальные сведения

1.1. Метод математической индукции

1.1.1. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:

а) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} j = \frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{4}$;

в) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

1.1.2. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\displaystyle\sqrt{n} < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{n}$.

1.1.3. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

1.1.4. Доказать справедливость неравенства $2^n > 2n+1$ при всех натуральных $n \geq 3$.

1.1.5. Известно, что $a+\dfrac{1}{a}\in\mathbb{Z}$. Доказать, что $a^n+\dfrac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$ для любого $n\in\mathbb{Z}$.

1.1.6. Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

1.1.7. Для всех $n\in\mathbb{N}$ доказать равенства:

а) $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}=\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j}$;

б) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j(j+1)(j+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1.1.8. Доказать, что при любом $n\in\mathbb{N}$ число $3^{2^n}-1$ делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3}.

1.1.9. В последовательности чисел 1; 1; 2; 3; 5; ... каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Доказать, что каждое четвертое число этой последовательности делится на 3.

1.1.10. Найти все $n\in\mathbb{N}$, при которых справедливо неравенство $2^n\geq n^2$.

1.1.11. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-2x-1=0$. Доказать, что при любом $n\in\mathbb{N}$ число $x_1^n+x_2^n$ является натуральным четным числом.

1.1.12. "**Теорема**". Если в группе из n людей есть человек с голубыми глазами, то у всех людей этой группы глаза голубые.

"**Доказательство**". База индукции. Пусть $n=1$. Поскольку в такой группе только один человек, по условию его глаза голубые.

Шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $n=k$. Проверим его для $n=k+1$. Выберем в группе из $k+1$ человек k человек, среди которых имеется голубоглазый; при этом один человек останется не включенным. По предположению индукции в выбранной группе все голубоглазые. Поэтому если мы одного человека из этой группы заменим на не включенного, то снова получится группа из k человек, в которой есть голубоглазые люди. Применяя еще раз предположение индукции, получаем, что все члены группы голубоглазые.

Очевидно, что эта "теорема" не верна. Указать некорректность в приведенном "доказательстве".

1.1.13. "**Теорема**". Дано n городов, $n > 3$. Пусть между каждыми двумя из них разрешается проложить только одну дорогу и притом с односторонним движением. Тогда можно проложить дороги так, чтобы из каждого города в любой другой можно было проехать либо по одной дороге, либо по двум (сворачивать на другую дорогу вне городов нельзя).

"**Доказательство**". База индукции ($n = 3$). Утверждение очевидно: дороги прокладываются из города А в город В, из В в С и из С в А.

Шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $n \leq k$. Убедимся, что оно верно для $n = k + 1$. Возьмем произвольный город А, а оставшиеся города разобъем на две группы — В и С. После этого проложим дороги:

а) от города А к каждому городу из группы В;

б) от каждого города из группы В к каждому городу из группы С;

в) от каждого города из группы С к городу А;

г) между городами в группах В и С в соответствии с предположением индукции.

Ясно, что теперь из города А можно, проехав по одной или двум дорогам, попасть в любой другой город, а из каждого города группы В или группы С можно проехать в любой город, не принадлежащий данной группе. Внутри групп B и C можно проехать между любыми двумя городами согласно предположению индукции.

Верна ли эта "теорема"? Если нет, то где ошибка в "доказательстве"? Для каких n верно утверждение "теоремы"?

1.1.14. Доказать, что $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, где $n \in \mathbb{N}$, является многочленом от x.

1.1.15. Доказать, что если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\ldots$, $x_n > 0$, причем среди этих чисел по крайней мере два различных и $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, то $x_1 x_2 \cdots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^n$.

1.1.16. Доказать, что если среди n прямых, расположенных в одной плоскости, никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, то эти прямые делят плоскость на $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ частей.

1.1.17. В выпуклом многоугольнике проведены несколько диагоналей так, что никакие две из них не пересекаются внутри многоугольника. Из одной вершины может выходить несколько диагоналей. Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведена ни одна диагональ.

1.1.18. Члены числовой последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяют соотношению $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и все они отличны от нуля. Доказать, что эта последовательность является геометрической прогрессией.

1.1.19. Доказать, что число, записываемое с помощью 3^n единиц, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1}.

1.1.20. Доказать, что для любого натурального n найдется число, составленное только из цифр 1 и 2 и делящееся на 2^n.

1.1.21. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

1.2. Элементы комбинаторики

1.2.1. Выяснить, сколько различных шестизначных чисел можно составить, используя цифры $1, 3, 5$.

1.2.2. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя только нечетные цифры?

1.2.3. В городе имеется n светофоров. Каждый независимо от других может находиться в одном из трех состояний. Сколькими способами можно зажечь одновременно все светофоры?

1.2.4. В некотором царстве каждые два человека отличаются набором зубов. Считая, что максимальное количество зубов 32, определить наибольшую численность населения царства.

1.2.5. Сколько девятизначных чисел можно записать девятью различными значащими цифрами?

1.2.6. В языке племени Тили-Вили 5 гласных букв и 10 согласных. В словах этого языка никогда не стоят рядом две гласные или две согласные. Какое наибольшее число семибуквенных слов может быть в этом языке?

1.2.7. На каждой из пяти карточек написана одна из нечетных цифр. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя эти карточки?

1.2.8. а) На первое занятие в аудиторию, где имеется всего 20 мест, пришли 25 студентов. Сколькими способами их можно рассадить по этим местам (при этом пятеро останутся стоять)?

б) После сессии в эту же аудиторию пришли 15 студентов. Сколькими способами их можно рассадить по этим местам (при этом пять мест останутся свободными)?

1.2.9. Остап Бендер должен раздать n разноцветных слонов n членам профсоюза. Сколькими способами он может это сделать?

1.2.10. Сколькими способами можно разместить на полке 12 книг?

1.2.11. Сколькими способами можно рассадить n гостей за круглым столом?

1.2.12. Сколькими способами можно разместить 8 одинаковых ладей на шахматной доске так, чтобы никакие две не угрожали друг другу (т. е. не стояли на одной горизонтали или на одной вертикали)?

1.2.13. На факультете ровно 50 юношей. Декану нужно сформировать ударную мужскую бригаду из 25 человек. Сколькими способами это можно сделать?

1.2.14. Определить, сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник.

1.2.15. а) Имеется 7 точек, из которых никакие 4 не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти точки?

б) Решить аналогичную задачу в случае n точек.

1.2.16. На полоске бумаги написано число 1234567890. Полоску разрезают на 4 части так, что каждый разрез проходит между цифрами. Сколькими способами это можно сделать?

1.2.17. а) В треугольнике ABC на стороне AC отмечено n точек. Каждую из них соединили отрезком с вершиной B. Сколько получилось треугольников?

б) В том же треугольнике на стороне AB отметили еще k точек и каждую из них соединили с вершиной C. Сколько теперь треугольников можно отыскать на получившемся чертеже?

1.2.18. У Ани 7 книг с современными романами, а у Оли 6 книг с современными детективами. Сколькими способами они могут обменяться тремя книгами?

1.2.19. Из 10 офицеров различных званий 5 должны уехать в командировку. Сколькими способами можно выбрать такую пятерку, если одновременно не могут ехать генерал, полковник и майор?

1.2.20. В десятом классе изучается 10 предметов. В среду 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на среду?

1.2.21. Поезду, в котором едет n пассажиров, предстоит сделать p остановок, на каждой из которых могут выйти несколько пассажиров. Сколькими способами могут распределиться все пассажиры между этими остановками?

1.2.22. На полке находятся $n + m$ различных книг, из которых m — в черных переплетах, а n — в красных.

а) Сколько существует различных положений книг, при которых книги в черных переплетах занимают m первых мест?

б) Сколько может быть положений, при которых все книги в черных переплетах стоят рядом?

1.2.23. Требуется распределить $3n$ предметов среди трех человек так, чтобы каждый получил поровну. Сколькими способами это можно сделать?

1.2.24. Доказать, что из $2n + 1$ шаров можно выбрать нечетное число шаров тем же числом способов, что и четное.

1.2.25. Трамвайный билет называется "счастливым", если сумма первых трех цифр его шестизначного номера равна сумме трех последних цифр. Билет называется "счастливым по-московски", если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Доказать, что число "счастливых" билетов равно числу билетов, "счастливых по-московски".

1.2.26. Доказать, что $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

1.2.27. Доказать, что $\sum\limits_{0\le k\le[\frac{n}{2}]} C_n^{2k} = \sum\limits_{0\le k\le[\frac{n-1}{2}]} C_n^{2k+1}$.

1.3. Элементы теории множеств

1.3.1. Выяснить, справедливы ли следующие утверждения:

а) $\{1,2,3\} = \{1,3\}$; б) $\{1,2\} = \{1\}$; в) $\{1,2\} = \{2,1\}$;
г) $\{1,2,3\} = \{1,2,\{3\}\}$; д) $1 \in \{1,2,3\}$; е) $\{1\} \in \{1,2,3\}$;
ж) $\{1,2\} \in \{1,2,3\}$; з) $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$.

1.3.2. Найти множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A в каждом из следующих случаев:

а) $A = \{1,2,3\}$; б) $A = \{1,2,\{3\}\}$; в) $A = \{1,\{2,3\}\}$;
г) $A = \{\emptyset\}$; д) $A = \emptyset$; е) $A = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

1.3.3. Выяснить, существуют ли множества A, B, C со свойствами:

а) $A \in B$, $B \in C$ и $A \in C$; б) $A \subseteq B$ и $A \in B$;
в) $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \in C$; г) $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \subseteq C$;
д) $A \in B$, $B \in C$ и $A \notin C$; е) $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ и $A \not\subseteq C$;
ж) $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \notin C$.

1.3.4. Пусть A — множество всех прямоугольных треугольников на плоскости, B — множество всех равносторонних треугольников, а универсальное множество — множество всех треугольников на плоскости. Определить, какие треугольники содержатся в следующих множествах:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $\overline{A} \cap B$,
г) $A \cap \overline{B}$, д) $\overline{A} \cup B$, е) $A \cup \overline{B}$.

1.3.5. Пусть A и B — множества всех натуральных чисел, кратных соответственно 2 и 3, а универсальное множество — множество всех натуральных чисел. Определить, из каких чисел состоят следующие множества:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $\overline{A} \cap B$,
г) $A \cap \overline{B}$, д) $\overline{A} \cup B$, е) $A \cup \overline{B}$.

1.3.6. Множество A состоит из точек $M(x, y)$ плоскости, для которых $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$, множество B — из точек, для которых $x^2 + y^2 \leq 1$, а множество C — из точек, для которых $x > 1$. Универсальное множество — множество всех точек плоскости. Изобразить на координатной плоскости множество $A \cap B \cap \overline{C}$.

1.3.7. Доказать, что:

а) $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;

б) $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$;

в) $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$;

г) если $A \subseteq B$, то $A \cup C \subseteq B \cup C$;

д) если $A \subseteq B$, то $A \cap C \subseteq B \cap C$;

е) $A \cap B = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq \overline{B}$;

ж) если $B \subseteq \overline{A \cup C}$, то $B \cap A = B \cap C = \emptyset$;

з) если $B \subseteq \overline{A \cup \overline{A}}$, то $B = \emptyset$.

1.3.8. Решить уравнения относительно неизвестного X в зависимости от значений множеств — параметров A, B:

а) $A \cap X = A$, б) $A \cap X = B$; в)$A \cup X = A$,

г) $A \cup X = B$, д) $A \times X = X \times A$, е) $A \times X = X \times B$.

1.3.9. Решить системы уравнений относительно неизвестного X в зависимости от значений множеств — параметров A, B:

а) $\begin{cases} A \cap X = A; \\ A \cup X = A, \end{cases}$ б) $\begin{cases} A \cap X = B; \\ A \cup X = B, \end{cases}$ в) $\begin{cases} A \cap X = \overline{B}; \\ A \cup X = \overline{B}. \end{cases}$

1.3.10. Пользуясь свойствами операций над множествами, доказать, что:

а) $A \cup \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$; б) $\overline{\overline{A} \cup B} \cup B = A \cup B$;

в) $\overline{\overline{A} \cup B} \cup \overline{B} \cup A = \overline{B} \cup A$; г) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;

д) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C = \overline{(A \cap B) \cup \overline{C}}$; е) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup (A \cap B)$;

ж) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

з) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A} \cup B$;

и) $(A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$;

к) $\overline{(C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B})} = A \cup B \cup \overline{C}$;

л) $(\overline{A} \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (B \cap C) = (\overline{A} \cup B) \cap C$.

1.3.11. Упростить выражения:

а) $((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap A$; б) $\overline{A \cap B \cap (\overline{A} \cap \overline{B})}$;

в) $((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)) \cap B$; г) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B})$;

д) $\overline{(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{B} \cup C)} \cup (\overline{C \cap \overline{A}})$; е) $\overline{(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$;

ж) $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (B \cap C) \cup \overline{(\overline{A} \cap B \cap C)}$.

1.3.12. Пусть M — множество всех слов русского языка, начинающихся с буквы "г", N — множество всех слов русского языка, у которых вторая буква совпадает с первой.

а) Найти $M \cap N$.

б) Найти множество всех букв, которыми можно заменить букву "г" в определении множества M так, чтобы $M \cap N \neq \emptyset$.

1.3.13. Для каждого натурального числа n построить множество A_n, состоящее точно из n элементов, такое, что для любых двух элементов a, b из A_n либо $a \in b$, либо $b \in a$.

1.4. Бинарные отношения

Бинарное отношение $\alpha \subseteq M \times M$ будем называть отношением *на множестве* M. В задачах 1.4.1–1.4.4 задание "исследовать отношение α на множестве M" означает, что нужно определить, будет ли это отношение: рефлексивным; симметричным; транзитивным; антисимметричным.

1.4.1. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Исследовать отношение α, заданное на M:

а) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x \leq y$;

б) $(x, y) \in \alpha$ означает, что x делит y;

в) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x - y$ делится на 4;

г) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $xy \geq 0$;

д) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x < 2y$;

е) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x + y = 8$;

ж) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x + y \in M$;

з) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $xy = y^2$;

и) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $|x - y| < 3$;

к) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $|x - y| \geq 8$.

Выявить среди указанных отношений отношения эквивалентности и отношения частичного порядка.

1.4.2. Пусть $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Исследовать отношение α, заданное на M:

а) $(x, y) \in \alpha$ означает, что x делит y;

б) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x \leq y^2$;

в) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $|x - y|$ делится на 3;

г) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $xy \geq 0$;

д) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $xy \leq 0$;

е) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $xy > 0$;

ж) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $xy = y^2$;

з) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x^2 = y^2$;

и) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $|x - y| < 3$.

Выявить среди указанных отношений отношения эквивалентности и отношения частичного порядка.

1.4.3. Исследовать отношение α, заданное на множестве слов русского языка:

а) $(x, y) \in \alpha$ означает, что слова x и y не имеют ни одной общей буквы;

б) $(x, y) \in \alpha$ означает, что слова x и y имеют по крайней мере одну общую букву;

в) $(x, y) \in \alpha$ означает, что всякая буква, входящая в слово x, входит и в слово y.

1.4.4. Исследовать отношение α, заданное на множестве всех прямых в пространстве:

а) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x \parallel y$ или $x = y$;

б) $(x, y) \in \alpha$ означает, что $x \perp y$;

в) $(x, y) \in \alpha$ означает, что прямая x имеет с y единственную общую точку;

г) $(x, y) \in \alpha$ означает, что прямые x и y скрещиваются.

1.4.5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $M = A \times A$. Доказать, что следующее отношение α является отношением эквивалентности на M; изобразить на координатной плоскости множество M и его разбиение, соответствующее отношению α:

а) $(x, y)\ \alpha\ (u, v)$, если $xv = yu$;

б) $(x, y)\ \alpha\ (u, v)$, если $x + v = y + u$.

1.4.6. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Для каждого из приведенных ниже разбиений множества M построить график соответствующего отношения эквивалентности:

а) $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 6, 8\}$, $C = \{3, 7\}$;

б) $A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{8\}$.

1.4.7. а) Построить графики отношений, указанных в задачах 1.4.1 и 1.4.2.

б) Охарактеризовать графики рефлексивных отношений.

в) Охарактеризовать графики симметричных отношений.

1.4.8. Привести примеры отношений:

а) рефлексивного, симметричного, нетранзитивного;

б) рефлексивного, несимметричного, транзитивного;

в) рефлексивного, несимметричного, нетранзитивного;

г) нерефлексивного, симметричного, транзитивного;

д) нерефлексивного, симметричного, нетранзитивного;

е) нерефлексивного, несимметричного, транзитивного;

ж) нерефлексивного, несимметричного, нетранзитивного.

1.4.9. Существует ли отношение, симметричное и антисимметричное одновременно?

1.4.10. Нарисовать диаграммы приведенных ниже множеств натуральных чисел, частично упорядоченных по делимости ($x \alpha y$ тогда и только тогда, когда x делит y):

а) $\{1, 2, 3, 5, 7\}$; б) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$; в)$\{2, 3, 5, 30\}$;

г) $\{2, 3, 5, 7\}$; д) $\{1, 2, 4, 8, 16\}$; е) $\{1, 2, 4, 3, 9, 5, 25\}$.

1.4.11. а) Доказать, что наибольший элемент в частично упорядоченном множестве является единственным максимальным элементом.

б) Привести пример частично упорядоченного множества, имеющего единственный максимальный элемент, но не имеющего наибольших элементов.

в) Существует ли конечное частично упорядоченное множество, имеющее единственный максимальный элемент, но не имеющее наибольших элементов?

1.4.12. На множестве слов русского языка задано отношение $\rho : x\rho y$ тогда и только тогда, когда x получается из y вычеркиванием некоторого множества букв (возможно, пустого).

а) Показать, что ρ — отношение порядка.

б) Для слова “математика” построить диаграмму множества слов, не превосходящих его относительно данного порядка ρ.

1.4.13. Пусть R — множество всевозможных отношений на четырехэлементном множестве.

а) Сколько элементов содержится в R?

б) Каких отношений в R больше: отношений эквивалентности или отношений порядка?

1.5. Отображения и функции

Под *отображением* из множества A в множество B понимается всякое отношение α из A в B, удовлетворяющее условию фукциональности: для любых $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$ из $(a, b_1) \in \alpha$, $(a, b_2) \in \alpha$ следует $b_1 = b_2$. При этом вместо $(x, y) \in \alpha$ пишут $\alpha(x) = y$ или $x \mapsto y$.

В задачах 1.5.1–1.5.5, 1.5.7, 1.5.8 предлагается исследовать отображение, что означает установить, будет ли оно: всюду определенным; инъективным; сюръективным.

1.5.1. Исследовать отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $x \mapsto x^2$; б) $x \mapsto x^3$; в) $x \mapsto |x|$; г) $x \mapsto x^2 - 4$;
д) $x \mapsto \sin x$; е) $x \mapsto \operatorname{tg} x$; ж) $x \mapsto \ln x$.

1.5.2. Исследовать отображение $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$: $x \mapsto x^2$–4.

1.5.3. Исследовать отображение $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$: $x \mapsto x^2 - 4$.

1.5.4. Среди отношений, обратных к отображениям из задачи 1.5.1, выделить те, которые являются отображениями. Исследовать полученные отображения.

1.5.5. Будет ли отображением отношение, обратное к отображению из задачи 1.5.2? В случае положительного ответа исследовать его свойства.

1.5.6. Найти произведения отображений fg и gf, где отображения $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ определяются следующим образом:

а) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $g : x \mapsto \sin x$;

б) $f : x \mapsto \operatorname{tg} x$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$;

в) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto x^2 - 4$;

г) $f : x \mapsto 3$, $g : x \mapsto x^2$;

д) $f : x \mapsto \ln x$, $g : x \mapsto x^2 - 4$.

1.5.7. Пусть $M = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Исследовать отображение, обратное к fg, где отображения $f, g : M \longrightarrow M$ определяются так: $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto x^4 - 3$.

1.5.8. Рассмотрим запись числа $\dfrac{1}{7}$ в виде бесконечной десятичной дроби. Каждому натуральному числу n поставим в соответствие цифру, стоящую на n-м месте. Исследовать свойства полученного отображения из множества $\mathbb{N}$ в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1.5.9. Установить биекцию (взаимно однозначное соответствие) между множествами A и B в каждом из следующих случаев:

а) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$;

б) $A = \mathbb{Z}$, B — множество всех четных натуральных чисел;

в) $A = \mathbb{Z}$, $B = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$;

г) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$;

д) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}^2$;

е) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}^n$;

ж) $A = \mathbb{N}$, B — множество всех многочленов с целыми коэффициентами;

з) $A = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^+$;

и) $A = \mathbb{R}$, $B = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

к) $A = [a, b]$, $B = [c, d]$, где $a < b$ и $c < d$.

1.5.10. Доказать, что не существует биекции между множествами A и B в каждом из следующих случаев:

а) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

б) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$;

в) A — произвольное множество, $B = \mathcal{P}(A)$.

1.6. Алгебраические операции

В задачах этого параграфа задания исследовать свойства алгебраической операции на множестве означают, что нужно установить, будет ли операция ассоциативной, будет ли она коммутативной, существует ли нейтральный элемент, для каких элементов существует симметричный элемент (в случае ассоциативных операций, имеющих нейтральный элемент).

1.6.1. Исследовать свойства операции на множестве $M = \{a, b, c\}$, задаваемой указанными ниже таблицами Кэли:

а)

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

; б)

$*$	a	b	c
a	c	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

; в)

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

.

1.6.2. Пусть $M = \{a, b, c, d\}$. Известно, что операции, заданные указанными ниже таблицами Кэли, ассоциативны. Для каждой из этих операций определить, будет ли M относительно данной операции группой и будет ли операция коммутативной:

а)

$*$	a	b	c	d
a	b	c	d	b
b	c	d	b	c
c	d	b	c	d
d	b	c	d	b

; б)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

;

в)

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

.

1.6.3. Написать таблицу Кэли:

а) для группы из трех элементов;

б) для операции $x * y \rightleftharpoons y$ на множестве $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

в) для операции $x*y \rightleftharpoons |x-y|$ на множестве $M=\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1.6.4. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $M = \mathcal{P}(A)$ — множество всех подмножеств множества A.

а) Будет ли M группой относительно операции пересечения множеств?

б) Тот же вопрос для операции объединения.

в) Тот же вопрос для операции симметрической разности.

1.6.5. а) Существует ли группа из 7 элементов?

б) Тот же вопрос для чисел 13, 275, 1024.

1.6.6. Исследовать свойства указанных ниже операций на множестве натуральных чисел с нулем:

а) $x * y \risingdotseq |x-y|$; б) $x * y \risingdotseq (x-y)^2$;

в) $x * y \risingdotseq \text{НОД}(x,y)$; г) $x * y \risingdotseq \text{НОК}(x,y)$;

д) $x * y \risingdotseq x^y$; е) $x * y \risingdotseq x^{y+1}$.

1.6.7. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Исследовать свойства указанных ниже операций на множестве M:

а) $x * y \risingdotseq xy$; б) $x * y \risingdotseq \min\{x,y\}$;

в) $x * y \risingdotseq \max\{x,y\}$; г) $x * y \risingdotseq (xy)^2$;

д) $x * y \risingdotseq (x+y)/2$; е) $x * y \risingdotseq \{x+y\}$, где через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x;

ж) $x * y \risingdotseq \begin{cases} x+y, \text{если } x+y \leq 1, \\ x+y-1, \text{если } x+y > 1. \end{cases}$

1.6.8. На множестве точек плоскости задана операция $A * B \risingdotseq C$, где C — середина отрезка, соединяющего точки A и B. Исследовать свойства этой операции.

1.6.9. Пусть M — множество точек графика функции $y = 3x^3 - 4x$. Определим на этом множестве операцию $A * B \risingdotseq C$, где при $A \neq B$ точка C является третьей точкой пересечения прямой (AB) с M; при $A = B \neq O$ точка C есть вторая точка пересечения с M касательной к графику в точке A; при $A = B = O$ и $C = O$. Доказать, что этим правилом на M действительно задана операция, и исследовать ее свойства.

1.6.10. Выяснить, будут ли указанные ниже множества группами относительно обычного сложения чисел:

а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{N}$;

г) множество неотрицательных рациональных чисел;

д) множество четных целых чисел;

е) множество нечетных целых чисел;

ж) множество простых чисел;

з) множество иррациональных чисел;

и) множество отрицательных действительных чисел.

1.6.11. Выяснить, будут ли указанные ниже множества группами относительно обычного умножения чисел:

а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}^+$; в) $\mathbb{N}$; г) $\mathbb{Z}$;

д) множество рациональных чисел, больших единицы;

е) множество неотрицательных рациональных чисел;

ж) множество ненулевых действительных чисел;

з) множество иррациональных чисел.

1.6.12. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Выяснить, будут ли указанные ниже множества отображений из A в A группами относительно умножения отображений:

а) множество всех всюду определенных отображений;

б) множество всех инъективных отображений;

в) множество всех сюръективных отображений;

г) множество всех биективных отображений.

1.6.13. Пусть M — множество всех действительных чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где a, b — любые рациональные числа, одновременно не равные нулю. Будет ли M группой относительно обычного умножения чисел?

1.6.14. Пусть M — множество всех действительных чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где a, b — любые целые числа, одновременно не равные нулю. Будет ли M группой относительно обычного умножения чисел?

1.6.15. Выяснить, будут ли указанные ниже множества чисел кольцами относительно обычного сложения и умножения чисел. Среди множеств, являющихся кольцами, выявить поля:

а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{N}$;

д) множество четных целых чисел;

е) множество целых чисел, кратных 6;

ж) $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$; з) $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1.6.16. Пусть $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Определим на M операции сложения и умножения покомпонентно, полагая

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \quad \text{и} \quad (x, y)(u, v) = (xu, yv)$$

для любых $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$.

а) Будет ли M кольцом относительно этих операций?

б) Имеет ли M делители нуля?

1.6.17. Пусть $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Определим на M операции сложения и умножения покомпонентно (см. задачу 1.6.16).

а) Будет ли M кольцом относительно этих операций?

б) Будет ли M полем?

Глава 2

Комплексные числа

2.1. Алгебраическая форма комплексного числа

2.1.1. Найти $x, y \in \mathbb{R}$ такие, что $(1+2i)x + (3-5i)y = 1 - 3i$.

2.1.2. Найти $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ такие, что
$$\begin{cases} (1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1+5i; \\ (3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2-i. \end{cases}$$

2.1.3. Вычислить:

а) $(2+3i)(4-5i) + (2-3i)(4+5i)$;

б) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$;

в) $(4+i)(5+3i) - (3+i)(3-i)$.

2.1.4. Вычислить:

а) $(1+2i)^6$; б) $(2+i)^7 + (2-i)^7$;

в) $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$; г) i^n.

2.1.5. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел:

а) является действительным числом;

б) является чисто мнимым числом.

2.1.6. Выполнить указанные действия:
а) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$; б) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}$; в) $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$; г) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

2.1.7. Решить системы линейных уравнений над полем комплексных чисел:
а) $\begin{cases} (3-i)x+(4+2i)y=2+6i, \\ (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i; \end{cases}$
б) $\begin{cases} (2+i)x+(2-i)y=6, \\ (3+2i)x-(3-2i)y=8. \end{cases}$

2.1.8. Решить уравнения:
а) $z^2=2i$; б) $z^2=-8i$;
в) $z^2=3-4i$; г) $z^2=-15+8i$;
д) $z^2=1-i\sqrt{3}$; е) $z^4=-1$;
ж) $z^4=2-i\sqrt{12}$; з) $z^2-(2+i)z+(-1+7i)=0$;
и) $z^2-(3-2i)z+(5-5i)=0$;
к) $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

2.1.9. Решить уравнения:
а) $x^4-3x^2+4=0$; б) $x^4-30x^2+289=0$.

2.1.10. Решить уравнения и их левые части разложить на множители с действительными коэффициентами:
а) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$; б) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

2.1.11. Доказать, что для любых $x,y,u,v\in\mathbb{R}$; $n\in\mathbb{N}$ из $x+iy=(u+iv)^n$ следует $x^2+y^2=(u^2+v^2)^n$.

2.1.12. Найти необходимые и достаточные условия для натуральных чисел a,b,n, при которых из взаимной простоты a,b следует, что $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})^n\in\mathbb{R}$.

2.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

2.2.1. Найти тригонометрическую форму числа:
а) 5; б) i; в) -2; г) $-3i$;
д) $1+i$; е) $1-i$; ж) $1+i\sqrt{3}$; з) $-1+i\sqrt{3}$;

и) $-1 - i\sqrt{3}$; к) $1 - i\sqrt{3}$; л) $\sqrt{3} + i$; м) $\sqrt{3} - i$;
н) $-\sqrt{3} - i$; о) $-\sqrt{3} + i$; п) $2 + \sqrt{3} + i$; р) $1 - (2 + \sqrt{3})i$;
с) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; т) $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
у) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

2.2.2. Вычислить выражения:

а) $(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

б) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi}$; в) $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1 - i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$.

2.2.3. Вычислить выражения:

а) $(1 + i)^{49}$; б) $(1 + i\sqrt{3})^{15}$; в) $(\sqrt{3} + i)^{30}$;

г) $\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{24}$; д) $(2 - \sqrt{3} + i)^{12}$; е) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{12}$;

ж) $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 - i}\right)^{30}$; з) $\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \dfrac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$.

2.2.4. Решить уравнения:

а) $|z| + z = 8 + 4i$; б) $|z| - z = 8 + 12i$; в) $z^5 = \overline{z}$;
г) $z^5 + \overline{z}^2 = 0$; д) $z^5 + \overline{z}|z|^4 = 0$; е) $z^3 + |z| = 0$.

2.2.5. При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить выражения:

а) $(1 + i)^n$; б) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

в) $\left(\dfrac{1 - i\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + i\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^n$; г) $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

2.2.6. Доказать, что если $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$, то для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$.

2.2.7. Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции: а) $\sin 4x$; б) $\cos 4x$; в) $\sin 5x$; г) $\cos 5x$.

2.2.8. Доказать равенства:

а) $\cos nx = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x$;

б) $\sin nx = \sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \sin^{2k+1} x.$

2.2.9. Выразить через первые степени функций $\cos mx$ и $\sin mx$, $m \in \mathbb{Z}$, следующие функции:

а) $\sin^4 x$; б) $\cos^4 x$; в) $\sin^5 x$; г) $\cos^5 x$.

2.2.10. Доказать равенства:

а) $\cos^{2m} x = \dfrac{1}{2^{2m-1}} \left[\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos\,(2m-2k)x + \dfrac{1}{2} C_{2m}^m \right]$;

б) $\cos^{2m+1} x = \dfrac{1}{2^{2m}} \sum\limits_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos\,(2m+1-2k)x$;

в) $\sin^{2m} x = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \left[\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k \cos\,(2m-2k)x + \dfrac{(-1)^m}{2} C_{2m}^m \right]$;

г) $\sin^{2m+1} x = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}} \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_{2m+1}^k \sin\,(2m+1-2k)x.$

2.3. Комплексные числа и геометрия на плоскости

2.3.1. Изобразить на плоскости точки, соответствующие числам 1; -1; i; $-i$; 5; -2; $3i$; $-2i$; $-1+i$; $2-3i$; $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$.

2.3.2. Найти комплексные числа, соответствующие:

а) вершинам квадрата с центром в начале координат, со сторонами, равными 1 и параллельными осям координат;

б) вершинам правильного треугольника с центром в начале координат, со стороной, параллельной оси ординат, вершиной на отрицательной действительной полуоси и радиусом описанного круга, равным 1;

в) вершинам правильного шестиугольника с центром в точке $2 + i\sqrt{3}$, стороной, параллельной оси абсцисс, и радиусом описанного круга, равным 2;

г) вершинам правильного n-угольника с центром в начале координат, одной из вершин которого является точка 1.

2.3.3. Указать геометрический смысл числа $|z_1 - z_2|$, где z_1 и z_2 — различные комплексные числа.

2.3.4. Указать геометрический смысл числа $\arg \dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$, где z_1, z_2, z_3 — различные комплексные числа.

2.3.5. Выяснить, как расположены на плоскости точки, соответствующие:

а) комплексным числам z_1, z_2, z_3, для которых $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$;

б) комплексным числам z_1, z_2, z_3, z_4, для которых $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \neq 0$.

2.3.6. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям:

а) $|z| = 1$; б) $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$;

в) $|z| \leq 3$; г) $|z - 1 - i| < 1$;

д) $|z - 3 + 4i| \leq 5$; е) $2 < |z| < 3$;

ж) $1 \leq |z - 2i| < 2$; з) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{6}$;

и) $|z - 1| + |z + 1| = 3$; к) $|z - 2| - |z + 2| = 3$.

2.3.7. Доказать тождество $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ и указать его геометрический смысл.

2.3.8. Пусть комплексные числа z_1, z_2, z_3 соответствуют вершинам параллелограмма A_1, A_2, A_3. Найти число, соответствующее вершине A_4, противолежащей A_2.

2.3.9. Найти комплексные числа, соответствующие противоположным вершинам квадрата, если двум другим его противоположным вершинам соответствуют числа z и w.

2.3.10. Найти комплексные числа, соответствующие вершинам правильного n-угольника, если двум его соседним вершинам соответствуют числа z_0, z_1.

2.3.11. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$, где $t \in \mathbb{R}$.

2.3.12. Доказать, что:

а) точки плоскости, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют действительные числа λ_1, λ_2, λ_3, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0$;

б) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ является действительным.

2.3.13. Точка z обходит единичную окружность против часовой стрелки. Описать траекторию движения точки w, если:

а) $w = z^2$; б) $w = z + \overline{z}$; в) $w = \dfrac{1}{2z}$; г) $w = 3\overline{z}$; д) $w = 1 + z$.

2.3.14. Точка z обходит квадрат с вершинами $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$ против часовой стрелки. Описать траекторию движения точки w, если:

а) $w = z^2$; б) $w = \overline{z}^{-1}$; в) $w = 3\overline{z}$; г) $w = 1 + z$;
д) $z - \overline{z}$; е) $w = (1+i)z$; ж) $w = \overline{z}$; з) $w = zi + \overline{z}$.

2.4. Корни из комплексных чисел

Для комплексного числа z и натурального числа n положим $\sqrt[n]{z} = \{c \in \mathbb{C} \mid c^n = z\}$.

2.4.1. Указать все комплексные числа z и натуральные числа n, для которых:

а) $\sqrt[n]{z} \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$; б) $\sqrt[n]{z} \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$.

2.4.2. Для любых $z, w \in \mathbb{C}$ доказать равенства:

а) $\sqrt[n]{z^n w} = z\sqrt[n]{w}$; б) $\sqrt[n]{zw} = u\sqrt[n]{w}$ для любого $u \in \sqrt[n]{z}$;
в) $\sqrt[n]{z} \cup \sqrt[n]{-z} = \sqrt[2n]{z^2}$.

2.4.3. Вычислить:

а) $\sqrt[6]{i}$; б) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; в) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$; г) $\sqrt[4]{-4}$;

д) $\sqrt[6]{64}$; е) $\sqrt[6]{-27}$; ж) $\sqrt[4]{1+i}$; з) $\sqrt[3]{2-2i}$;

и) $\sqrt[8]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$; к) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

2.4.4. Для данного натурального n выписать все корни степени n из 1, изобразить их на чертеже и отметить среди них первообразные:

а) $n=3$; б) $n=6$; в) $n=12$; г) $n=4$; д) $n=8$.

2.4.5. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\sqrt[k]{1} \subseteq \sqrt[n]{1}$ тогда и только тогда, когда k делит n.

2.4.6. Для каждого $\varepsilon \in \sqrt[n]{1}$ вычислить $\sum\limits_{k=1}^{n} k\varepsilon^{k-1}$.

2.4.7. Для первообразного корня ε степени $2n$ из 1 вычислить $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k$.

2.4.8. Найти двумя способами корни пятой степени из 1 и выразить в радикалах:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$; б) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$; в) $\cos\dfrac{4\pi}{5}$; г) $\sin\dfrac{4\pi}{5}$.

2.4.9. Решить уравнения:

а) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$; б) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$;

в) $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$.

2.4.10. Найти произведение всех корней степени n из 1.

2.4.11. Выяснить, является ли число $\dfrac{2+i}{2-i}$ корнем некоторой степени n из 1.

2.4.12. Пусть ε — корень некоторой степени s из 1. Найти все s, для которых существуют такие натуральные числа n, m, что $\pm\varepsilon^m \pm \varepsilon^n \pm 1 = 0$.

2.4.13. Обозначим через $\varphi(n)$ число первообразных корней степени n из 1. Доказать, что:

а) $\varphi(p) = p - 1$ для любого простого числа p;

б) $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ для любого простого числа p и любого натурального числа n;

в) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ для любых взаимно простых натуральных чисел m, n;

г) $\varphi(n) = (p_1^k - p^{k_1-1})(p_2^k - p^{k_2-1})\ldots(p_s^k - p^{k_s-1})$, если число n имеет каноническое разложение $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}$.

2.5. Вычисления при помощи комплексных чисел

2.5.1. Вычислить суммы:

а) $\displaystyle\sum_{0\le k\le[n/2]} (-1)^k C_n^{2k}$; б) $\displaystyle\sum_{0\le k\le[(n-1)/2]+1} (-1)^k C_n^{2k+1}$;

в) $\displaystyle\sum_{0\le k\le[n/4]} C_n^{4k}$; г) $\displaystyle\sum_{0\le k\le[(n-1)/4]+1} C_n^{4k+1}$.

2.5.2. Доказать равенства:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $(x \ne 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z})$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} = 0$; в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{n} = 0$;

г) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x+\varepsilon_k y)^n = x^n + y^n$ $(\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\} = \sqrt[n]{1})$;

д) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$; е) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

2.5.3. Решить уравнения:

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\varphi + k\alpha)x^k = 0$; б) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n}^{2k} x^{n-k} = 0$.

2.5.4. Доказать, что:

а) $\displaystyle\sum_{0\le k\le[\frac{n}{3}]} C_n^{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{\pi n}{3}\right)$;

б) $\displaystyle\sum_{0\le k\le[\frac{(n-1)}{3}]} C_n^{3k+1} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

в) $\displaystyle\sum_{0\le k\le[\frac{(n-2)}{3}]} C_n^{3k+2} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

2.5.5. Найти суммы:

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos\,(k+1)x$; б) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\,(k+1)x$; в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos kx$;

г) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sin kx$; д) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx$; е) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx$;

ж) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\,(2k-1)x$; з) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2\,(2k-1)x$.

2.6. Гауссовы целые числа

2.6.1. В кольце целых гауссовых чисел выполнить деление с остатком:

а) $3+2i$ на $2+i$; б) 7 на $1+i$; в) $6+7i$ на 5;
г) $3-2i$ на $1+i$; д) 3 на $2+i$; е) $5+4i$ на 3.

2.6.2. Для каждого из приведенных ниже целых гауссовых чисел определить, является ли оно простым:

а) $3-2i$; б) $1+3i$; в) 7; г) $17i$; д) $2+5i$; е) $1-2i$;
ж) $2+3i$; з) 5; и) i; к) $13i$; л) $1+13i$.

Для тех чисел, которые оказались непростыми и необратимыми, найти разложение на простые множители.

2.6.3. Доказать, что если в кольце целых гауссовых чисел число z простое, то и $\overline{z}$ простое.

2.6.4. Верно ли, что если в кольце целых гауссовых чисел число z простое и $\delta(z) = \delta(w)$, то и число w простое?

2.6.5. Доказать, что если для целого гауссова числа z значение $\delta(z)$ — простое число в кольце целых чисел, то z — простое число в кольце целых гауссовых чисел.

2.6.6. Найти наибольший общий делитель следующих пар целых гауссовых чисел:

а) $20 + 21i$ и $3 + 7i$; б) $8 + i$ и $6 + 7i$;

в) $5 + 4i$ и $3 + 4i$; г) $8 - i$ и $6 + 7i$.

Глава 3

Матрицы

3.1. Метод Гаусса – Жордана решения систем линейных уравнений

3.1.1. Найти общее решение методом Гаусса – Жордана для системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 6x - 4y + 3z = 0, \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - z = 36, \\ x + z - y = 13, \\ y + z - x = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

3.1.2. Найти общее решение методом Гаусса – Жордана и в случае совместности указать два частных решения для приведенных ниже систем линейных уравнений:

а) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9, \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3, \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16, \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17, \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6; \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4; \end{cases}$$

е) $$\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25, \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40, \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65, \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95. \end{cases}$$

3.2. Матрицы и действия над ними

3.2.1. Выполнить действия над матрицами:

а) $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $2\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)$, где $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, а через $\boldsymbol{A}^\top$ обозначена матрица, транспонированная к матрице $\boldsymbol{A}$.

3.2.2. Матрица $\boldsymbol{A}$ называется *симметрической*, если $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$, и *кососимметрической*, если $\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{A}$.

Доказать, что любую квадратную матрицу $\boldsymbol{A}$ над полем $\mathbb{C}$ можно представить и притом единственным образом в виде $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{B}$ — симметрическая, $\boldsymbol{C}$ — кососимметрическая матрицы.

3.2.3. Выяснить, всегда ли матрицу-столбец можно умножить справа на матрицу-строку.

3.2.4. Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

3.2.5. Вычислить выражения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$;

д) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$ и $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; з) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}^n$;

и) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}^n$ (матрица порядка k);

к) $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$;

л) $\left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^n$.

3.2.6. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы $\boldsymbol{A}$ в следующих случаях:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2.7. Доказать, что для любой матрицы $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ значение многочлена $x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ от этой матрицы равно нулевой матрице.

3.2.8. Найти все квадратные матрицы второго порядка над полем $\mathbb{C}$, квадрат которых равен:

а) нулевой матрице; б) единичной матрице.

3.2.9. Матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются *перестановочными*, если $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Найти все матрицы над полем $\mathbb{C}$, перестановочные с данной матрицей $\boldsymbol{A}$ (предполагается, что $\alpha, \beta \neq 0$):
а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$;
г) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; д) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

3.2.10. Для натуральных чисел n, i, j $(i, j \leq n)$ обозначим через $\boldsymbol{e}_{n;ij}$ *матричную единицу*, т. е. квадратную матрицу порядка n, у которой все элементы, за исключением элемента на пересечении i-й строки и j-го столбца, равны нулю, а указанный элемент равен единице.

а) Для произвольной матрицы $\boldsymbol{A}$ размеров $n \times k$ вычислить произведение $\boldsymbol{e}_{n;i,j}\boldsymbol{A}$.

б) Для произвольной матрицы $\boldsymbol{A}$ размеров $k \times n$ вычислить произведение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{n;i,j}$.

в) Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\boldsymbol{e}_{n;ij}$, при фиксированных n, i, j.

3.2.11. а) Доказать, что если квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n над полем перестановочна с каждой матрицей порядка n, то $\boldsymbol{A}$ есть скалярная матрица, т. е. $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{E}_n$, где $\boldsymbol{E}_n$ — единичная матрица порядка n, α — некоторое число.

б) Доказать, что для того чтобы квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ над полем была перестановочной со всеми диагональными матрицами того же порядка, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\boldsymbol{A}$ сама была диагональной.

в) Доказать, что если $\boldsymbol{A}$ — диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали различны между собой, то любая матрица, перестановочная с $\boldsymbol{A}$, также диагональна.

г) Доказать, что если $\boldsymbol{A}$ — треугольная матрица над полем $\mathbb{R}$, перестановочная с матрицей $\boldsymbol{A}^\top$, то $\boldsymbol{A}$ — диагональная матрица.

3.2.12. Представить с помощью умножения слева или справа на подходящую матрицу следующие преобразования матрицы $\boldsymbol{A}$ размеров $k \times n$:

а) перестановка i-й и j-й строк;

б) перестановка i-го и j-го столбцов;

в) умножение i-й строки на число α;

г) умножение i-го столбца на число α;

д) прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на число α;

е) прибавление к i-му столбцу j-го столбца, умноженного на число α.

3.2.13. Пусть $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_n$ — квадратная матрица порядка n над полем P. Напомним, что через $\mathsf{tr}\,(\boldsymbol{A})$ обозначается *след* матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj}$. Проверить, что для любых матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и любого $\alpha \in P$ имеют место равенства:

а) $\mathsf{tr}\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathsf{tr}\,(\boldsymbol{A}) + \mathsf{tr}\,(\boldsymbol{B})$;

б) $\mathsf{tr}\,(\alpha\boldsymbol{A}) = \alpha\mathsf{tr}\,(\boldsymbol{A})$;

в) $\mathsf{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \mathsf{tr}\,(\boldsymbol{BA})$.

Вывести из равенства в), что не существует матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ над полем, для которых выполняется равенство $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}_n$.

3.2.14. а) Убедиться, что для любой матрицы $\boldsymbol{B}$ матрица $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BB}^\top$ является симметрической.

б) Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — симметрические матрицы. Показать, что матрица $\boldsymbol{AB}$ будет симметрической тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

3.2.15. Квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n может рассматриваться как матрица, составленная из подматриц:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \dots & \boldsymbol{A}_{1m} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \dots & \boldsymbol{A}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \dots & \boldsymbol{A}_{mm} \end{pmatrix},$$

если разбить ее строки и столбцы на m групп из $k_1, k_2, \dots, k_m$ строк и столбцов соответственно.

Убедиться, что умножение двух квадратных матриц порядка n, представленных таким способом, можно выполнить поблочно, т. е. если матрица $\boldsymbol{B}$ записана с помощью блоков $\boldsymbol{B}_{ij}$, $1 \le i, j \le m$, то $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$, где $\boldsymbol{C}$ составлена из блоков $\boldsymbol{C}_{ij}$, причем $\boldsymbol{C}_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{m} \boldsymbol{A}_{is}\boldsymbol{B}_{sj}$.

3.3. Матричные уравнения. Обратимость матриц

3.3.1. Решить матричные уравнения $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{YA} = \boldsymbol{B}$ для матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

3.3.2. Убедиться, что каждая приведенная ниже матрица обратима, и найти матрицу, обратную к ней:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

3.3.3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 5 & 6 & 9 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

3.3.4. Определить, как изменится обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$, если в данной матрице $\boldsymbol{A}$:

а) переставить i-ю и j-ю строки;

б) i-ю строку умножить на число α, не равное нулю;

в) к i-й строке прибавить j-ю, умноженную на число α, или совершить аналогичное преобразование столбцов.

3.3.5. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — обратимые матрицы одного и того же порядка. Показать, что следующие четыре равенства равносильны между собой: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AB}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BA}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

3.3.6. Квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n называется *инволютивной*, если $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}_n$, и *ортогональной*, если она обратима и $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^\top$. Доказать, что любые два из свойств симметричности, ортогональности и инволютивности влекут за собой третье.

3.3.7. а) Доказать, что множество всех ортогональных матриц порядка n является группой относительно умножения матриц.

б) При каких значениях n группа ортогональных матриц, определенная в п. а), будет коммутативной?

3.3.8. Найти обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$, где $\boldsymbol{B}$ — произвольная матрица размеров $k \times l$; $\boldsymbol{O}$ — нулевая матрица размеров $l \times k$.

3.3.9. Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — квадратные матрицы порядка n, $\boldsymbol{B}$ — обратимая матрица, и $f(x)$ — многочлен. Доказать, что $f(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = f(\boldsymbol{A})$.

3.3.10. Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — квадратные матрицы порядка n. Доказать, что если матрица $\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ обратима, то и матрица $\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ обратима.

3.3.11. Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — строки длины n такие, что $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\top \neq$ $\neq -1$. Доказать, что матрица $\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{B}$ обратима.

3.3.12. Доказать, что матрица, обратная к симметрической (соответственно к кососимметрической) матрице, сама является симметрической (соответственно кососимметрической).

Глава 4

Определители

4.1. Перестановки и подстановки

4.1.1. Найти число инверсий в приведенных ниже перестановках:
а) $(2, 3, 5, 4, 1)$;
б) $(6, 3, 1, 2, 4, 5)$;
в) $(2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$;
г) $(1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n)$;
д) $(1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n)$;
е) $(1, 5, \ldots, 4n-3, 2, 6, \ldots, 4n-2, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4, 8, \ldots, 4n)$;
ж) $(1, 5, \ldots, 4n-3, 3, 7, \ldots, 4n-1, 2, 6, \ldots, 4n-2, 4, 8, \ldots, 4n)$.

4.1.2. а) Подсчитать число инверсий, которое образует число 1, стоящее на k-м месте перестановки.

б) Подсчитать число инверсий, которое образует число n, стоящее на k-м месте перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$.

4.1.3. Доказать, что число инверсий в перестановке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равно числу инверсий в той перестановке индексов $1, 2, \ldots, n$, которая получается, если данную перестановку заменить исходным расположением.

4.1.4. Доказать, что от одной перестановки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ к любой другой перестановке $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ тех же элементов можно перейти с помощью не более чем $n-1$ транспозиций.

4.1.5. Доказать, что от одной перестановки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ к другой перестановке $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ тех же элементов можно перейти с помощью не более чем $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *смежных* транспозиций, т. е. транспозиций соседних элементов.

4.1.6. Доказать, что можно перейти от любой перестановки чисел $1, 2, \dots, n$, содержащей k инверсий, к исходному расположению с помощью k смежных транспозиций, но нельзя перейти с помощью меньшего числа таких транспозиций.

4.1.7. Подсчитать число инверсий во всех перестановках из n элементов.

4.1.8. Доказать, что для любого целого числа k такого, что $0 \le k \le C_n^2$, существует перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, число инверсий которой равно k.

4.1.9. Определить четность следующих подстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & nk-k+1 & nk-k+2 & \dots & nk \\ k+1 & k+2 & \dots & 2k & \dots & 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$.

4.2. Определение и свойства определителей

4.2.1. Выяснить, будут ли приведенные ниже выражения слагаемыми определителя порядка n, и указать их знаки в случае положительного ответа:

а) $n = 5$, $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;

б) $n = 6$, $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;

в) $n = 7$, $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;

г) $n = 7$, $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

4.2.2. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определитель порядка n и с каким знаком:

а) $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \le k \le n$;   б) $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1}$;

в) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$;   г) $a_{11}a_{2n}a_{3n-1}\ldots a_{n2}$;

д) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}\ldots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

4.2.3. Выбрать значения i и k так, чтобы:

а) произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус;

б) произведение $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

4.2.4. Найти содержащие x^4 и x^3 члены следующих определителей:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \qquad \text{б)}\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3x \\ 2 & 1 & x & x \\ 3 & -4x & 5 & -1 \\ x & 2 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

4.2.5. Выяснить, с каким знаком входит в определитель порядка n:

а) произведение элементов его главной диагонали;

б) произведение элементов его побочной диагонали.

4.2.6. Пользуясь только определением, вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & \ldots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

4.2.7. Доказать, что если в определителе порядка n на пересечении некоторых k строк и l столбцов стоят элементы, равные нулю, причем $k + l > n$, то определитель равен нулю.

4.2.8. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы (см. определение в задаче 3.2.2) нечетного порядка равен нулю.

4.2.9. Доказать, что определитель не изменится, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить все предыдущие столбцы.

4.2.10. Выяснить, как изменится определитель порядка n, если:

а) первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение;

б) его строки написать в обратном порядке;

в) каждый его элемент заменить элементом, симметричным с данным относительно “центра” определителя;

г) каждый его элемент умножить на (-1);

д) каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{i-k}, где $c \neq 0$;

е) из каждой строки, кроме последней, вычесть последнюю строку, а из последней строки — прежнюю первую строку.

4.2.11. Числа 2287044, 5908197, 2858805, 6737508, 1419857, 2866999 и 7443195 делятся на 17. Доказать, что делится на 17 также и определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 & 7 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 9 & 0 & 8 & 1 & 9 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & 8 & 8 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 7 & 5 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 9 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 6 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 7 & 4 & 4 & 3 & 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

4.3. Определители малых порядков

4.3.1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 8 & -9 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 1723547 & 1723647 \\ 2958423 & 2958523 \end{vmatrix}$.

4.3.2. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$.

4.3.3. Вычислить определители четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$.

4.3.4. Вычислить определители пятого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

4.3.5. Доказать равенства:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

4.3.6. Доказать приведенные в задаче 4.3.5 равенства, используя свойства определителей.

4.3.7. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & -1 \\ x & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

4.4. Определители произвольного порядка

В задачах этого параграфа в случаях, когда порядок определителя нельзя найти из условия, он предполагается равным n.

4.4.1. Вычислить определители, приводя их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ -x & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \ldots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \ldots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-b_n & \ldots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1-n & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1-n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4.4.2. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями:

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в) $a_{ij} = |i - j|$.

4.4.3. Вычислить определители методом выделения линейных множителей:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix};$$

$$\text{в)}\ \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}; \quad \text{г)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)}\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}.$$

4.4.4. Вычислить определители методом рекуррентных соотношений:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}; \text{б)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix};$$

в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 7 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

4.4.5. Вычислить определители с помощью формулы для определителя Вандермонда:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \dots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \dots & x+a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \dots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & a-2 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \sin^2\varphi_1 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin\varphi_n & \sin^2\varphi_n & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$.

4.4.6. Вычислить определители с помощью представления их в виде суммы определителей:

а) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

4.4.7. Вычислить определители с помощью теоремы Лапласа:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4.4.8. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

4.4.9. Вычислить определители, представляя их в виде произведений определителей:

а) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 2+x_1y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 2+x_ny_n \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \dots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$.

4.4.10. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_3^2+x_2^2 & \dots & x_n^3+x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_3^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & x & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

4.5. Применения определителей

4.5.1. Для приведенных ниже матриц найти обратные матрицы с помощью присоединенной матрицы (если порядок матрицы не определяется из условия, то предполагается, что он равен n):

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 2 & -3 & -11 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 22 \\ 5 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$.

4.5.2. Доказать, что матрица $\boldsymbol{A}$ с целочисленными коэффициентами имеет обратную матрицу с целочисленными коэффициентами тогда и только тогда, когда $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = 1$ или $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = -1$.

4.5.3. Решить системы линейных уравнений, пользуясь теоремой Крамера:

а) $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ -4x + 6y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 5x + 6y = -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 5x + 7y = -9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x - 6y = 4, \\ 9x - 8y = -7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$

Глава 5

Многочлены

5.1. Делимость многочленов

5.1.1. Выполнить деление с остатком многочлена $f(x)$ на $g(x)$:

а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1;$

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1, \quad g(x) = 3x^2 - 2x + 1.$

5.1.2. Найти условия, при котором многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$:

а) $f(x) = x^3 + px + q, \quad g(x) = x^2 + mx - 1;$

б) $f(x) = x^4 + px + q, \quad g(x) = x^2 + mx + 1.$

5.1.3. С помощью схемы Горнера выполнить деление с остатком многочлена $f(x)$ на $g(x)$:

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \quad g(x) = x - 1;$

б) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, \quad g(x) = x + 3;$

в) $f(x) = 4x^3 + x^2, \quad g(x) = x + 1 + i;$

г) $f(x) = x^3 - x^2 - x, \quad g(x) = x - 1 + 2i.$

5.1.4. С помощью схемы Горнера вычислить $f(\alpha)$:

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad \alpha = 4;$

б) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \quad \alpha = -2 - i.$

5.1.5. С помощью схемы Горнера разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x-\alpha$:

а) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1,\quad \alpha=-1;$

б) $f(x)=x^5,\quad \alpha=1;$

в) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90,\quad \alpha=2;$

г) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i,\quad \alpha=-i;$

д) $f(x)=x^4+(3-8i)x^3-(21+18i)x^2-(33-20i)x+7+18i,$ $\alpha=-1+2i.$

5.1.6. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

а) $f(x)=x^4+7x^3+19x^2+23x+10,\ \ g(x)=x^4+7x^3+18x^2+$ $+22x+12;$

б) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1,\quad g(x)=x^3+x^2-x-1;$

в) $f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5,\ \ g(x)=x^5+x^2-x+1;$

г) $f(x)=x^4-4x^3+1,\quad g(x)=x^3-3x^2+1;$

д) $f(x)=3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1,\quad g(x)=$ $=3x^5+8x^4+9x^3+15x^2+10x+9;$

е) $f(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1,\ g(x)=x^4-2x^3-$ $-x^2-2x+1.$

5.1.7. Пользуясь алгоритмом Евклида, для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$, где $d(x)$ — наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$:

а) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\ g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2;$

б) $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1,\ g(x)=x^4+2x^3+x+2;$

в) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\ g(x)=2x^3-x^2-5x+4;$

г) $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6,\ g(x)=3x^4-4x^3-$ $-x^2-x-2.$

5.1.8. Пользуясь алгоритмом Евклида, для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $f(x)u(x)+\ +g(x)v(x)=1$:

а) $f(x)=3x^3-2x^2+x+2,\ g(x)=x^2-x+1;$

б) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,\ g(x)=x^2-x-1;$

в) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.

5.2. Кратные корни и кратные множители

5.2.1. Определить кратность корня α многочлена $f(x)$:
а) $\alpha = 2$, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;
б) $\alpha = -2$, $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

5.2.2. Найти числа a, b такие, чтобы многочлен $ax^{n+1} + bx^n + 1$ делился на $(x-1)^2$.

5.2.3. Доказать, что число 1 является корнем кратности 3 многочленов:
а) $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ при $n > 1$;
б) $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$ при любом n.

5.2.4. Доказать, что при $n > 2$ многочлен

$$x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2} + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1} - \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1} - 1$$

делится на $(x-1)^5$ и не делится на $(x-1)^6$.

5.2.5. Найти условия для коэффициентов a, b, при которых многочлен $x^5 + ax^3 + b$ имеет корень кратности 2, отличный от нуля.

5.2.6. Найти условия для коэффициентов a, b, c, при которых многочлен $x^5 + 10ax^3 + 5bx + c$ имеет корень кратности 3, отличный от нуля.

5.2.7. Доказать, что многочлен $a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \ldots + a_mx^{k_m}$, где $k_1 > k_2 > \ldots > k_m$, не имеет корней кратности выше $m-1$, отличных от нуля.

5.2.8. Доказать, что многочлен делится на свою производную тогда и только тогда, когда он ассоциирован с многочленом $(x-\alpha)^n$ для некоторого натурального числа n.

5.2.9. Доказать, что многочлен $\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x^2}{2}+$ $+x+1$ при любом натуральном n не имеет кратных корней.

5.2.10. Отделить кратные множители многочлена $f(x)$:

а) $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$;

б) $f(x)=x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$;

в) $f(x)=x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$;

г) $f(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$.

5.3. Разложение многочленов над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ на неприводимые множители

5.3.1. Разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$ следующие многочлены:

а) $x^3-6x^2+11x-6$; б) x^4+4;

в) $x^4+4x^3+4x^2+1$; г) $\cos(n\arccos x)$;

д) $(x+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n+(x+\cos\varphi-i\sin\varphi)^n$.

5.3.2. Построить многочлены наименьшей степени над полем $\mathbb{C}$ по указанным ниже корням:

а) корень 1 кратности 2 и корни $2, 3$, $1+i$ кратности 1;

б) корень -1 кратности 3 и корни 3, 4 кратности 1;

в) корень i кратности 2 и корень $-1-i$ кратности 1.

5.3.3. Разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$ следующие многочлены:

а) x^4+4; б) x^6+27; в) $x^4+4x^3+4x^2+1$;

г) $x^{2n}-2x^n+2$; д) $x^{2n}+x^n+1$; е) $x^{2n+1}-1$;

ж) $x^{2n}-1$.

5.3.4. Построить многочлены наименьшей степени над полем $\mathbb{R}$ по указанным ниже корням:

а) корень 1 кратности 2 и корни $2, 3$, $1+i$ кратности 1;

б) корень $1+i$ кратности 2 и корни 3, 4 кратности 1;

в) корень i кратности 2 и корень $-1-i$ кратности 1.

5.3.5. Найти наибольший общий делитель приведенных ниже пар многочленов:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

б) $\prod\limits_{k=1}^{3}(x^k-1)$ и $\prod\limits_{k=1}^{2}(x^{2k}-1)$;

в) $\prod\limits_{k=1}^{4}(x^k-1)$ и $\prod\limits_{k=1}^{4}(x^k+1)$;

г) x^m-1 и x^n-1;

д) x^m+a^m и x^n+a^n.

5.3.6. Найти условия для натуральных чисел m, n, p, при которых многочлен $x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^2-x+1.

5.3.7. Найти условия для натуральных чисел m, n, p, при которых многочлен $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^4+ $+x^2+1$.

5.3.8. Найти условия для натурального числа m, при которых многочлен $(x+1)^m+x^m+1$ делится на следующие многочлены: а) x^2-x+1; б) $(x^2+x+1)^2$.

5.3.9. Найти условия для натурального числа m, при которых многочлен $(x+1)^m-x^m-1$ делится на следующие многочлены: а) x^2+x+1; б) $(x^2+x+1)^2$.

5.3.10. Доказать, что ни при каком натуральном m многочлены $(x+1)^m-x^m+1$ и $(x+1)^m+x^m+1$ не могут делиться на $(x^2+x+1)^3$.

5.4. Многочлены над полем $\mathbb{Q}$

5.4.1. Доказать, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целочисленными коэффициентами, то справедливы следующие утверждения:

а) q делит a_0;

б) p делит a_n;

в) для любого $m \in \mathbb{Z}$ число $p - mq$ делит $f(m)$.

5.4.2. Найти рациональные корни многочленов:

а) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

б) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;

в) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$;

г) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

д) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$.

5.4.3. Доказать, что многочлен $f(x)$ с целочисленными коэффициентами, для которого $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа, не имеет целочисленных корней.

5.4.4. Пусть многочлен $f(x)$ с целочисленными коэффициентами для двух различных целых значений $x = m_1$, $x = m_2$ принимает значения, по модулю равные единице. Доказать следующие утверждения:

а) если $|m_1 - m_2| > 2$, то $f(x)$ не имеет рациональных корней;

б) если $|m_1 - m_2| \le 2$, то рациональным корнем многочлена $f(x)$ может быть только число $\dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)$.

5.4.5. Доказать неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ многочленов:

а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

в) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

5.4.6. Для $m > 1$ положим $f_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} x^k$. Найти необходимые и достаточные условия, при которых многочлен $f_m(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

5.4.7. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа. Доказать неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ многочленов:

а) $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$;

б) $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$.

5.4.8. Доказать, что если многочлен $f(x)$ с целочисленными коэффициентами принимает значение 1 при более чем трех целочисленных значениях x, то $f(x)$ не может принимать значение -1 при целочисленных значениях x.

5.4.9. Пусть многочлен ax^2+bx+c с целочисленными коэффициентами неприводим над полем $\mathbb{Q}$, $n\geq 7$ и $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — различные целые числа, $g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. Доказать, что многочлен $a[g(x)]^2+bg(x)+1$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

5.4.10. Найти все приводимые над полем $\mathbb{Q}$ многочлены вида x^5+ax^3+bx+1 с целыми коэффициентами a и b.

5.4.11. Используя алгоритм Кронекера, разложить на множители или доказать неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ многочленов:

а) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1$;

б)$x^4-x^3-3x^2+2x+2$.

5.5. Применения многочленов

5.5.1. Разложить рациональные дроби на простейшие над полем $\mathbb{C}$:

а) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; б) $\dfrac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$;

в) $\dfrac{1}{x^4+4}$; г) $\dfrac{1}{x^n-1}$;

д) $\dfrac{1}{x^n+1}$; е) $\dfrac{n!}{x(x-1)\cdots(x-n)}$;

ж) $\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$; з) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$;

и) $\dfrac{1}{(x^n-1)^2}$; к) $\dfrac{1}{x^m(1-x)^n}$.

5.5.2. Разложить рациональные дроби на простейшие над полем $\mathbb{R}$:

а) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$; б) $\dfrac{1}{x^4+4}$;

в) $\dfrac{x^2}{x^6+27}$; г) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

д) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$; е) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$.

5.5.3. Доказать, что для любых различных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и любых чисел $y_0, y_1, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $f(x)$ степени, не превосходящей n, для которого $f(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

5.5.4. а) Пусть $\mathbb{F}$ — бесконечное поле. Доказать, что два многочлена из $\mathbb{F}[x]$ равны тогда и только тогда, когда равны определяемые ими функции из $\mathbb{F}$ в $\mathbb{F}$.

б) Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле. Привести пример двух различных многочленов из $\mathbb{F}[x]$, определяющих одну и ту же функцию из $\mathbb{F}$ в $\mathbb{F}$.

5.5.5. Пользуясь формулой Лагранжа, построить многочлен по приведенным таблицам значений:

а)

x	1	2	3	4
y	2	1	4	3

;

б)

x	1	i	-1	$-i$
y	1	2	3	4

.

5.5.6. Доказать, что многочлен степени $k \le n$, принимающий целочисленные значения при $n+1$ последовательных целочисленных значениях переменной, принимает целочисленные значения при всех целочисленных значениях переменной.

5.5.7. Доказать, что многочлен $f(x)$ степени n, принимающий целочисленные значения при $x = 0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, принимает целочисленные значения при всех значениях $x = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$.

5.5.8. Составить ряд Штурма и отделить корни следующих многочленов:

а) $x^3 - 3x - 1$; б) $x^3 + x^2 - 2x - 1$;
в) $x^4 - 12x^2 - 16x - 4$; г) $x^4 + 4x^3 - 12x + 9$;
д) $2x^5 - 10x^3 + 10x - 3$; е) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

5.5.9. Пользуясь теоремой Штурма, определить число действительных корней уравнений, считая участвующие в них параметры a, b, p, q действительными числами:
а) $x^3 + px + q$; б) $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b = 0$;
в) $x^n + px + q = 0$; г) $E_n = \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \dfrac{x^2}{2!} + x + 1 = 0$.

5.5.10. Доказать, что для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ степени n и числа $\alpha \in \mathbb{R}$ из того, что $f(\alpha) \geq 0$, $f'(\alpha) \geq 0$, $\ldots$, $f^{(n)}(\alpha) \geq 0$, следует, что все действительные корни многочлена f не превосходят α.

5.5.11. Доказать, что действительные корни многочлена $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ из $\mathbb{R}[x]$, где $a_0 > 0$, r — наименьшее число такое, что $a_r < 0$, не превосходят:

а) $1 + \sqrt[r]{\max\left\{\dfrac{|a_k|}{a_0} \mid a_k < 0\right\}}$;

б) $\rho + \sqrt[r]{\max\left\{\dfrac{|a_k|}{a_0\rho^{k-r}} \mid a_k < 0\right\}}$, где ρ — любое положительное число;

в) $2\max\left\{\sqrt[k]{\dfrac{|a_k|}{a_0}} \mid a_k < 0\right\}$.

5.5.12. Ограничить сверху и снизу действительные корни многочленов:
а) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3$; б) $x^5 + 7x^3 - 3$;
в) $x^7 - 108x^5 - 445x^3 + 900x^2 + 801$;
г) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 10x + 14$.

5.5.13. Определить число M так, чтобы при $|x| > M$ выполнялись неравенства:
а) $|x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2| > 100$;

б) $|x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 2| > 200$.

5.5.14. Найти x так, чтобы неравенство $|f(x)| < |f(1)|$ выполнялось для данного многочлена $f(x)$:

а) $f(x) = x^5 - 3ix^3 + 4$; б) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4$.

5.6. Симметрические многочлены

5.6.1. Выразить симметрические многочлены через элементарные:

а) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;

б) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$;

в) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$;

г) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$;

д) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$.

5.6.2. Выразить моногенные многочлены от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через элементарные симметрические многочлены:

а) $x_1^3x_2 + \ldots$; б) $x_1^4 + \ldots$; в) $x_1^2x_2^2x_3 + \ldots$;

г) $x_1^3x_2x_3 + \ldots$; д) $x_1^4x_2 + \ldots$; е) $x_1^5 + \ldots$.

5.6.3. Выразить дробно-рациональные функции через элементарные симметрические многочлены:

а) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3}$;

б) $\dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 + x_2} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 + x_3} + \dfrac{(x_3 - x_1)^2}{x_3 + x_1}$;

в) $\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1}\right)\left(\dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3}\right)$.

5.6.4. Вычислить значение симметрической функции f от корней уравнений:

а) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x^3 + 2x - 3 = 0$;

б) $f = x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3$, $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$;

в) $f = x_1^3x_2x_3 + \ldots$, $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$;

г) $f = x_1^4 x_2 + \ldots, \quad 3x^3 - 5x^2 + 1 = 0;$

д) $f = x_1^3 x_2^3 + \ldots, \quad 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0;$

е) $f = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2)$, $5x^3 - 6x^2 + 7x - 8 = 0$.

5.6.5. Выразить через коэффициенты уравнения $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ следующие симметрические функции:

а) $a_0^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2;$

б) $a_0^4(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2);$

в) $\dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3} + \dfrac{(x_1 - x_3)^2}{x_1x_3}.$

5.6.6. а) Пусть $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — k-й элементарный симметрический многочлен, $\rho_k(x_2, \ldots, x_n)$ — k-й элементарный симметрический многочлен от $x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что $\rho_k = \sigma_k - x_1\sigma_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}x_1^{k-1}\sigma_1 + (1)^k x_1^k$.

б) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — корни многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Доказать, что всякий симметрический многочлен от $\xi_2, \ldots, \xi_n$ можно представить в виде многочлена от ξ_1.

5.6.7. Пусть $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Используя формулу из задачи 5.6.6 а), вывести формулу

$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$

5.6.8. а) Найти выражение для s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 через элементарные симметрические многочлены, пользуясь формулой из задачи 5.6.7.

б) Найти выражение для элементарных симметрических многочленов $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ через $s_1, s_2, \ldots$.

5.6.9. Найти значение суммы s_k от корней уравнений:

а) $x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0, \quad k = 5;$

б) $x^4 - x^3 - 1 = 0, \quad k = 8;$

в) $x^3 - 3x + 1, \quad k = 10.$

5.6.10. Вычислить результанты следующих пар многочленов:

а) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1, \;\; 2x^2 - x - 1;$

б) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1, \;\; x^2 + x + 3;$

в) $2x^3 - 3x^2 - x + 2, \quad x^4 - 2x^2 - 3x + 4;$

г) $3x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 - x - 1.$

5.6.11. Выяснить, при каком значении λ приведенные ниже многочлены имеют общий корень:

а) $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^2 + \lambda x + 2;$

б) $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3$ и $x^2 + \lambda^2 - 2;$

в) $x^3 + \lambda x^2 - 9$ и $x^2 + \lambda x - 3.$

5.6.12. Вычислить дискриминанты следующих многочленов:

а) $x^3 - x^2 - 2x + 1;$ б) $x^3 + 2x^2 + 4x + 1;$

в) $3x^3 + 3x^2 + 5x + 2;$ г) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1;$

д) $x^n + a;$ е) $x^n + px + q.$

5.6.13. Выяснить, при каком значении λ многочлены имеют кратные корни:

а) $x^3 - 3x + \lambda;$

б) $x^4 - 4x + \lambda;$

в) $x^3 - 8x^2 + (13 - \lambda)x - (6 + 2\lambda);$

г) $x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2.$

Глава 6

Векторная алгебра

6.1. Линейные операции

6.1.1. По векторам $\vec{a}, \vec{b}$ построить векторы: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $-\vec{b}-\vec{a}$.

6.1.2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, чтобы имели место следующие соотношения:

а) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$; в) $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}|$?

6.1.3. Какому условию должны удовлетворять неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ делил пополам угол между ними?

6.1.4. Векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6.1.5. В трапеции $ABCD$ отношение основания AD к основанию BC равно λ. Полагая $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$, выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

6.1.6. Доказать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда совпадают середины отрезков AD и BC.

6.1.7. В треугольнике ABC представить векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$, определяемые медианами, в виде линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

6.1.8. В треугольнике ABC найти сумму векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$, определяемых медианами.

6.1.9. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, плоского или пространственного. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

6.1.10. Точки E и F служат серединами диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, плоского или пространственного. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$.

6.1.11. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$.

6.1.12. В плоскости треугольника ABC найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна $\vec{0}$.

6.1.13. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка K, которая делит ее в отношении $1:4$, а на диагонали AC — точка L, которая делит ее в отношении $1:5$. Доказать, что $\overrightarrow{KL} \| \overrightarrow{LB}$, и найти отношение длин этих векторов.

6.1.14. Пусть точки K, L, M, N делят в одном и том же отношении λ стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$. Доказать, что:

а) если $ABCD$ — параллелограмм, то $KLMN$ — параллелограмм;

б) если $\lambda \neq 1$ и $KLMN$ – параллелограмм, то $ABCD$ – параллелограмм.

6.1.15. К точке M приложены три ненулевых вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ так, что $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$. Зная углы α, β, γ между векторами y и z, z и x, x и y, найти отношения $|\vec{x}| : |\vec{y}| : |\vec{z}|$.

6.1.16. Найти условия, при которых существует точка M, лежащая в плоскости треугольника ABC и такая, что сумма трех ненулевых векторов, имеющих одинаковые длины и направленных из точки M по лучам $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, равна $\vec{0}$.

6.1.17. Доказать, что сумма векторов, направленных из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна $\vec{0}$.

6.1.18. Доказать, что вектор, направленный из произвольной точки пространства в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

6.1.19. Даны треугольники ABC и $A'B'C'$. Выразить вектор $\overrightarrow{MM'}$, соединяющий точки пересечения медиан этих треугольников, через векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

6.1.20. К точке O приложены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти какой-либо вектор, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6.1.21. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$.

6.1.22. В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно λ. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

6.1.23. Дан тетраэдр $OABC$, и в нем точки D, E — середины ребер OA и BC соответственно и точки F, G — точки пересечения медиан граней BOC и ABC соответственно. Принимая за базис $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты следующих векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$; б) $\overrightarrow{DE}$; в) $\overrightarrow{DF}$; г) $\overrightarrow{AE}$; д) $\overrightarrow{OM}$.

6.1.24. Даны векторы $\vec{a} = (3, -2, 6)$ и $\vec{b} = (-2, 1, 0)$. Найти координаты следующих векторов:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $2\vec{a}$; г) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; д) $2\vec{a}+3\vec{b}$; е) $\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

6.1.25. Проверить, что векторы $\vec{a} = (2, -1, 3)$ и $\vec{b} = (-6, 3, -9)$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее и во сколько раз, являются ли они сонаправленными или антинаправленными.

6.1.26. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ коллинеарны.

6.1.27. На плоскости даны два вектора: $\vec{p} = (2, -3)$, $\vec{q} = (1, 2)$. Убедиться, что они образуют базис, и найти разложение вектора $\vec{a} = (9, 4)$ по этому базису.

6.1.28. На плоскости даны три вектора: $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$ и $\vec{c} = (7, -4)$. Убедиться, что они попарно неколлинеарны, и определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

6.1.29. На плоскости даны три вектора: $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (1, -2)$ и $\vec{c} = (-1, 7)$. Убедиться, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ образуют базис, и определить разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по этому базису.

6.1.30. Даны три вектора: $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$ и $\vec{r} = (2, 1, -3)$. Убедиться, что они образуют базис, и определить разложение вектора $\vec{c} = (11, -6, 5)$ по этому базису.

6.1.31. Даны четыре вектора: $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, 2, -1)$ и $\vec{d} = (3, 7, -7)$. Убедиться, что каждые три из них некомпланарны. Определить разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных.

6.2. Системы координат. Деление направленного отрезка

6.2.1. Даны точки $A(3,-1,2)$ и $B(-1,2,1)$. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

6.2.2. Определить точку B, с которой совпадает конец изображения вектора $\vec{a}=(3,-1,4)$, если его начало совпадает с точкой $A(1,2,-3)$.

6.2.3. Конец изображения вектора $\vec{a}=(2,-3,-1)$ совпадает с точкой $(1,-1,2)$. Определить его начало.

6.2.4. Даны четыре точки: $A(-1,5,-10)$, $B(5,-7,8)$, $C(2,2,-7)$, $D(5,-4,2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Установить, какой из них длиннее и во сколько раз и являются ли они сонаправленными или антинаправленными.

6.2.5. Проверить, что точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ являются вершинами трапеции.

6.2.6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин в системе координат, началом которой служит точка A, а базисными векторами — вектор $\overrightarrow{AB}$ и один из следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC}$; б) вектор, сонаправленный с $\overrightarrow{AE}$ и имеющий длину $|AB|$.

6.2.7. Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ равно 8, высота равна 3, а углы, прилежащие к этому основанию, равны $\dfrac{\pi}{4}$. Принимая за ось абсцисс прямую (AD), ориентированную вектором $\overrightarrow{AD}$, а за ось ординат — ось симметрии трапеции, направленную от большего основания к меньшему, найти в этой прямоугольной декартовой системе координат координаты:

а) вершин трапеции;

б) точки M пересечения диагоналей трапеции;

в) точки S пересечения боковых сторон трапеции.

6.2.8. Даны смежные вершины $A(-1,3)$ и $B(2,1)$ параллелограмма $ABCD$, у которого диагональ AC параллельна оси абсцисс, а диагональ BD параллельна оси ординат. Найти координаты вершин C и D.

6.2.9. В аффинной системе координат даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(-2,1)$, $B(1,3)$, $C(4,0)$. Найти координаты вершины D.

6.2.10. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ дана точка $M(x,y,z)$. Найти координаты точки, симметричной точке M:

а) относительно начала координат;

б) относительно плоскости Oxy;

в) относительно оси Oz.

6.2.11. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ дана точка $M(x,y,z)$. Найти ее ортогональную проекцию: а) на ось Ox; б) на плоскость Oyz.

6.2.12. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ дана точка $M(x,y,z)$. Найти расстояния d_x, d_y, d_z от точки M до осей координат Ox, Oy, Oz.

6.2.13. В третьем октанте прямоугольной декартовой системы координат найти точку, зная, что ее расстояния до осей Ox, Oy, Oz равны соответственно 5, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{13}$.

6.2.14. Вершина A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ принята за начало координат, а векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ — за базисные векторы. Найти в этой системе координат координаты всех вершин параллелепипеда.

6.2.15. Вершина O тетраэдра $OABC$ принята за начало координат, а векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ — за базисные векторы. Найти в этой системе координат координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.

6.2.16. Даны координаты середин сторон треугольника: $(2, 4)$, $(-3, 0)$, $(2, 1)$. Найти координаты его вершин.

6.2.17. Точки $A(-2, -3)$, $B(1, 4)$, $C(3, 1)$ — три последовательные вершины трапеции, $|BC| = \frac{1}{5}|AD|$. Найти ее четвертую вершину D, точку M пересечения диагоналей и точку S пересечения боковых сторон.

6.2.18. В треугольнике с вершинами $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$ вычислить длину биссектрисы AD.

6.2.19. Даны координаты вершин треугольника $A(-4, -1, 2)$ и $B(3, 5, -16)$. Найти координаты вершины C этого треугольника, если известно, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC — на плоскости Oxz.

6.2.20. Найти отношение, в котором плоскость Oyz делит отрезок $\overrightarrow{AB}$: $A(2, -1, 7)$ и $B(4, 5, -2)$.

6.2.21. Даны точки $A(-3, 5, 15)$, $B(0, 0, 7)$, $C(2, -1, 4)$, $D(4, -3, 0)$. Определить, пересекаются ли прямые AB и CD, и если пересекаются, то найти точку их пересечения.

6.2.22. Точки $A(-3, -2, -1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(9, 6, 4)$ — последовательные вершины трапеции, длина основания AD равна 15. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку S пересечения боковых сторон.

6.2.23. Даны точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти множество точек, сумма квадратов расстояний которых до точек A и B равна $2a^2$ при условии, что $a > c$.

6.2.24. Даны точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти множество точек, абсолютная величина разности квадратов расстояний от которых до точек A и B равна $2a^2$ при условии, что $a > c$.

6.2.25. Найти множество точек, сумма квадратов расстояний которых до вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата расстояния до вершины прямого угла.

6.2.26. Найти множество точек, сумма квадратов расстояний которых до трех вершин равностороннего треугольника постоянна при условии, что этому множеству принадлежит середина одной из сторон треугольника.

6.2.27. Найти множество точек, сумма расстояний которых до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме их расстояний до двух других его противоположных вершин.

6.2.28. Даны различные точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Найти множество точек, отношение расстояний которых до точек A и B равно k.

6.2.29. Найти множество точек, из которых к двум окружностям можно провести равные касательные.

6.2.30. Даны окружности $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ и $x^2 + y^2 + 8x - 2 = 0$. Найти множество точек, из которых к этим окружностям можно провести равные касательные.

6.2.31. Написать формулы перехода от одной системы координат к другой, если началом первой системы координат является вершина A параллелограмма $ABCD$, а базисом — векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$; началом второй системы является вершина C, а базисом — векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$.

6.2.32. Даны системы координат Oxy и $O'x'y'$. В первой системе координат точка O' имеет координаты $(-4, 2)$, ось $O'x'$ пересекает ось Ox в точке $A(2, 0)$, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке $B(0, 8)$. Принимая за базисные векторы второй системы координат векторы $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$, выразить координаты произвольной точки относительно первой системы координат через ее координаты во второй системе.

6.2.33. В треугольнике OAB проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Выразить координаты x и y произвольной точки относительно системы с началом в точке O и базисными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ через ее координаты x', y' в системе с началом O' и базисными векторами $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$.

6.2.34. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое длиннее основания BC; O — точка пересечения ее боковых сторон, O' — точка пересечения диагоналей. Выразить координаты x и y произвольной точки относительно системы с началом в точке O и базисными векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ через ее координаты x', y' в системе с началом O' и базисными векторами $\overrightarrow{O'B}$ и $\overrightarrow{O'C}$.

6.2.35. Найти формулы перехода от аффинной системы координат Oxy, у которой длины базисных векторов равны 1 и угол между ними ω, к такой системе координат $Ox'y'$, положительными направлениями осей которой являются биссектрисы первого и второго координатных углов аффинной системы, а длины базисных векторов также равны 1.

6.2.36. Найти формулы перехода от аффинной системы координат Oxy, у которой длины базисных векторов равны 1 и угол между ними ω, к другой аффинной системе координат — $Ox'y'$, у которой длины базисных векторов также равны 1, если одноименные оси этих систем взаимно перпендикулярны, а разноименные образуют острые углы.

6.2.37. Даны системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. По отношению к первой системе начало второй находится в точке $O'(2, 1, 3)$, а базисные векторы второй системы суть $\vec{e_1}' = (2, 4, 1)$, $\vec{e_2}' = (0, 4, 4)$, $\vec{e_1}' = (1, 1, 0)$.

а) Написать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй системе.

б) Выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе.

в) Найти координаты начала O и координаты базисных векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ первой системы относительно второй.

6.2.38. Координаты точек x, y, z в системе $Oxyz$ выражаются через координаты точек x', y', z' в системе $Ox'y'z'$ следующим образом: $x = -2x' - y' - z' - 1$, $y = -y' - z'$, $z = x' + 3y' + z' + 1$.

а) Выразить координаты x', y', z' через координаты x, y, z.

б) Найти координаты начала O' и координаты базисных векторов $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, $\vec{e_3}'$ второй системы относительно первой.

в) Найти координаты начала O и координаты базисных векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ первой системы относительно второй.

6.2.39. Написать формулы преобразования координат, принимая за начало первой системы вершину параллелепипеда и за базис — векторы, определяемые тремя ребрами, выходящими из этой вершины; за начало второй системы — противоположную вершину параллелепипеда и за базис — векторы, определяемые тремя ребрами, выходящими из этой вершины, соответственно антинаправленные векторам первого базиса.

6.3. Скалярное произведение

В этом параграфе, если не оговорено противное, все базисы предполагаются ортонормированными, а все системы координат — декартовыми прямоугольными.

6.3.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$; г) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; д) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; е) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; ж) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

6.3.2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\dfrac{1}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, вычислить: а) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; б) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; в) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

6.3.3. Доказать справедливость тождества

$$(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(a^2+b^2)$$

и выяснить его геометрический смысл.

6.3.4. Известно, что $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

6.3.5. Известно, что $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Вычислить $|\vec{a}+\vec{b}|$.

6.3.6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{b}|=12$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

6.3.7. Известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ будут перпендикулярны.

6.3.8. Дан равносторонний треугольник ABC, длины сторон которого равны 1. Вычислить $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+$ $+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

6.3.9. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислить $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$.

6.3.10. Даны длины сторон треугольника ABC: $|BC|=5$, $|CA|=6$, $|AB|=7$. Найти скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

6.3.11. Даны прямоугольник $ABCD$ и точка M, которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне ее. Показать, что

а) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$;

б) $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2$.

6.3.12. Найти сумму векторов, являющихся ортогональными проекциями вектора $\vec{a}$ на стороны равностороннего треугольника ABC.

6.3.13. Пусть r — радиус окружности, описанной около правильного n-угольника. Вычислить:

а) сумму квадратов длин всех сторон и всех диагоналей этого многоугольника, выходящих из одной его вершины;

б) сумму квадратов длин всех сторон и всех диагоналей этого многоугольника.

6.3.14. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$. Найти векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ такие, что $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} \| \vec{a}$ и $\vec{y} \perp \vec{a}$.

6.3.15. Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$. Найти вектор $\vec{x}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и такой, что $\vec{a}\vec{x} = 1$, $\vec{b}\vec{x} = 0$.

6.3.16. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$.

6.3.17. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$ найти ортогональную компоненту $\vec{a}$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $\vec{n}$.

6.3.18. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известны длины его ребер: $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA_1| = c$ и углы между ребрами: $\angle BAA_1 = \alpha$, $\angle A_1AD = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Вычислить:

а) длину d диагонали AC_1;

б) косинусы углов, образуемых этой диагональю с ребрами AB, AD, AA_1.

6.3.19. Даны векторы $\vec{a} = (4, -2, -4)$ и $\vec{b} = (6, -3, 2)$. Вычислить длины этих векторов, найти их орты и определить следующие скалярные произведения:

а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; в) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; г) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

6.3.20. Найти центр и радиус сферы, проходящей через точки $A(1, 2, 3)$, $B(5, 2, 3)$, $C(2, 5, 3)$, $D(1, 2, -1)$.

6.3.21. Найти центр M и радиус r окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-2,-2)$, $B(2,6)$, $C(5,-3)$.

6.3.22. Сторона ромба равна 10. Две его противоположные вершины находятся в точках $A(8,-3)$, $C(10,11)$. Найти координаты двух остальных вершин ромба.

6.3.23. На плоскостях прямоугольной декартовой системы координат найти точки, которые вместе с началом координат служили бы вершинами правильного тетраэдра с ребром, равным единице, лежащего в первом октанте.

6.3.24. Вычислить координаты вектора, длина которого равна 8, зная, что он образует с осью Ox угол 45^o, с осью Oz — угол 60^o, а с осью Oy — тупой угол.

6.3.25. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (12,-15,-16)$.

6.3.26. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

а) $45^o, 60^o, 120^o$; б) $45^o, 135^o, 60^o$; в) $90^o, 150^o, 60^o$?

6.3.27. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \alpha\vec{k}$ будут перпендикулярны.

6.3.28. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами в точках $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$.

6.3.29. Вычислить внешние углы треугольника с вершинами в точках $A(3,2,-3)$, $B(5,1,-1)$, $C(1,-2,1)$.

6.3.30. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2,1,-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = 3$.

6.3.31. Найти координаты вектора $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = (3,2,2)$ и $\vec{b} = (18,-22,-5)$, образует с осью Oy тупой угол и длина его равна 14.

6.3.32. Даны три вектора: $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (1,-3,2)$ и $\vec{c} = (3,2,-4)$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -5$, $\vec{x}\vec{b} = -11$, $\vec{x}\vec{c} = 20$.

6.3.33. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (4, -3, 2)$ на вектор, образующий с осями координат равные острые углы.

6.3.34. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (5, 2, 5)$ на вектор $\vec{b} = (2, -1, 2)$.

6.3.35. Даны три вектора: $\vec{a} = (3, -6, -1)$, $\vec{b} = (1, 4, -5)$ и $\vec{c} = (3, -4, 12)$. Найти проекцию вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

6.3.36. Даны три вектора: $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$ и $\vec{c} = (-1, 1, 4)$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c} + \vec{b}$.

6.3.37. Найти ортогональную компоненту вектора $(-14, 2, 5)$ на вектор $(2, -2, 1)$.

6.3.38. Найти ортогональную компоненту вектора $(8, 4, 1)$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $(2, -2, 1)$.

6.3.39. Найти ортогональную компоненту вектора $(1, 1, 9)$ на плоскость, определяемую векторами $(2, -2, 1)$ и $(8, 4, 1)$.

6.3.40. Вычислить углы, образованные противоположными ребрами тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(3, -1, 0)$, $B(0, -7, 3)$, $C(-2, 1, -1)$, $D(3, 2, 6)$.

6.3.41. Выразить через элементы матрицы Грама $g_{11} = \vec{e_1}^2$, $g_{12} = \vec{e_1}\vec{e_2}$, $g_{22} = \vec{e_2}^2$ произвольного базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ длины базисных векторов, угол ω между ними и площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

6.3.42. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2}$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2}$, зная элементы матрицы Грама g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

6.3.43. Найти косинус угла φ между векторами $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2}$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2}$, зная элементы матрицы Грама g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}$.

6.3.44. Найти косинусы углов φ и ψ, которые вектор $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2}$ образует с векторами базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, если известны элементы матрицы Грама этого базиса.

6.3.45. Определить длину вектора $\vec{a} = (7; -8)$, если $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

6.3.46. Зная длины базисных векторов $|\vec{e_1}| = 2$, $|\vec{e_2}| = 3$ и угол между ними $\omega = \dfrac{\pi}{3}$, найти длину вектора $(-4; 6)$.

6.3.47. Относительно аффинной системы координат даны координаты вершин треугольника ABC. Определить длины базисных векторов и угол между ними, если дополнительно известны длины некоторых сторон и некоторые углы:
а) $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,5)$, $|AB| = \sqrt{52}$, $|AC| = 4$, $|BC| = \sqrt{28}$;
б) $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(3,2)$, $\angle C = 90^o$ и $|CA| = 2$, $|CB| = 3$.

6.4. Векторное и смешанное произведения

6.4.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Вычислить $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 6$ и $|\vec{b}| = 5$.

6.4.2. Вычислить $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 12$ и $\vec{a}\vec{b} = 12$.

6.4.3. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$. Вычислить:
а) $|[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]|$; б) $|[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]|$.

6.4.4. Известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить:
а) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; б) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]^2$; в) $[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}]^2$.

6.4.5. Доказать, что если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно неколлинеарны, то $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

6.4.6. Доказать, что если $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$ и $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$, то векторы $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ коллинеарны.

6.4.7. От одной точки отложены три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}]$.

6.4.8. Три ненулевых вектора связаны соотношениями $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Найти длины векторов и углы между ними.

6.4.9. Доказать, что если $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

6.4.10. Доказать, что если векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

6.4.11. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось равенство $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$.

6.4.12. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2)$ и $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти следующие векторы:

а) $[\vec{a}, \vec{b}]$; б) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; в) $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

6.4.13. Вычислить площадь треугольника ABC, если известны координаты вершин:

а) $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$;

б) $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$, $C(4, 4, 1)$.

6.4.14. Даны вершины треугольника: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

6.4.15. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{b}$, где $\vec{a} = (4, -2, -3)$, $\vec{b} = (0, 1, 3)$, $|\vec{x}| = 26$ и вектор $\vec{x}$ образует с осью OY тупой угол.

6.4.16. Даны векторы $\vec{a} = (0, 1, 1)$ и $\vec{b} = (1, 1, 0)$. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\dfrac{\pi}{4}$, имеющий длину 1 и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ правая.

6.4.17. Даны векторы $\vec{a} = (8, 4, 1)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Найти вектор $\vec{x}$ длины 1, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярный к вектору $\vec{c}$ и направленный так, что тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{x}, \vec{c}$ имеют противоположную ориентацию.

6.4.18. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{b}$, где $\vec{a} = (11, 10, 2)$, $\vec{b} = (4, 0, 3)$, $|\vec{x}| = 1$ и тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ правая.

6.4.19. Доказать, что $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

6.4.20. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 9, -11)$;

б) $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, -1, -2)$;

в) $\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, $\vec{c} = (3, -4, 7)$.

6.4.21. Доказать, что точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

6.4.22. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его вершины имеют координаты $A(1, 2, 3)$, $B(9, 6, 4)$, $D(3, 0, 4)$, $A_1(5, 2, 6)$. Вычислить: а) объем параллелепипеда; б) угол между диагональю AC_1 и плоскостью основания $ABCD$; в) длину высоты параллелепипеда, опущенной из вершины A_1 на плоскость $ABCD$.

6.4.23. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.

6.4.24. Вершины тетраэдра находятся в точках $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

6.4.25. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OY.

6.4.26. Доказать тождества:

а) $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -\vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a}, \vec{c})$;

б) $([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{a}, \vec{d}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{d}) \end{vmatrix}$;

в) $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d})$;

г) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d} = (\vec{d}\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{d}\vec{c}\vec{a})\vec{b} + (\vec{d}\vec{a}\vec{b})\vec{c}$;

д) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{x},\vec{a}) & (\vec{x},\vec{b}) & (\vec{x},\vec{c}) \\ (\vec{y},\vec{a}) & (\vec{y},\vec{b}) & (\vec{y},\vec{c}) \\ (\vec{z},\vec{a}) & (\vec{z},\vec{b}) & (\vec{z},\vec{c}) \end{vmatrix}$;

е) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}$.

6.4.27. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и числа α, γ. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям:

$$(\vec{x},\vec{a}) = \alpha, (\vec{x},\vec{b}) = \beta, (\vec{x},\vec{c}) = \gamma.$$

6.4.28. а) Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение $[\vec{a},\vec{x}] = \vec{b}$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$, имело решение.

б) Найти общее решение этого уравнения.

6.4.29. Дан базис в пространстве, состоящий из векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ длины 1, образующих между собой равные углы $\pi/3$. Найти матрицу Грама этого базиса, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, координаты векторов взаимного базиса $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, $\vec{e_3}'$. Для векторов $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ найти координаты векторного произведения $[\vec{a},\vec{b}]$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

6.4.30. Дан базис в пространстве, состоящий из векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ длины 2, образующих между собой равные углы $\pi/4$. Найти матрицу Грама этого базиса, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, координаты векторов взаимного базиса $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$, $\vec{e_3}'$. Для векторов $\vec{a} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{c} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ найти координаты векторного произведения $[\vec{a},\vec{b}]$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Глава 7

Прямые и плоскости

7.1. Прямая на плоскости

В этом параграфе система координат предполагается аффинной, если не оговорено другое.

7.1.1. Даны точки $M_1(3,-1)$, $M_2(2,3)$, $M_3(6,3)$, $M_4(-3,-3)$, $M_5(-3,-1)$, $M_6(-2,1)$. Определить, какие из них лежат на прямой $2x-3y-3=0$ и какие не лежат на ней.

7.1.2. Написать уравнение прямой:

а) имеющей угловой коэффициент 3 и отсекающей на оси ординат отрезок, равный 4;

б) проходящей через точку $(2,3)$ и имеющей угловой коэффициент, равный -5;

в) проходящей через точку $(3,-2)$ параллельно оси Oy;

г) проходящей через точку $(3,-5)$ параллельно вектору $(-4,2)$;

д) проходящей через точки $(2,3)$ и $(-4,-6)$;

е) отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 3 и -5.

7.1.3. Определить, при каком значении a прямая с уравнением

$$(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$$

а) параллельна оси Ox;

б) параллельна оси Oy;

в) проходит через начало координат.

7.1.4. Даны вершины треугольника $A(-2,3)$, $B(4,1)$, $C(6,\ -5)$. Написать уравнение медианы* этого треугольника, проведенной из вершины A.

7.1.5. Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника с вершинами $A(4,4)$, $B(-6,-1)$, $C(-2,-4)$ при вершине C. Система координат прямоугольная.

7.1.6. Через точку $(2,-1)$ провести прямую, отрезок которой, заключенный между осями координат, делился бы в данной точке пополам.

7.1.7. Написать уравнение прямой, имеющей направляющий вектор $(5,-2)$ и отсекающей в соответствующем квадранте треугольник, площадь которого равна 5. Система координат прямоугольная.

7.1.8. Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.

7.1.9. Найти точку пересечения прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

7.1.10. Даны уравнения сторон треугольника: $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.

7.1.11. Даны уравнения сторон треугольника: $2x-y=0$, $5x-y=0$ и уравнение $3x-y=0$ одной из его медиан. Известно, что точка $(3,9)$ лежит на третьей стороне.

---

*Здесь и далее под уравнением стороны многоугольника или отрезка в нем понимается уравнение прямой, на которой лежит этот отрезок.

Найти уравнение этой стороны и координаты вершин треугольника.

7.1.12. Даны уравнения сторон треугольника: $3x-2y+$ $+1=0$, $x-y+1=0$ и уравнение $2x-y-1=0$ его медианы, проведенной из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

7.1.13. Даны уравнения сторон параллелограмма: $8x+$ $+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

7.1.14. Определить взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $2x+3y-1=0$; $4x+6y-7=0$;

б) $x=5+4t$, $y=-2-2t$; $x=1-3t$, $y=7+t$;

в) $3x+9y+12=0$; $x=2+3t$, $y=-2-t$.

7.1.15. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,1)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой.

Система координат прямоугольная.

7.1.16. Даны уравнения сторон параллелограмма: $2x-$ $-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2,-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого параллелограмма.

7.1.17. Даны уравнения сторон параллелограмма: $x-$ $-y-1=0$, $x-2y-10=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,-1)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

7.1.18. Известно, что диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $M(1,6)$, а его стороны AB, BC, CD и DA проходят соответственно через точки $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$ и $S(-5,4)$. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

7.1.19. Даны уравнения сторон прямоугольника: $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x+y-15=0$. Найти вершины прямоугольника. Система координат прямоугольная.

7.1.20. Найти проекцию точки $P(-6,4)$ на прямую $4x-5y+3=0$. Система координат прямоугольная.

7.1.21. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5,13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$. Система координат прямоугольная.

7.1.22. Дан треугольник с вершинами $A(1,-2)$, $B(5,4)$, $C(-2,0)$. Составить уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A этого треугольника. Система координат прямоугольная.

7.1.23. Найти проекцию точки $P(-8,12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2,-3)$ и $B(-5,1)$. Система координат прямоугольная.

7.1.24. Составить уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1,1)$, $(2,8)$ и точки $(4,-3)$, $(-15,14)$ на ее боковых сторонах.

7.1.25. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Составить уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $(-9,-1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

7.1.26. Найти точку Q, симметричную точке $P(8,-9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3,-4)$ и $B(-1,-2)$. Система координат прямоугольная.

7.1.27. Определить угол между двумя прямыми:

а) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$;

б) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$;

в) $3x+2y-1=0$, $5x-2y+3=0$.

Система координат прямоугольная.

7.1.28. Определить взаимное расположение трех прямых в каждом из следующих случаев:

а) $x+2y+3=0$, $2x+3y+5=0$, $x-y+7=0$;
б) $2x+5y-4=0$, $7x+y-20=0$, $3x+2y-8=0$;
в) $x-y-2=0$, $3x+5y+4=0$, $6x-6y+1=0$;
г) $2x+3y-1=0$, $4x+6y+5=0$, $10x+15y-7=0$.

7.1.29. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(2x+3y-1)+\beta(3x-2y+1)=0$ и
а) проходящей через точку $A(3,-1)$;
б) проходящей через начало координат;
в) параллельной оси Ox;
г) параллельной оси Oy;
д) параллельной прямой $4x+3y+5=0$;
е) перпендикулярной прямой $2x+3y+7=0$.
Система координат прямоугольная.

7.1.30. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x-2y-1)+$ $+\beta(4x-5y+8)=0$. Найти прямую этого пучка, проходящую через середину отрезка прямой $x+2y+4=0$, заключенного между прямыми $2x+3y+5=0$, $x+7y-1=0$.

7.1.31. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(2x+y+8)+$ $+\beta(x+y+3)=0$. Найти прямые этого пучка, отрезки которых, заключенные между прямыми $x-y-5=0$, $x-$ $-y-2=0$, равны $\sqrt{5}$. Система координат прямоугольная.

7.1.32. Даны уравнения сторон треугольника $x+2y-$ $-1=0$, $5x+4y-17=0$, $x-4y+11=0$. Не определяя координаты его вершин, составить уравнения высот этого треугольника. Система координат прямоугольная.

7.1.33. Установить, лежат ли точка $M(1,-3)$ и начало координат по одну или по разные стороны каждой из следующих прямых: а) $2x-y+5=0$; б) $x-3y-5=0$; в) $3x+2y-1=0$; г) $x-3y+2=0$.

7.1.34. Параллельные прямые $2x-5y+6=0$ и $2x-$ $-5y-7=0$ делят плоскость на три области: полосу, заключенную между этими прямыми, и две области вне этой полосы. Установить, каким областям принадлежат точки $A(2,1)$, $B(3,2)$, $C(1,1)$, $D(2,8)$, $E(7,1)$, $F(-4,6)$.

7.1.35. Даны четыре точки: $A(5{,}3)$, $B(1{,}2)$, $C(3{,}0)$, $D(2{,}4)$. Установить, принадлежит ли точка M пересечения прямых (AB) и (CD) отрезкам AB и CD или их продолжениям.

7.1.36. Даны вершины треугольника ABC: $A(3{,}1)$, $B(-2{,}4)$, $C(1,0)$ и прямая $x-7y+5=0$. Установить, пересекает ли прямая стороны треугольника или их продолжения.

7.1.37. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями (AB) $2x-y+2=0$, (BC) $x+y-4=0$, (CA) $2x+y=0$. Определить положение точек $M(3,1)$, $N(7,-6)$, $P(3,2)$ относительно данного треугольника.

7.1.38. Определить положение точки $M(-3,2)$ относительно треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x+y-4=0$, $3x-7y+8=0$, $4x-y-31=0$.

В задачах 7.1.39–7.1.64 система координат предполагается прямоугольной.

7.1.39. Точка $A(2,-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислить площадь этого квадрата.

7.1.40. Даны уравнения сторон прямоугольника: $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ и одна из его вершин $A(-2,1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

7.1.41. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2,3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5,-1)$ и $B(3,7)$.

7.1.42. Найти расстояние между параллельными прямыми:

а) $12x-16y-48=0$, $3x-4y+43=0$;

б) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$;

в) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$.

7.1.43. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми l_1 и l_2, внутри которого лежит точка M:

а) $l_1 : x + 7y = 0$, $l_2 : x - y - 4 = 0$, $M(1, 1)$;
б) $l_1 : x + 2y - 11 = 0$, $l_2 : 3x - 6y - 5 = 0$, $M(1, -3)$.

7.1.44. Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми:

а) $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y - 2 = 0$;

б) $x - 2y - 3 = 0$, $2x + 4y + 7 = 0$;

в) $3x + 4y - 1 = 0$, $5x + 12y - 2 = 0$.

7.1.45. Даны вершины треугольника $A(-10, 2)$, $B(6, 4)$ и точка пересечения его высот $H(5, 2)$. Найти координаты вершины C.

7.1.46. Даны уравнения медиан треугольника $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$ и координаты одной из его вершин $A(1, 3)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.

7.1.47. Даны уравнения высот треугольника $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$ и координаты одной из его вершин $A(-4, -5)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.

7.1.48. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(2, 6)$, а также уравнения высоты $x - 7y + 15 = 0$ и биссектрисы внешнего угла $7x + y + 5 = 0$, проведенных из одной вершины.

7.1.49. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(4, -1)$, а также уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенных из одной вершины.

7.1.50. Составить уравнение прямой, равноудаленной от параллельных прямых, заданных уравнениями $x + y - 1 = 0$ и $x + y - 13 = 0$.

7.1.51. Доказать, что если прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник, то угол от l_1 до l_2, угол от l_2 до l_3 и угол от l_3 до l_1 являются одновременно либо внутренними углами треугольника, либо внешними его углами.

7.1.52. Найти внутренние углы треугольника по уравнения его сторон $3x - y + 6 = 0$, $x - y + 4 = 0$, $x + 2y = 0$.

7.1.53. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x + 3y = 0$, его вершина находится в точке $(2, 6)$, тангенс угла при основании равен $\frac{3}{2}$. Составить уравнения боковых сторон треугольника.

7.1.54. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7, 15)$, середина основания — в точке $(1, 3)$, тангенс угла при основании равен 4. Составить уравнения сторон треугольника.

7.1.55. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x - 5y + 1 = 0$, а боковой стороной — прямая $12x - y - 23 = 0$. Составить уравнение другой его боковой стороны, зная, что она проходит через точку $(3, 1)$.

7.1.56. Известны уравнения сторон треугольника (AB) $2x + 3y - 6 = 0$, (AC) $x + 2y - 5 = 0$ и внутренний угол при вершине B, равный $\dfrac{\pi}{4}$. Составить уравнение высоты, опущеной из вершины A на сторону BC.

7.1.57. Зная уравнение стороны треугольника $x + 7y - 6 = 0$ и уравнения биссектрис $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$, выходящих из вершин треугольника, лежащих на этой стороне, найти координаты вершины треугольника, противолежащей ей.

7.1.58. Даны уравнения сторон треугольника $3x + y - 3 = 0$, $3x + 4y = 0$ и уравнение $x - y + 5 = 0$ биссектрисы одного из внутренних углов этого треугольника. Составить уравнение третьей стороны.

7.1.59. Найти внутри треугольника, образованного прямыми $7x + y - 2 = 0$, $5x + 5y - 4 = 0$, $2x - 2y + 5 = 0$, точку, равноудаленную от двух первых прямых и отстоящую от третьей прямой на расстоянии $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

7.1.60. Найти внутри треугольника ABC, образованного прямыми (AB) $2x + y - 22 = 0$, (BC) $2x - y + 18 = 0$, (CA) $x - 2y - 6 = 0$, точку, расстояния от которой до прямых (AB), (BC), (CA) относятся как $20 : 12 : 15$.

7.1.61. Найти центр и радиус круга, вписанного в треугольник со сторонами $3x - 4y - 2 = 0$, $4x - 3y - 5 = 0$, $5x + 12y + 27 = 0$.

7.1.62. Найти центр и радиус круга, вписанного в треугольник со сторонами $x+y+12=0$, $7x+y=0$, $7x-y+28=0$.

7.1.63. Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x - 4y = 0$, $4x - 3y = 0$, $5x + 12y - 10 = 0$.

7.1.64. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0$, $3x - y + 5 = 0$.

7.2. Плоскость и прямая в пространстве

В задачах этого параграфа, предусматривающих вычисление длин отрезков, расстояний и углов, система координат предполагается прямоугольной декартовой.

7.2.1. Составить уравнения плоскости, которая:

а) проходит через точку $M_1(2, 1, -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (1, -2, 3)$;

б) проходит через точку $M_1(3, -1, 2)$ перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, где точка M_2 имеет координаты $(4, -2, -1)$;

в) проходит через точку $M_1(3, 4, -5)$ компланарно двум векторам $\vec{a}_1 = (3, 1, -1)$ и $\vec{a}_2 = (1, -2, 1)$;

г) проходит через точки $M_1(2, -1, 3)$ и $M_2(3, 1, 2)$ компланарно вектору $\vec{a} = (3, -1, 4)$;

д) проходит через три точки: $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$ и $M_3(2, 0, 2)$.

7.2.2. Дана точка $A(1, 2, 3)$. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку A и удовлетворяющих одному из следующих условий:

а) параллельных одной из координатных плоскостей;

б) проходящих через одну из осей координат;

в) перпендикулярных к одной из осей координат (система координат прямоугольная декартова).

7.2.3. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям:

а) $x = 2 + 3u - 4v$, $y = 4 - v$, $z = 2 + 3u$;

б) $x = -3 + u + v$, $y = 4 - u + 2v$, $z = -1 - u - 3v$.

7.2.4. В плоскости, проходящей через три точки: $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, 0)$, $C(-3, 0, 4)$, выбрана аффинная система координат с началом в точке A и базисными векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найти:

а) пространственные координаты точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $(5, 3)$;

б) плоскостные координаты точки пересечения данной плоскости с осью Oz.

7.2.5. В плоскости $2x + 3y - 4z + 12 = 0$ выбрана аффинная система координат, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы базисных векторов – соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями Ox и Oy.

а) Найти пространственные координаты x, y, z точки E этой плоскости, плоскостные координаты которой $(1, 1)$.

б) Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых AB, BC и CA.

в) Написать в плоскостной системе координат уравнение прямой пересечения данной плоскости с плоскостью $5x+$ $+3z - 8 = 0$.

7.2.6. Определить взаимное расположение плоскостей:

а) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

б) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

в) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

7.2.7. Определить, при каком значении l приведенные ниже пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

а) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;
б) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;
в) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

7.2.8. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:
а) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;
б) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;
в) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;
г) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

7.2.9. Через ось Oz провести плоскость, образующую с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ угол $\dfrac{\pi}{3}$.

7.2.10. Через точку $(1, 2, 3)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующую с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол $\dfrac{\pi}{4}$.

7.2.11. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3, -2, -7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

7.2.12. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2, -1, 1)$ перпендикулярно плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

7.2.13. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(1, -1, -2)$ и $M_2(3, 1, 1)$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

7.2.14. Установить, что три плоскости: $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.

7.2.15. Вычислить расстояние от точки $P(-1, 1, -2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-1,1)$, $M_2(-2,1,3)$ и $M_3(4,-5,-2)$.

7.2.16. В каждом из приведенных ниже случаев вычислить расстояние между параллельными плоскостями, а также написать уравнение плоскости, симметричной первой из данных плоскостей относительно второй:

а) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$;

б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$;

в) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$;

г) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$, $16x + 12y - 15z + 25 = 0$.

7.2.17. На оси Oy найти точки, отстоящие от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстоянии 4.

7.2.18. На оси Ox найти точки, равноудаленные от плоскостей $12x - 16y + 15z + 1 = 0$, $2x + 2y - z - 1 = 0$.

7.2.19. Доказать, что плоскость $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ пересекает отрезок с концами $M_1(3, 0, 1)$ и $M_2(2, 5, 2)$.

7.2.20. Доказать, что плоскость $5x - 2y + z - 1 = 0$ не пересекает отрезок с концами $M_1(1, 4, -3)$ и $M_2(2, 5, 0)$.

7.2.21. Определить, лежит ли начало координат внутри острого или тупого угла, образованного плоскостями $x - 2y + 3z - 5 = 0$, $2x - y - z + 3 = 0$.

7.2.22. Определить, лежит ли точка $M(3, 2, -1)$ внутри острого или тупого угла, образованного плоскостями $5x - y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + 2z + 5 = 0$.

7.2.23. Даны плоскости $2x + z = 0$, $x + y + 3z - 5 = 0$ и точки $A(2, 1, 1)$, $B(1, 0, 3)$, $C(0, 0, 1)$, $D(-1, 5, 1)$, $E(1, 4, -3)$. Для каждой из точек B, C, D, E установить, в каком из двугранных углов она расположена – в том же, где точка A, в смежных с ним или в вертикальном.

7.2.24. Даны параллельные плоскости $3x + 4y + 2z - 10 = 0$, $3x + 4y + 2z + 5 = 0$ и точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(5, 6, 1)$, $D(-4, 0, 1)$. Определить положение данных точек относительно данных плоскостей.

7.2.25. Найти тот угол между плоскостями $8x + 4y + z + 1 = 0$, $2x - 2y + z + 1 = 0$, в котором лежит точка $(1, 1, 1)$.

7.2.26. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки: а) $(1, -2, 1)$, $(3, 1, -1)$; б) $(3, -1, 0)$, $(1, 0, -3)$; в) $(0, -2, 3)$, $(3, -2, 1)$.

7.2.27. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1, -1, -3)$:

а) коллинеарно вектору $\vec{a} = (2, -3, 4)$;

б) параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{0}$;

в) параллельно прямой $x = 3t-1$, $y = -2t+3$, $z = 5t+2$.

7.2.28. Составить канонические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$

7.2.29. Дана точка $A(1, 2, 3)$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку A и

а) параллельных осям координат;

б) проходящих через начало координат;

в) перпендикулярных к плоскостям координат;

г) перпендикулярных к осям координат и пересекающих соответствующую ось.

7.2.30. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 6t$, $z = 4t$ и коллинеарной прямой $x = -1 + 2t$, $y = 3t$, $z = -t$.

7.2.31. Составить уравнение плоскости, проектирующей прямую $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

7.2.32. Составить уравнения проекции прямой
$\begin{cases} 5x-4y-2z-5=0, \\ x+2z-2=0 \end{cases}$ на плоскость $2x-y+z-1=0$.

7.2.33. Убедиться, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x=2t-3$, $y=3t-2$, $z=-4t+6$ и $x=t+5$, $y=-4t-1$, $z=t-4$, пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

7.2.34. Убедиться, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x=2t+1$, $y=2t$, $z=t$ и $x=8t+11$, $y=4t+6$, $z=t+2$, пересекаются, и составить канонические уравнения биссектрисы тупого угла между ними.

7.2.35. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1,2,-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}=(6,-2,-3)$ и пересекает прямую $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$.

7.2.36. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4,-5,3)$ и пересекает прямые
$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}, \qquad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

7.2.37. Составить параметрические уравнения прямой, пересекающей прямые $x=3+t$, $y=-1+2t$, $z=4t$; $x=-2+3t$, $y=-1$, $z=4-t$, и параллельной прямой $x-3y+z=0$, $x+y-z+4=0$.

7.2.38. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3,-2,-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}.$$

7.2.39. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ и пересекает прямые
$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}, \ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

7.2.40. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра прямых, заданных уравнениями $x = 3t-7$, $y = -2t+4$, $z = 3t+4$ и $x = t+1$, $y = 2t-8$, $z = -t-12$.

7.2.41. Определить взаимное расположение плоскости α и прямой l и найти координаты точки пересечения в случае, когда плоскость и прямая пересекаются:

а) α: $4x-3y-6z-5=0$, l: $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$;

б) α: $4x-3y+7z-7=0$, l: $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0; \end{cases}$

в) α: $2x+3y+z-1=0$, l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$;

г) α: $x-2y+z-15=0$, l: $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}$.

7.2.42. Определить взаимное расположение плоскостей в каждом из следующих случаев:

а) $2x-4y+5z-21=0$, $x-3z+18=0$, $6x+y+z-30=0$;

б) $x+2y-3z=0$, $3x+6y-9z+10=0$, $2x+4y-6z-1=0$;

в) $3x-y+2z+1=0$, $7x+2y+z=0$, $15x+8y-z-2=0$;

г) $5x-2y+4=0$, $3x+z-5=0$, $8x-2y+z+7=0$.

7.2.43. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y+3z-4=0$, $3x+z-5=0$ и отсекающей на осях Oy и Oz равные отрезки.

7.2.44. Показать, что плоскости $x+2y-z-4=0$, $3x-2y+3z-6=0$, $4y-3z+3=0$ образуют призму, и составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух плоскостей параллельно третьей.

7.2.45. Найти проекцию точки $P(2,-1,3)$ на прямую $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

7.2.46. Найти точку Q, симметричную точке $P(4,1,6)$ относительно прямой $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

7.2.47. Найти точку Q, симметричную точке $P(2, -5, 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5, 4, 6)$ и $M_2(-2, -17, -8)$.

7.2.48. Найти проекцию точки $P(5, 2, -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

7.2.49. Найти точку Q, симметричную точке $P(1, 3, -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

7.2.50. Найти точку Q, симметричную точке $P(3, -4, -6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6, 1, -5)$, $M_2(7, -2, -1)$ и $M_3(10, -7, 1)$.

7.2.51. Найти проекцию точки $P(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые

$$\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

7.2.52. Даны вершины треугольника $A(1, 6, -8)$, $B(3, 8, -7)$, $C(9, 10, -7)$. Найти канонические уравнения биссектрисы и высоты данного треугольника, проведенных из вершины A, а также параметрические уравнения всех его медиан и координаты точки их пересечения.

7.2.53. Вычислить расстояние от точки $P(2, 3, -1)$ до следующих прямых:

а) $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+25}{-2}$;

б) $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$;

в) $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$

7.2.54. Убедившись, что прямые $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ и $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние между ними.

7.2.55. Вычислить кратчайшее расстояние между прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$; $\dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$;

б) $x=2t-4$, $y=-t+4$, $z=-2t-1$; $x=4t-5$, $y=-3t+5$, $z=-5t+5$;

в) $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$; $x=6t+9$, $y=-2t$; $z=-t+2$.

7.2.56. Определить взаимное расположение прямых в пространстве; если прямые параллельны, то составить уравнение плоскости, проходящей через них; если прямые пересекаются, то найти координаты точки пересечения и составить уравнение плоскости, проходящей через них; если прямые скрещиваются, то найти уравнение плоскости, равноудаленной от них:

а) $x=9t$, $y=5t$, $z=-3+t$; $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases}$

б) $x=t$, $y=-8-4t$, $z=-3-3t$; $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2z=0; \end{cases}$

в) $x=3+t$, $y=-1+2t$, $z=4$; $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ x+y-z+4=0; \end{cases}$

г) $x=-2+3t$, $y=-1$, $z=-4-t$; $\begin{cases} 2y-z+2=0, \\ x-7y+3z-17=0. \end{cases}$

Глава 8

Линейные пространства

8.1. Определение и примеры линейных пространств

8.1.1. Пусть в пространстве зафиксирована аффинная система координат. Для каждого из приведенных ниже подмножеств множества геометрических векторов $\boldsymbol{V}_g$ определить, будет ли это подмножество линейным пространством относительно линейных операций над векторами:

а) множество радиусов-векторов точек данной прямой;

б) множество векторов, имеющих неотрицательные координаты;

в) множество векторов, образующих с данным ненулевым вектором данный угол;

г) множество векторов пространства, концы которых не лежат на данной прямой (начало каждого вектора совпадает с началом координат).

8.1.2. Для каждого из приведенных ниже множеств многочленов из кольца $\mathbb{R}[x]$ определить, будет ли это множество линейным пространством над $\mathbb{R}$ относительно сложения многочленов и умножения многочлена на число:

а) для фиксированного целого числа $n \geq 0$ множество всех многочленов степени, не превосходящей n*;

б) множество всех многочленов, принимающих в точке 0 значение 1;

в) множество всех многочленов, принимающих в точке 1 значение 0;

г) множество всех многочленов, принимающих в точках $1, 2, 3$ значение 0.

8.1.3. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Для каждого из приведенных ниже множеств строк из $\mathbb{F}^n$ определить, будет ли это множество линейным пространством над $\mathbb{F}$ относительно покомпонентного сложения и умножения на число:

а) $\boldsymbol{V} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \beta\}$, где $\beta \in \mathbb{F}$;

б) $\boldsymbol{V} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\alpha_k = \beta_i\}$, где $i = 1, \ldots, m$, $\gamma_{ik}, \beta_i \in \mathbb{F}$;

в) $\boldsymbol{V} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_{2k} = 0,\ 2 \leq 2k \leq n\}$.

8.1.4. На множестве $\mathbb{R}^+$ всех положительных действительных чисел определим операции $x \oplus y = xy$, $\alpha \circ x = x^\alpha$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Доказать, что относительно этих операций $\mathbb{R}^+$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

8.1.5. Убедиться, что каждое из приведенных ниже множеств многочленов над полем $\mathbb{F}$ является линейным пространством:

а) множество всех многочленов степени не выше n, у которых коэффициенты при четных степенях x равны нулю;

б) множество всех многочленов степени не выше n, у которых коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю;

в) множество всех многочленов степени n, имеющих фиксированное множество корней $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$;

---

*Здесь и в дальнейшем предполагается, что нулевой многочлен содержится в любом множестве многочленов, для которого проверяется, будет ли оно линейным пространством относительно естественных операций.

г) множество всех однородных многочленов степени n от k переменных.

8.1.6. Убедиться, что каждое из приведенных ниже множеств матриц над полем $\mathbb{F}$ является линейным пространством:

а) множество всех матриц размеров $k \times n$;

б) множество всех квадратных матриц порядка n;

в) множество всех симметрических квадратных матриц порядка n;

г) множество всех кососимметрических квадратных матриц порядка n;

д) множество всех диагональных матриц порядка n;

е) множество всех скалярных матриц порядка n.

8.1.7. Пусть $\boldsymbol{V}$ — множество всех последовательностей, составленных из элементов поля $\mathbb{F}$. Определим сумму последовательностей и произведение последовательности на элемент поля $\mathbb{F}$ покомпонентно. Доказать, что $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$.

8.1.8. а) Привести пример множества W и операций сложения на нем и умножения его элементов на элементы произвольного поля $\mathbb{F}$ таких, что для W выполняются все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы унитарности: $\forall w \in W \;\; 1 \cdot w = w$.

б) Доказать, что аксиому унитарности нельзя вывести из остальных аксиом линейного пространства.

8.1.9. Вывести коммутативность сложения из остальных аксиом линейного пространства.

8.2. Линейная зависимость. Базис и размерность

8.2.1. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. Доказать, что для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ для выполнения равенства $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ необходимо и достаточно выполнения одного из условий: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ или $\alpha = \beta$.

8.2.2. а) Доказать, что приведенные ниже *элементарные преобразования* системы векторов не изменяют ее свойства быть линейно независимой:

(i) перестановка двух векторов в системе;

(ii) умножение вектора на ненулевой скаляр;

(iii) прибавление к одному вектору другого вектора из этой системы, умноженного на скаляр.

б) Доказать, что элементарное преобразование (i) может быть получено с помощью применения преобразований (ii) и (iii).

8.2.3. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – матрицы размеров $k\times n$ над полем $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$— столбцы матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, и пусть $\boldsymbol{B}$ получается из $\boldsymbol{A}$ с помощью элементарных преобразований строк. Доказать, что линейные зависимости между их столбцами одинаковы, т. е. для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o}$.

8.2.4. Матрица называется *ступенчатой по строкам*, если каждая ее ненулевая строка, начиная со второй, имеет в начале больше нулей, чем предыдущая. Доказать, что система из ненулевых строк ступенчатой матрицы линейно независима.

8.2.5. Пусть система векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ линейно независима. Выяснить, будут ли линейно независимы следующие системы векторов:

а) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$; б) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}$;

в) $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}$.

8.2.6. Пусть система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно независима. Выяснить, будут ли линейно независимы следующие системы векторов:

а) при $n = 4$ $\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$,

$\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 + 3\boldsymbol{a}_4$;

б) при $n = 5$ $\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 - 5\boldsymbol{a}_3 - 2\boldsymbol{a}_4 + 4\boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{b}_2 = 8\boldsymbol{a}_1 + 7\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3 + 5\boldsymbol{a}_4 - 10\boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 8\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 + 2\boldsymbol{a}_5$.

8.2.7. Определить, будут ли линейно независимы следующие системы векторов:

а) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 5, 7)$, $a_3 = (3, 7, 10)$;

б) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 5, 7)$, $a_3 = (3, 7, 10 + \varepsilon)$, где $\varepsilon \neq 0$.

8.2.8. Определить, будут ли линейно зависимы следующие системы векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 6, 7)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 1)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (4, -2, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (6, -3, 9)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 3, 4)$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = (2, -3, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, -1, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, -4, 3)$;

г) $\boldsymbol{a}_1 = (4, -5, 2, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, -2, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6, -3, 3, 9)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, -1, 5, 6)$;

д) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

8.2.9. Для каждой из приведенных ниже систем функций выяснить, будет ли она линейно независимой над полем $\mathbb{R}$ (в случае, когда число функций зависит от натурального n, определить, при каких $n \in \mathbb{N}$ система является линейно независимой):

а) $\sin x$, $\cos x$; б) 1, $\sin x$, $\cos x$;

в) $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$; г) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$;

д) $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$;

е) $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \ldots, \sin^n x, \cos^n x$.

8.2.10. Рассмотрим поле действительных чисел $\mathbb{R}$ как линейное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

а) Доказать, что числа 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ линейно независимы.

б) Пусть p — простое число, n — натуральное число. Доказать, что числа 1, $\sqrt[n]{p}$, $\sqrt[n]{p^2}, \ldots, \sqrt[n]{p^{n-1}}$ линейно независимы.

8.2.11. Пусть дана система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ из $\mathbb{C}^n$ и $a_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kn})$, $k = 1, 2, \ldots, s$. Доказать, что если

$|\alpha_{mm}| > \sum_{k\neq m} |\alpha_{km}|$ для всех $m = 1, 2, \ldots, s$, то указанная система линейно независима.

8.2.12. Доказать, что если к линейно независимой системе векторов приписать впереди произвольный вектор, то не более чем один вектор полученной системы будет линейно выражаться через предыдущие.

8.2.13. Найти все значения параметра t, при которых вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 5), \boldsymbol{a}_2 = (3, 7, 8), \boldsymbol{a}_3 = (1, -6, 1), \boldsymbol{b} = (7, -2, t)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (4, 4, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 1, 6)$, $\boldsymbol{b} = (5, 9, t)$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 4, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (6, 8, 7)$, $\boldsymbol{b} = (9, 12, t)$;

г) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 2, 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 4, 7)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5, 6, t)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, 5)$;

д) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 2, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7, 3, 9)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (t, 2, 5)$.

8.2.14. Найти какую-либо максимальную линейно независимую подсистему в каждой из приведенных ниже систем векторов и все векторы, не входящие в эту подсистему, выразить через ее векторы:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (2, -1, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, -3, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, -2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, -1, 15, 17)$, $\boldsymbol{a}_5 = (7, -6, -7, 0)$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3, -4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, -4, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, -5, 8, -3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (5, 26, -9, -12)$, $\boldsymbol{a}_5 = (3, -4, 1, 2)$.

8.2.15. Найти все максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (4, -1, 3, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (8, -2, 6, -4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 4, -2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (6, -2, 8, -4)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 6, 0, 0)$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, 5, 6, 7)$;

г) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, -3, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, 2, -6, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6, 3, -9, 3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$;

д) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_5 = (1, 1, 1)$.

8.2.16. Выяснить, в каком случае система векторов обладает единственной максимальной линейно независимой подсистемой.

8.2.17. Выяснить, сколько максимальных линейно независимых подсистем имеет система ранга k, состоящая из $k + 1$ векторов и содержащая два линейно зависимых вектора, отличных от нулевого.

8.2.18. Найти какой-либо базис и определить размерность линейных пространств, указанных в задачах 8.1.5 и 8.1.6.

8.2.19. Выяснить, будет ли линейное пространство, указанное в задаче 8.1.7, конечномерным.

8.2.20. а) Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство размерности n над конечным полем P из k элементов. Доказать, что $|\boldsymbol{V}| = k^n$.

б) Доказать, что порядок любого конечного поля является степенью простого числа.

8.2.21. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе:

а) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{x} = (6, 9, 14)$;

б) $\boldsymbol{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{x} = (6, 2, -7)$;

в) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 2, 1, 4)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1, 3, -1, 0)$ $\boldsymbol{x} = (7, 14, -1, 2)$.

8.2.22. Доказать, что каждая из приведенных ниже двух систем векторов является базисом, найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и связь координат одного и того же вектора в этих базисах:

а) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2, 3, 3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3, 7, 1)$; $\boldsymbol{f}_1 = (3, 1, 4)$, $\boldsymbol{f}_2 = (5, 2, 1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1, 1, -6)$;

б) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{e}_4 = (1, 3, 2, 3)$; $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 3, 3)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-2, -3, -5, -4)$, $\boldsymbol{f}_3 = (2, 2, 5, 4)$, $\boldsymbol{f}_4 = (-2, -3, -4, -4)$.

8.2.23. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — ортонормированный базис в пространстве геометрических векторов, $\vec{f_1} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f_2} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{f_3} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{g_1} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{g_2} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{g_3} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{x} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$.

а) Проверить, что $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ — базис.

б) Проверить, что $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$, $\vec{g_3}$ — базис.

в) Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$.

г) Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$, $\vec{g_3}$.

д) Найти матрицу перехода от базиса $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ к базису $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$, $\vec{g_3}$.

е) Найти матрицу перехода от базиса $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$, $\vec{g_3}$ к базису $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$.

8.2.24. Найти матрицу перехода от базиса $1, x, \ldots, x^n$ к базису $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n$ линейного пространства многочленов степени не выше n.

8.2.25. Разложить многочлен $x^4 - x + 2$ по базису:

а) 1, $x - 3$, $(x - 3)^2$, $(x - 3)^3$, $(x - 3)^4$;

б) 1, $x + 1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$, $(x + 1)^4$.

8.2.26. Убедиться, что система векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ линейно независима, и дополнить ее до базиса соответствующего арифметического пространства:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 1, 4)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -1, -1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 0, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 1, 3, 1)$.

8.3. Ранг матрицы. Общая теория систем линейных уравнений

8.3.1. Выяснить, может ли ранг матрицы размеров 5×6 быть равен $3, 5, 6, 7$.

8.3.2. Пусть ранг матрицы размеров $m \times n$ равен r. Определить, будут ли ее столбцы линейно зависимы, если:

а) $r < n$; б) $r = n$.

8.3.3. Найти ранг следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

8.3.4. Определить ранг матрицы при различных значениях параметра α:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\alpha^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\alpha^2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\alpha^2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\alpha & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.

8.3.5. Доказать, что ранг суммы двух матриц не превосходит суммы их рангов.

8.3.6. Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы менее чем r таких матриц.

8.3.7. Доказать, что если ранг матрицы равен r, то ее минор, составленный из элементов, стоящих на пересечениях выбранных r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов, отличен от нуля.

8.3.8. Минор матрицы называется *главным*, если он составлен из элементов, стоящих на пересечениях строк и столбцов с одинаковыми номерами.

а) Пусть $\boldsymbol{A}$ — симметрическая матрица порядка n. Доказать, что если $\boldsymbol{A}$ имеет главный минор M порядка r, отличный от нуля, для которого все окаймляющие его главные миноры порядка $r+1$ и $r+2$ (если они существуют) равны нулю, то ранг $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = r$.

б) Доказать, что ранг симметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

8.3.9. Пусть $\boldsymbol{A}$ — симметрическая матрица ранга r и M_k — минор k-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы $\boldsymbol{A}$. (При $k = 0$ считаем $M_0 = 1$.) Доказать, что путем некоторой перестановки строк и соответствующей перестановки столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ можно добиться того, что в последовательности $M_0, M_1, \ldots, M_r$ никакие два соседних минора не равны нулю и $M_r \neq 0$; все же миноры порядка выше r (если они существуют) равны нулю.

8.3.10. а) Пусть $\boldsymbol{A}$ — кососимметрическая матрица порядка n. Доказать, что если $\boldsymbol{A}$ имеет главный минор M порядка r, отличный от нуля, для которого все окаймляющие его главные миноры порядка $r+2$ (если они существуют) равны нулю, то ранг $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = r$.

б) Доказать, что ранг кососимметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

8.3.11. Пусть $\boldsymbol{A}$ — кососимметрическая матрица ранга r и M_k — минор k-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы $\boldsymbol{A}$. (При $k = 0$ считаем $M_0 = 1$.) Доказать, что путем некоторой перестановки строк и соответствующей перестановки столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ можно добиться того, что миноры $M_0, M_2, M_4, \ldots, M_r$ не равны нулю, а миноры $M_1, M_3, \ldots, M_{r-1}$ и все миноры порядка выше r (если они существуют) равны нулю.

8.3.12. Доказать, что ранг кососимметрической матрицы является четным числом.

8.3.13. Исследовать совместность и найти общее решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$

8.3.14. Исследовать систему линейных уравнений и найти общее решение в зависимости от значения параметра α:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \alpha; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \alpha x_4 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \alpha x_4 = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \alpha x_4 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (1+\alpha)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\alpha)x_2 + x_3 = \alpha, \\ x_1 + x_2 + (1+\alpha)x_3 = \alpha^2. \end{cases}$

8.3.15. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ x_3 - x_5 = 0, \\ x_4 - x_6 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

8.3.16. Указать все группы неизвестных, которые могут быть свободными при решении системы уравнений:

а) $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

8.3.17. Доказать, что если ранг однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны, т.е. отличаются лишь числовым множителем (быть может, равным нулю).

8.3.18. Доказать, что если определитель порядка $n > 1$ равен нулю, то алгебраические дополнения соответствующих коэффициентов двух любых строк (столбцов) пропорциональны.

8.3.19. Пусть $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица порядка $n > 1$ и $\tilde{\boldsymbol{A}}$ — матрица, присоединенная к матрице $\boldsymbol{A}$. Как изменяется ранг $\tilde{r}$ матрицы $\tilde{\boldsymbol{A}}$ с изменением ранга r матрицы $\boldsymbol{A}$?

8.3.20. а) Доказать, что если система линейных уравнений с числом уравнений, на единицу бо́льшим числа неизвестных, совместна, то определитель ее расширенной матрицы равен нулю.

б) Доказать, что если у системы линейных уравнений с числом уравнений, на единицу бо́льшим числа неизвестных, ранг основной матрицы равен числу неизвестных, а определитель расширенной матрицы равен нулю, то эта система совместна.

8.3.21. Назовем систему линейных уравнений *крамеровской*, если число n уравнений равно числу неизвестных. Определитель основной матрицы крамеровской системы линейных уравнений называется *главным*, а определители, полученные из него заменой k-го столбца на столбец свободных членов (при $k = 1, \ldots, n$), — вспомогательными определителями.

а) Доказать, что если у крамеровской системы линейных уравнений главный определитель равен нулю, а по крайней мере один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то эта система несовместна.

б) Доказать, что если у крамеровской системы линейных уравнений главный определитель и все вспомогательные определители равны нулю, а ранг основной матрицы на единицу меньше числа неизвестных, то эта система имеет по крайней мере два решения.

в) Привести пример несовместной крамеровской системы, у которой главный определитель и все вспомогательные определители равны нулю.

8.3.22. Пусть дана система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, s,$$

два ее частных решения $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ и число λ. Найти систему линейных уравнений с той же основной матрицей, что у исходной системы, имеющую частное решение:

а) $(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n)$; б) $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$.

8.3.23. Найти условия для системы линейных уравнений, необходимые и достаточные для того, чтобы

а) сумма двух ее частных решений была частным решением;

б) произведение частного решения на число $\gamma \neq 1$ было частным решением.

8.3.24. Доказать, что матричное уравнение $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{B})$, где $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{B})$ – матрица, полученная из $\boldsymbol{A}$ приписыванием к ней справа матрицы $\boldsymbol{B}$.

8.3.25. Доказать, что матричное уравнение $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$, где $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица, $\boldsymbol{O}$ — нулевая матрица, имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = 0$.

8.4. Подпространства и линейные многообразия

8.4.1. Пусть $\mathbb{F}$ — числовое поле, $n \in \mathbb{N}$. Выяснить, является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{F}^n$ каждое из следующих множеств векторов:

а) все строки из $\mathbb{F}^n$, все компоненты которых — целые числа;

б) все строки из $\mathbb{F}^n$, сумма всех компонент которых равна нулю;

в) все строки из $\mathbb{F}^n$, сумма всех компонент которых равна единице.

8.4.2. Для каждого из подмножеств линейного пространства $\boldsymbol{V}$ из задачи 8.1.7 при $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ определить, будет ли это подмножество подпространством, и в случае положительного ответа установить, конечномерно ли оно:

а) множество всех сходящихся последовательностей;

б) для фиксированного $a \in \mathbb{R}$ множество всех последовательностей, имеющих предел a;

в) множество всех ограниченных последовательностей;

г) множество всех последовательностей, в каждой из которых лишь конечное число членов отлично от нуля;

д) множество всех последовательностей, в каждой из которых лишь конечное число членов равно нулю;

е) множество всех последовательностей $\{a_n\}$, удовлетворяющих рекуррентному соотношению $a_n = k_1 a_{n-1} + \ldots + k_m a_{n-m}$ для $n \geq m$, где $k_1, \ldots, k_m$– фиксированные числа.

8.4.3. Для каждого из приведенных ниже подмножеств линейного пространства $\mathbb{F}[x]$ над полем $\mathbb{F}$ определить, будет ли это подмножество подпространством, и в случае положительного ответа установить, конечномерно ли оно:

а) множество всех многочленов четной степени;

б) множество всех многочленов нечетной степени;

в) множество всех многочленов, имеющих корень α, для фиксированного $\alpha \in \mathbb{F}$.

8.4.4. Для каждого из приведенных ниже подмножеств линейного пространства квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$ определить, будет ли это подмножество подпространством, и в случае положительного ответа найти его размерность:

а) множество всех невырожденных матриц;

б) множество всех вырожденных матриц;

в) множество всех матриц, след которых равен нулю;

г) множество всех матриц, перестановочных с фиксированной матрицей $\boldsymbol{A}$ (при нахождении размерности считать матрицу $\boldsymbol{A}$ диагональной с различными элементами на главной диагонали);

д) множество всех матриц, перестановочных со всеми квадратными матрицами порядка n.

8.4.5. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ — фиксированные векторы в пространстве $\boldsymbol{V}_g$ геометрических векторов, $\alpha \in \mathbb{R}$. Выяснить, при каких условиях приведенные ниже множества векторов будут подпространствами $\boldsymbol{V}_g$, и дать геометрическую интерпретацию полученных результатов:

а) $\{\vec{x} \in \boldsymbol{V}_g \mid \vec{x}\vec{a} = \alpha\}$; б) $\{\vec{x} \in \boldsymbol{V}_g \mid [\vec{x}, \vec{a}] = \vec{b}\}$.

8.4.6. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — элементы некоторого линейного пространства, $\boldsymbol{o}$ — его нулевой вектор. Доказать равенства:

а) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$; б) $\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$;

в) $\langle \boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o} \rangle = \langle \boldsymbol{a} \rangle$; г) $\langle 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - 5\boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

8.4.7. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, n — натуральное число, $U \subseteq \mathbb{F}[x]$ — подпространство. Доказать, что если U не содержит многочленов степени больше n и для каждого k такого, что $0 \leq k \leq n$, содержит по крайней мере один многочлен степени k, то U состоит из всех многочленов степени, не превосходящей n.

8.4.8. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство, $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$ — его подпространства. Доказать следующие утверждения:

а) $\boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2$ является подпространством тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{U}_1 \subseteq \boldsymbol{U}_2$ или $\boldsymbol{U}_2 \subseteq \boldsymbol{U}_1$;

б) если $\boldsymbol{U}_1 \subseteq \boldsymbol{U}_2$ и $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}_1 = \mathsf{dim}\boldsymbol{U}_2$, то $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$;

в) если $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2) = \mathsf{dim}(\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2) + 1$, то $\boldsymbol{U}_1 \subseteq \boldsymbol{U}_2$ или $\boldsymbol{U}_2 \subseteq \boldsymbol{U}_1$;

г) если $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}_1 + \mathsf{dim}\boldsymbol{U}_2 > \mathsf{dim}\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2 \neq \{\boldsymbol{o}\}$.

8.4.9. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство, $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3$ — его подпространства.

а) Выяснить, всегда ли

$$\boldsymbol{U}_1 \cap (\boldsymbol{U}_2 + \boldsymbol{U}_3) = (\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2) + (\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_3).$$

б) Ответить на вопрос из п. а) при дополнительном условии $\boldsymbol{U}_2 \subseteq \boldsymbol{U}_1$.

8.4.10. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство, $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$ — его подпространства, и пусть $\boldsymbol{U}_1 = \langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k} \rangle$, $\boldsymbol{U}_2 = \langle \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_m} \rangle$. Указать какое-либо порождающее множество для подпространства $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2$.

8.4.11. Найти размерность и базис подпространств, порожденных следующими системами векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $\boldsymbol{a}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

8.4.12. Найти системы линейных уравнений, задающие пространства, порожденные следующими системами векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1, 1)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

8.4.13. Пусть $\mathbb{F}$ — поле. Доказать, что любое подпространство арифметического пространства $\mathbb{F}^n$ является пространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений от n неизвестных с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$.

8.4.14. Найти размерности суммы и пересечения подпространств $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ и $\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l \rangle$:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 3, 0, 1)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 3, 1, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 0, 2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (3, 1, 3, 1)$.

8.4.15. Найти базисы суммы и пересечения подпространств $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ и $\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l \rangle$:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 3, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, -3)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 2, -3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 3, 0, -4)$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 1, 2)$;

г) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 2, 1)$;

д) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 0, 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 2, 2, 2)$.

8.4.16. Доказать, что сумма двух подпространств будет прямой тогда и только тогда, когда в ней найдется вектор, который однозначно представляется в виде суммы векторов из подпространств-слагаемых.

8.4.17. Доказать, что для любого подпространства $\boldsymbol{U}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ существует подпространство $\boldsymbol{W}$ такое, что $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$. Назовем его *дополнением* подпространства $\boldsymbol{U}$ в $\boldsymbol{V}$.

8.4.18. Доказать, что подпространства $\boldsymbol{U}_1, \ldots, \boldsymbol{U}_m$ конечномерного линейного пространства $\boldsymbol{V}$ обладают одним и тем же дополнением в $\boldsymbol{V}$ тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

8.4.19. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство всех функций, определенных на отрезке $[a, b]$ со значениями в $\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. Для любого подмножества $D \subseteq [a, b]$ положим $\boldsymbol{L}_D = \{f \in \boldsymbol{V} \mid \forall x \in D\ f(x) = 0\}$.

а) Убедиться, что $\boldsymbol{L}_D$ — подпространство в $\boldsymbol{V}$ для любого $D \subseteq [a, b]$.

б) Сформулировать в терминах D_1 и D_2 условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}_{D_1} + \boldsymbol{L}_{D_2}$.

в) Сформулировать в терминах D_1 и D_2 условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}_{D_1} \oplus \boldsymbol{L}_{D_2}$.

8.4.20. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное числовое поле и

$$\boldsymbol{V} = \mathbb{F}^n, \quad \boldsymbol{U}_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0\},$$
$$\boldsymbol{U}_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 = \ldots = \alpha_n\}.$$

а) Доказать, что $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2$.

б) Для $\boldsymbol{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ найти векторы $\boldsymbol{u}_k \in \boldsymbol{U}_k$, $k = 1, 2$ такие, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$.

8.4.21. Доказать, что линейное пространство всех квадратных матриц порядка n над числовым полем $\mathbb{F}$ есть прямая сумма подпространств симметрических и кососимметрических матриц.

8.4.22. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство, $\boldsymbol{U}$ — его подпространство, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$. Множество векторов $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}\}$ называется *линейным многообразием* с *вектором сдвига* $\boldsymbol{a}$ и *направляющим подпространством* $\boldsymbol{U}$. Оно обозначается через $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$. *Размерностью* линейного многообразия $\boldsymbol{M}$ называется $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}$.

а) Доказать, что множество всех частных решений совместной неоднородной системы линейных уравнений ранга r с n неизвестными над полем $\mathbb{F}$ является линейным многообразием размерности $n - r$ в линейном пространстве $\mathbb{F}^n$.

б) Доказать, что для любого линейного многообразия $\boldsymbol{L}$ размерности d в линейном пространстве $\mathbb{F}^n$ существует система линейных уравнений ранга $n - d$ с n неизвестными над полем $\mathbb{F}$, множество всех частных решений которой совпадает с $\boldsymbol{L}$.

8.4.23. Пусть $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ — линейное многообразие с вектором сдвига $\boldsymbol{a}$ и направляющим подпространством $\boldsymbol{U}$. Доказать, что для любого $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{L}$ справедливо равенство $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{U}$.

8.4.24. Пусть $\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{U}_k$ $(k = 1, 2)$ — линейные многообразия. Доказать следующие утверждения:

а) $\boldsymbol{L}_1 \subseteq \boldsymbol{L}_2$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{U}_1 \subseteq \boldsymbol{U}_2$ и $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \in \boldsymbol{U}_2$;

б) $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \in \in \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2$ и при этом $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2)$ для любого $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2$;

в) многообразие $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{W}$, где $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \langle \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \rangle$, является наименьшим по включению линейным многообразием, содержащим многообразия $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$. Оно называется *композитом* этих многообразий.

8.4.25. Дано линейное многообразие $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{a} = (2, 3, -1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3, -1, 1, -1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$. Установить, принадлежат ли ему следующие векторы:
а) $\boldsymbol{u} = (1, 6, 4, 4, -2)$; б) $\boldsymbol{v} = (1, 6, 5, 4, -2)$; в) $\boldsymbol{w} = (2, 3, 4, 1, 5)$.

8.4.26. Задать приведенные ниже линейные многообразия системами линейных уравнений:
а) $\boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$, $\boldsymbol{a} = (2, 3, 1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1, -1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 0, 1, 0)$;
б) $\boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$, $\boldsymbol{a} = (5, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{c} = (1, 2, 1, 2)$, $\boldsymbol{d} = (2, 1, 2, 1)$;
в) $\boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$, $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1, 0, 2)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{d} = (1, 2, -1, -3, 0)$;
г) $\boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$, $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, 3, 2, 1)$, $\boldsymbol{c} = (2, 1, 3, 1, 2)$.

8.4.27. Пусть $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ — линейные многообразия и $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = = k$. Доказать, что если $\boldsymbol{W}$ содержит систему из $k+1$ векторов, принадлежащих $\boldsymbol{U}$, и ранг этой системы равен k, то $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{W}$. Рассмотреть отдельно случай $k = 1$.

8.4.28. Определить взаимное расположение линейных многообразий $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b} \rangle$ и $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{c} + \langle \boldsymbol{d} \rangle$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1, 3, -3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, 2, 1, 2)$, $\boldsymbol{d} = (1, 2, 1, 0, 1)$;

б) $\boldsymbol{a} = (3, 1, 2, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{c} = (2, 2, -1, -1, -2)$, $\boldsymbol{d} = (2, 1, 0, 1, 1)$;

в) $\boldsymbol{a} = (9, 3, 6, 15, -3)$, $\boldsymbol{b} = (7, -4, 11, 13, -5)$,

$\boldsymbol{c} = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $\boldsymbol{d} = (2, 9, -10, -6, 4)$;

г) $\boldsymbol{a} = (8, 2, 5, 15, -3)$, $\boldsymbol{b} = (7, -4, 11, 13, -5)$, $\boldsymbol{c} = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $\boldsymbol{d} = (2, 9, -10, -6, 4)$.

8.4.29. Определить взаимное расположение линейных многообразий $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b} \rangle$ и $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{c} + \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle$, где $\boldsymbol{c} = (1, 0, 0, 1)$, $\boldsymbol{d} = (5, 2, -3, 1)$, $\boldsymbol{e} = (-1, 2, -5, 3)$, а $\boldsymbol{L}$ определяется следующим образом:

а) $\boldsymbol{a} = (3, 1, -4, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 1, 2, 1)$;

б) $\boldsymbol{a} = (3, 0, -4, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 1, 2, 1)$;

в) $\boldsymbol{a} = (-2, 0, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, -2, 1)$.

8.4.30. Определить взаимное расположение линейных многообразий $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ и $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{d} + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \rangle$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{a} = (3, 1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, -6, 3, 1, -6)$, $\boldsymbol{c} = (0, 5, -2, -1, 6)$, $\boldsymbol{d} = (1, 0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{e} = (-1, 1, -1, 0, 1)$, $\boldsymbol{f} = (-1, 3, -1, -1, 2)$;

б) $\boldsymbol{a} = (7, -4, 0, 3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, -1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{d} = (6, -5, -1, 2, 3)$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, -1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f} = (1, 1, 1, -1, 1)$;

в) $\boldsymbol{a} = (2, -3, 1, 5, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, -2, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (-1, 5, -2, 0, 3)$, $\boldsymbol{d} = (0, -1, 0, 4, 1)$, $\boldsymbol{e} = (1, 2, 4, 0, -2)$, $\boldsymbol{f} = (6, 3, 4, 0, 3)$;

г) $\boldsymbol{a} = (-3,-2,1,-1,2)$, $\boldsymbol{b} = (1,-1,1,1,3)$, $\boldsymbol{c} = (-1,2,1,2,-2)$, $\boldsymbol{d} = (-1, 0, 3, 3, 8)$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, -3, -3, 1)$, $\boldsymbol{f} = (0, 1, 2, 3, 1)$;

д) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 0, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (5, -2, 6, 1, -4)$, $\boldsymbol{c} = (2, 1, 3, 0, 1)$, $\boldsymbol{d} = (1, 2, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{e} = (1, -4, 0, 1, -6)$, $\boldsymbol{f} = (-3, 3, -3, -1, 5)$;

е) $\boldsymbol{a} = (4, 1, 10, -3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 3, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, -4, 0, 1, -6)$, $\boldsymbol{d} = (-3, 2, 1, -4, 8)$, $\boldsymbol{e} = (3, -3, 3, 1, -5)$, $\boldsymbol{f} = (5, -2, 6, 1, -4)$.

8.4.31. Найти композит и пересечение линейных многообразий $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ и $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{d} + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{d} = (1, 3, 4, 5)$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f} = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{g} = (0, 1, 0, 0)$;

б) $\boldsymbol{a} = (-1, 2, -1, 2, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{d} = (1, 4, 2, 6, 3)$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f} = (0, 1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{g} = (1, 1, 2, 2, 2)$.

Глава 9

Линейные отображения и операторы

9.1. Определение линейного отображения. Матрица

9.1.1. Доказать, что отображение пространства $\boldsymbol{V}_\alpha$ всех векторов, компланарных данной плоскости α в себя, сопоставляющее каждому ненулевому вектору вектор, полученный из него поворотом против часовой стрелки на угол φ, а нулевому вектору — его самого, является линейным оператором. Найти матрицу этого оператора в ортонормированном базисе пространства $\boldsymbol{V}_\alpha$.

9.1.2. Доказать, что отображение пространства геометрических векторов $\boldsymbol{V}_g$ в себя, сопоставляющее каждому вектору его компоненту на ось вектора $\vec{e_1}$ параллельно плоскости векторов $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, является линейным оператором, и найти его матрицу в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

9.1.3. Доказать, что отображение пространства геометрических векторов $\boldsymbol{V}_g$ в себя, сопоставляющее каждому вектору его компоненту на плоскость векторов $\vec{e_1}$ и $\vec{e_3}$ параллельно вектору $\vec{e_2}$, является линейным оператором, и найти его матрицу в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

9.1.4. Даны плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$ и вектор $\vec{b}$. Доказать, что отображение пространства геометрических векторов $\boldsymbol{V}_g$ в линейное пространство $\boldsymbol{V}_\alpha$ всех векторов, компланарных α, сопоставляющее каждому вектору его компоненту на плоскость α параллельно вектору $\vec{b}$, является линейным отображением*, и найти его матрицу в базисах: $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ и $\vec{f_1} = C\vec{\imath} - A\vec{k}$, $\vec{f_2} = C\vec{\jmath} - B\vec{k}$, если:

а) α: $2x - 2y + z + 3 = 0$, $\vec{b} = (1, 2, 1)$;

б) α: $x + 3y - 2z + 4 = 0$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$;

в) α: $2x + y - 3z + 6 = 0$, $\vec{b} = (4, 2, -3)$;

г) α: $3x + 4y + 5z + 6 = 0$, $\vec{b} = (5, 4, -6)$.

9.1.5. Пусть даны плоскость α и вектор $\vec{a}$. Найти матрицу отображения проектирования пространства $\boldsymbol{V}_g$ на $\boldsymbol{V}_\alpha$ параллельно вектору $\vec{a}$ в исходном ортонормированном базисе, если:

а) α: $3x - y + 3z + 2 = 0$, $\vec{a} = (1, 2, -4)$;

б) α: $3x + y + 4z - 3 = 0$, $\vec{a} = (4, -3, 2)$;

в) α: $7x + 3y + 6z + 9 = 0$, $\vec{a} = (2, 5, -1)$;

г) α: $3x - 8y + 2z - 9 = 0$, $\vec{a} = (1, 8, 5)$.

9.1.6. Доказать, что отображение множества всех векторов пространства $\boldsymbol{V}_g$ в себя, сопоставляющее каждому вектору его компоненту на вектор $\vec{b}$ параллельно плоскости α, является линейным отображением, и найти его матрицу в базисах $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ и $\vec{b}$, если:

а) α: $x + 2y + 3z + 6 = 0$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$;

б) α: $3x - 2y + z + 3 = 0$, $\vec{b} = (1, 2, 2)$;

в) α: $-2x + 2y + z + 6 = 0$, $\vec{b} = (2, 2, -1)$;

---

*Такое отображение называется *отображением проектирования* пространства $\boldsymbol{V}_g$ на плоскость $\boldsymbol{V}_\alpha$. Аналогичное отображение пространства $\boldsymbol{V}_g$ в себя называется *оператором* проектирования.

г) α: $x - 2y + 4z + 6 = 0$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$.

9.1.7. Доказать, что оператор, сопоставляющий каждому вектору из пространства $\boldsymbol{V}_g$ симметричный ему вектор относительно фиксированной плоскости α, является линейным. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе, если уравнение плоскости α имеет вид:

а) $2x + 2y - z = 0$; б) $8x - 4y + z = 0$.

9.1.8. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $\boldsymbol{V}_g$, определенный равенством $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a})\vec{a}$, где $\vec{a}$ — фиксированный вектор и $(\vec{x}, \vec{a})$ — скалярное произведение, является линейным. Пусть $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

9.1.9. Определить, будет ли линейным оператор $\mathcal{A}$ на пространстве $\boldsymbol{V}_g$, определенный каждым из равенств:

а) $\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{a}, \vec{x})\vec{b}$; б) $\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{x}, \vec{a})\vec{x}$;

в) $\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{a}, \vec{x})\vec{b} + (\vec{b}, \vec{x})\vec{a} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{x}$,

где $\vec{a}, \vec{b}$ — фиксированные векторы, и в случае положительного ответа найти его матрицу в стандартном базисе.

9.1.10. Зафиксируем вектор $\vec{a}$ из линейного пространства геометрических векторов $\boldsymbol{V}_g$. Рассмотрим отображение $\mathcal{A}$, сопоставляющее каждому вектору $\vec{v}$ из $\boldsymbol{V}$ векторное произведение $[\vec{a}, \vec{v}]$. Убедиться, что это линейный оператор, и найти его матрицу в правом ортонормированном базисе, первый вектор которого есть орт вектора $\vec{a}$ в случае, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$.

9.1.11. Выяснить, какие из следующих отображений $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, действующих из пространства строк $\mathbb{R}^4$ в пространство $\mathbb{R}^3$ и заданных путем указания координат вектора $\mathcal{A}_i(x)$ как функций координат вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, будут линейными, и в случае линейности найти их матрицы в базисах из строк соответствующих единичных матриц:

а) $\mathcal{A}_1(x) = (x_2 + x_3 + x_4,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)$;

б) $\mathcal{A}_2(x) = (x_2 + 3,\, x_1 + x_3 + 1,\, 0)$;

в) $\mathcal{A}_3(x) = (x_2 + x_3,\, x_1 + x_3,\, x_2^2)$;

г) $\mathcal{A}_4(x) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\, 2x_1 + x_3 - x_4,\, 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)$.

9.1.12. Доказать, что умножения квадратных матриц порядка 2 над полем на данную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: а) слева, б) справа, в) слева и справа — являются линейными операторами пространства всех матриц порядка 2, и найти матрицы этих операторов в базисе, состоящем из матричных единиц

$$\boldsymbol{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.1.13. Для каждого из указанных ниже отображений пространства всех многочленов степени не выше n из кольца $\mathbb{R}[x]$ в себя установить, является ли оно линейным оператором, и в случае положительного ответа найти матрицу этого оператора в базисе $1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n$:

а) $\mathcal{A}(f(x)) = f(x+2)$; б) $\mathcal{A}(f(x)) = f'(x)$;

в) $\mathcal{A}(f(x))$ — остаток от деления $f(x^2)$ на x^{n+1};

г) $\mathcal{A}(f(x))$ — остаток от деления $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ на x^{n+1}.

9.1.14. Показать, что дифференцирование является линейным оператором линейного подпространства $\langle \sin x, \cos x\rangle$ пространства всех дифференцируемых функций, и найти его матрицу в базисе $\{\sin x, \cos x\}$.

9.1.15. Пусть линейное отображение $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ имеет матрицу $\boldsymbol{A}$ в базисах $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$ и $\mathbf{M}$ пространства $\boldsymbol{W}$. Как изменится матрица, если поменять местами два вектора: а) в базисе $\mathbf{N}$, б) в базисе $\mathbf{M}$?

9.1.16. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ переводит векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ в векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$,

$\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4$ соответственно. Найти его матрицу $\boldsymbol{A}_1$ в тех базисах, в которых даны координаты векторов, и матрицу $\boldsymbol{A}_2$ в базисах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ и $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -2, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$; $\boldsymbol{b}_1 = (9, -2, -11)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-3, -1, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-3, 3, 6)$, $\boldsymbol{b}_4 = (1, 2, 1)$; $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-1, -2, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_4 = (4, 1, -2, 1)$; $\boldsymbol{f}_1 = (1, -4, -2)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1, -2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (0, 0, 1)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 2, 1)$; $\boldsymbol{b}_1 = (-1, -5, -4)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 3, 3)$, $\boldsymbol{b}_3 = (0, -1, -1)$, $\boldsymbol{b}_4 = (-2, -6, -4)$; $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (2, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_4 = (-2, 0, 0, 1)$; $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1, 4)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1, -4)$, $\boldsymbol{f}_3 = (0, 0, 1)$.

9.1.17. Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ в векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ соответственно, и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 2)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 1, 2)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, -1, 1)$.

9.1.18. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ имеет матрицу A. Найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, если:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$;

б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_1 = (8, -6, 7)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-16, 7, -13)$, $\boldsymbol{e}_3 = (9, -3, 7)$; $\boldsymbol{f}_1 = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (3, -1, 2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (2, 1, 2)$.

9.1.19. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а линейный оператор $\mathcal{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (3, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4, 2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$.

9.1.20. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (-3, 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а линейный оператор $\mathcal{B}$ в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (6, -7)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-5, 6)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{AB}$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

9.1.21. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\boldsymbol{V} = \mathbb{F}[x]$ — линейное пространство всех многочленов над $\mathbb{F}$. Отображения $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ определены следующим образом: $\mathcal{A}f = f'$; $\mathcal{B}f = xf$.

а) Проверить, что оба отображения являются линейными операторами на пространстве $\boldsymbol{V}$.

б) Найти $\mathcal{AB} - \mathcal{BA}$, $\mathcal{AB}^2 - \mathcal{B}^2\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^2\mathcal{B} - \mathcal{BA}^2$.

9.1.22. Убедиться, что след (соответственно определитель) матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, т. е. является характеристикой самого оператора. Он называется *следом* (соответственно *определителем*) линейного оператора.

9.2. Образ и ядро линейного отображения

9.2.1. Пусть $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ — линейные пространства над данным полем $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{U}$ — подпространство $\boldsymbol{V}$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $\boldsymbol{U}$ было ядром некоторого линейного отображения из $\boldsymbol{V}$ в $\boldsymbol{W}$.

9.2.2. Найти возможные значения ранга и дефекта линейного функционала линейного пространства $\boldsymbol{V}$ размерности n над некоторым полем.

9.2.3. Найти образ и ядро линейного оператора, указанного в задаче 9.1.10.

9.2.4. Найти базисы образа и ядра, ранг и дефект для линейного отображения $\mathcal{A}$, заданного матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.2.5. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей n. Найти образ и ядро следующих линейных операторов на $\boldsymbol{V}$:

а) оператора дифференцирования $\mathcal{D}$;

б) для $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, разностного оператора $\mathcal{A}_h$, определяемого равенством $\mathcal{A}_h(f(x)) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$ для любого $f(x) \in \mathbb{R}$.

9.2.6. Найти базисы образа и ядра, ранг и дефект для линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

9.2.7. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы линейного пространства $\boldsymbol{V}$ такие, что $\mathsf{Ker}(\mathcal{A}) = \mathsf{Ker}(\mathcal{B})$, $\mathsf{Im}(\mathcal{A}) = \mathsf{Im}(\mathcal{B})$ и $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = \mathsf{r}(\mathcal{B}) = 1$. Доказать, что $\mathcal{B} = \alpha\mathcal{A}$ для некоторого скаляра α.

9.2.8. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ — линейное отображение, $\boldsymbol{U}$ — подпространство $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{Z}$ — подпространство $\boldsymbol{W}$. Положим $\mathcal{A}\boldsymbol{U} = \{\mathcal{A}\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\}$, $\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \mid \mathcal{A}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{Z}\}$.

Доказать следующие утверждения:

а) $\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{Z}$ является подпространством пространства $\boldsymbol{U}$ размерности $\mathsf{d}(\mathcal{A}) + \mathsf{dim}(\boldsymbol{Z} \cap \mathsf{Im}(\mathcal{A}))$;

б) $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} + \mathsf{Ker}(\mathcal{A})$;

в) если $\boldsymbol{U} \cap \mathsf{Ker}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{o}\}$, то $\boldsymbol{U}$ изоморфно $\mathcal{A}\boldsymbol{U}$.

9.2.9. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}$ — подпространство и $\boldsymbol{U} \cap \mathsf{Ker}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{o}\}$. Доказать, что образы векторов любой линейно независимой системы векторов из $\boldsymbol{V}$ при операторе $\mathcal{A}$ образуют линейно независимую систему.

9.2.10. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы линейного пространства $\boldsymbol{V}$, причем $\boldsymbol{V} = \mathsf{Im}(\mathcal{A}) \oplus \mathsf{Im}(\mathcal{B})$, $\boldsymbol{V} = \mathsf{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathsf{Ker}(\mathcal{B})$. Доказать, что $\mathsf{r}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \mathsf{r}(\mathcal{A}) + \mathsf{r}(\mathcal{B})$.

9.2.11. Доказать, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор ранга 1, то $\mathcal{A}^2 = \lambda\mathcal{A}$ для подходящего скаляра λ.

9.2.12. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{U} \longrightarrow \boldsymbol{V}$, $\mathcal{B} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ — линейные отображения и $\mathcal{A}\mathcal{B} : \boldsymbol{U} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ — их произведение. Доказать следующие утверждения:

а) $\mathsf{d}(\mathcal{A}) \le \mathsf{d}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \le \mathsf{d}(\mathcal{A}) + \mathsf{d}(\mathcal{B})$;

б) $\mathsf{r}(\mathcal{A}) + \mathsf{r}(\mathcal{B}) - \mathsf{dim}\boldsymbol{V} \le \mathsf{r}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \le \min\{\mathsf{r}(\mathcal{A}), \mathsf{r}(\mathcal{B})\}$.

Вывести из утверждения б) соответствующие неравенства для ранга произведения матриц.

9.2.13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется *нильпотентным*, если $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ для некоторого натурального числа m. Наименьшее число m с таким свойством называется *индексом* нильпотентности оператора $\mathcal{A}$. Доказать приведенные ниже утверждения для нильпотентного линейного оператора $\mathcal{A}$ индекса m линейного пространства $\boldsymbol{V}$ размерности n.

а) Если $\boldsymbol{U}$ — подпространство $\boldsymbol{V}$ такое, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}$, то $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{o}\}$.

б) $m \leq n$.

в) Для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ из условия $\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ следует, что векторы $\boldsymbol{v}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{v}$ линейно независимы.

г) Линейный оператор $\mathcal{E} - \mathcal{A}$ обратим. Выразить оператор $(\mathcal{E} - \mathcal{A})^{-1}$ через операторы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{A}$.

9.2.14. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Доказать, что линейный оператор $\mathcal{E} + \mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда существует такой линейный оператор $\mathcal{B}$, что $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{O}$.

9.2.15. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$ и $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = 1$. Доказать, что по крайней мере один из операторов $\mathcal{E} - \mathcal{A}$, $\mathcal{E} + \mathcal{A}$ обратим.

9.2.16. а) Показать, что оператор дифференцирования пространства многочленов степени не выше n над полем $\mathbb{R}$ необратим.

б) Показать, что оператор дифференцирования пространства функций $\langle \sin x, \cos x \rangle$ обратим, и найти обратный к нему оператор.

9.2.17. Определить, при каком условии на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейный оператор, указанный в п. в) задачи 9.1.9, является обратимым.

9.2.18. Доказать, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор пространства $\boldsymbol{V}$ такой, что $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, то $\boldsymbol{V} = \mathsf{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathsf{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$.

9.2.19. Доказать, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор пространства $\boldsymbol{V}$ такой, что $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$, то $\boldsymbol{V} = \mathsf{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{E}) \oplus \oplus \mathsf{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$.

9.2.20. Пусть линейное пространство $\boldsymbol{V}$ разлагается в прямую сумму подпространств $\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{U}_2$. Тогда для каждого элемента $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ существуют единственные элементы $\boldsymbol{u}_1 \in \boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U}_2$ такие, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$. Доказать приведенные ниже утверждения.

а) Оператор $\mathcal{P} : \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{u}_1$ является линейным. Он называется *оператором проектирования* на $\boldsymbol{U}_1$ параллельно $\boldsymbol{U}_2$.

б) Линейный оператор $\mathcal{P}$ будет оператором проектирования тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

в) Если $\mathcal{P}$ — оператор проектирования, то $\mathcal{E} - \mathcal{P}$ также оператор проектирования.

г) Если $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{E}$, $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{O}$, то $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ — операторы проектирования и $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = \mathcal{O}$.

д) Если $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ — перестановочные операторы проектирования, то $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ — оператор проектирования.

е) Оператор $\mathcal{R} : \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ является линейным. Он называется *оператором отражения* относительно $\boldsymbol{U}_1$ параллельно $\boldsymbol{U}_2$.

ж) Линейный оператор $\mathcal{R}$ будет оператором отражения тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}^2 = \mathcal{E}$.

9.3. Собственные векторы. Жорданово разложение

9.3.1. Пусть $\boldsymbol{v}$ — собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению λ, и $f(x)$ — произвольный многочлен. Доказать, что $\boldsymbol{v}$ будет собственным вектором оператора $f(\mathcal{A})$, принадлежащим собственному значению $f(\lambda)$.

9.3.2. Доказать, что все отличные от нулевого векторы линейного пространства будут собственными векторами линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{E}$ для некоторого скаляра α.

9.3.3. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства размерности n, имеющий n различных собственных значений. Доказать, что для любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$, каждый собственный вектор $\mathcal{A}$ будет собственным и для $\mathcal{B}$.

9.3.4. а) Доказать, что для любого идемпотентного линейного оператора (т. е. оператора проектирования, см. задачу 9.2.20) его ранг равен следу.

б) Доказать, что след любого нильпотентного линейного оператора равен нулю.

9.3.5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

9.3.6. Является ли линейный оператор, заданный приведенными ниже матрицами, оператором простой структуры? В случае положительного ответа найти базис пространства, состоящий из собственных векторов, и матрицу оператора в этом базисе:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

9.3.7. Доказать, что для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ простой структуры линейного пространства $\boldsymbol{V}$ имеет место разложение $\boldsymbol{V} = \mathsf{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathsf{Im}(\mathcal{A})$.

9.3.8. Доказать, что подпространство, порожденное любой системой собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, является инвариантным относительно $\mathcal{A}$.

9.3.9. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Показать, что подпространство, порожденное векторами $\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4$, является инвариантным относительно $\mathcal{A}$.

9.3.10. Найти все подпространства линейного пространства многочленов от одного неизвестного степени не выше n с действительными коэффициентами, инвариантные относительно линейного оператора дифференцирования.

9.3.11. Найти все подпространства 3-мерного пространства, инвариантные относительно линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9.3.12. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ n-мерного пространства $\boldsymbol{V}$ имеет в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ диагональную матрицу с различными числами на диагонали. Найти все подпространства пространства $\boldsymbol{V}$, инвариантные относительно $\mathcal{A}$, и определить их число.

9.3.13. Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные одновременно относительно двух линейных операторов, заданных матрицами

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.3.14. Охарактеризовать все линейные операторы конечномерного линейного пространства, относительно каждого из которых любое подпространство инвариантно.

9.3.15. Найти все подпространства, инвариантные относительно линейного оператора из задачи 9.1.10.

9.3.16. Найти все подпространства, инвариантные относительно каждого из следующих операторов, действующих в пространстве геометрических векторов $\boldsymbol{V}_g$:

а) оператор проектирования на плоскость α параллельно прямой l;

б) оператор отражения относительно плоскости α.

9.3.17. Охарактеризовать все подпространства, инвариантные относительно каждого из приведенных ниже операторов, действующих на произвольном пространстве (определение операторов проектирования и отражения см. соответственно в п. а) и е) задачи 9.2.20):

а) оператор проектирования на подпространство $\boldsymbol{U}$ параллельно подпространству $\boldsymbol{W}$;

б) оператор отражения относительно подпространства $\boldsymbol{U}$ параллельно подпространству $\boldsymbol{W}$;

в) линейный оператор простой структуры;

г) нильпотентный оператор.

9.3.18. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ над полем F, характеристический многочлен которого разлагается над F на линейные множители. Доказать, что любое инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство разлагается в прямую сумму своих пересечений с корневыми подпространствами оператора $\mathcal{A}$.

9.3.19. Найти собственные значения и корневые подпространства линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}$.

9.3.20. Для линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ указанными ниже матрицами $\boldsymbol{A}$, найти жорданов базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, а также матрицу $\mathcal{A}$ в этом базисе (жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$):

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

н) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

о) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

п) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -29 & 1 & -86 & -47 & 32 \\ -1 & 0 & 7 & -10 & 31 & 18 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & -19 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -13 & -8 & -30 & -16 & 15 \end{pmatrix}$;

$$\text{р)} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -12 & -27 & -7 & -207 & 154 \\ -1 & 0 & 3 & 7 & 2 & 60 & -43 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 15 \end{pmatrix}.$$

9.3.21. а) – г) Используя результаты, полученные при выполнении заданий а) – г) задачи 9.3.20, представить каждую из указанных там матриц в виде $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}$, где $\boldsymbol{J}$ – жорданова матрица, $\boldsymbol{T}$ – обратимая матрица, и с помощью этого представления найти формулы для элементов n-й степени исходной матрицы как функций от $n \in \mathbb{N}$.

д) – з) Выделить среди матриц, указанных в заданиях а) – г) задачи 9.3.20, обратимые матрицы и с помощью представления, найденного при выполнении заданий а) – г) настоящей задачи, найти формулы для элементов n-й степени матрицы, обратной к исходной матрице, как функций от $n \in \mathbb{N}$.

9.3.22. Для каждой из приведенных ниже матриц $\boldsymbol{A}$ вычислить $\boldsymbol{A}^n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$:
а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -13 & 24 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 42 & -60 \\ 30 & -43 \end{pmatrix}$.

9.3.23. Найти жорданову форму матриц, указанных в заданиях а) – м) задачи 9.3.20, без построения жорданова базиса (используя утверждение о связи числа клеток Жордана и рангов степеней оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$).

Глава 10

Многочленные матрицы

10.1. Каноническая форма

10.1.1. Привести к канонической форме с помощью элементарных преобразований многочленные матрицы:

а) $\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x+1 & x^2+2x+1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} x+1 & x^2+1 & x^2 \\ 3x-1 & 3x^2-1 & x^2+2x \\ x-1 & x^2-1 & x \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} x^2 & x^2-x & 3x^2 \\ x^2-x & 3x^2-x & x^3+4x^2-3x \\ x^2+x & x^2+x & 3x^2+3x \end{pmatrix}$.

10.1.2. Привести к канонической форме с помощью делителей миноров многочленные матрицы:

а) $\begin{pmatrix} x(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x(x-2) & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)(x-2) \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} x(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x(x-2) & 0 \\ 0 & 0 & x(x-3) \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} f_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_4(x) \end{pmatrix}$, где
$f_1(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$; $f_2(x) = (x-1)(x-2)(x-2)$; $f_3(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$; $f_4(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$;

г) $\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & g(x) \end{pmatrix}$, где $f(x)$, $g(x)$ — произвольные многочлены;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & f(x)g(x) \\ 0 & f(x)h(x) & 0 \\ g(x)h(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $f(x), g(x), h(x)$ – попарно взаимно простые многочлены, имеющие старшие коэффициенты 1.

10.1.3. Найти элементарные делители x-матриц:

а) $\begin{pmatrix} x^3+2 & x^3+1 \\ 2x^3-x^2-x+3 & 2x^3-x^2-x+2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} x^3-2x^2+2x-1 & x^2-2x+1 \\ 2x^3-2x^2+x-1 & 2x^2-2x \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} x^2+2 & 2x+1 & x^2+1 \\ x^2+4x+4 & 2x+3 & x^2+4x+3 \\ x^2-4x+3 & 2x-1 & x^2-4x+2 \end{pmatrix}$.

10.1.4. Найти каноническую форму квадратной многочленной матрицы, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n:

а) $x+1$, $x+1$, $(x+1)^2$, $x-1$, $(x-1)^2$, $r=4$, $n=5$;

б) $x+2$, $(x+2)^2$, $(x+2)^3$, $x-2$, $(x-2)^3$, $r=n=4$;

в) $x-1$, $x-1$, $(x-1)^3$, $x+2$, $(x+2)^2$, $r=4$, $n=5$.

10.1.5. Найти каноническую форму следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} x(x-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2(x+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x(x+1)^3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} x^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3-2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^3-4x \end{pmatrix}$.

10.2. Подобие матриц

10.2.1. Доказать, что отношение подобия матриц является отношением эквивалентности.

10.2.2. а) Доказать, что если по крайней мере одна из матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ невырожденна, то матрицы $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$ подобны.

б) Привести пример двух вырожденных матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, для которых матрицы $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$ не являются подобными.

10.2.3. Найти все матрицы, каждая из которых подобна только самой себе.

10.2.4. Пусть матрица $\boldsymbol{B}$ получается из матрицы $\boldsymbol{A}$ перестановкой i-й и j-й строк и перестановкой i-го и j-го столбцов. Доказать, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ подобны, и найти невырожденную матрицу $\boldsymbol{T}$, для которой $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$.

10.2.5. Доказать, что любая квадратная матрица подобна своей транспонированной матрице.

10.2.6. Выяснить, являются ли подобными матрицы:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$;

б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

10.3. Жорданова нормальная форма

10.3.1. Доказать, что коэффициенты характеристического многочлена $f(x) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n)$ матрицы $\boldsymbol{A}$ выражаются через элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ следующим образом: $f(x) = (-x)^n + c_1(-x)^{n-1} + c_2(-x)^{n-2} + \ldots + c_n$, где c_k есть сумма всех главных миноров порядка k матрицы $\boldsymbol{A}$.

10.3.2. Для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n с элементами в поле комплексных чисел ее *спектром* $\mathcal{S}(\boldsymbol{A})$ называется множество всех комплексных корней ее характеристического многочлена. Доказать приведенные ниже утверждения.

а) Сумма всех элементов спектра матрицы с учетом кратностей равна ее следу.

б) $0 \in \mathcal{S}(\boldsymbol{A})$ тогда и только тогда, когда матрица $\boldsymbol{A}$ вырожденная.

в) Если матрица $\boldsymbol{A}$ обратима, то

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{A}^{-1}) = \{\xi^{-1} \mid \xi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{A})\}.$$

г) $\mathcal{S}(\boldsymbol{A}^m) = \{\xi^m \mid \xi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{A})\}$.

10.3.3. Написать жорданову нормальную форму матрицы $\boldsymbol{A}$ по системе инвариантных множителей $e_k(x)$ ее характеристической матрицы $\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}$:

а) $e_1(x) = e_2(x) = 1$, $e_3(x) = e_4(x) = x-1$, $e_5(x) = e_6(x) = (x-1)(x-2)$;

б) $e_1(x) = e_2(x) = e_3(x) = 1$, $e_4(x) = x+1$, $e_5(x) = (x+1)^2$, $e_6(x) = (x+1)^2(x-5)$;

в) $e_1(x) = e_2(x) = 1$, $e_3(x) = x-2$, $e_4(x) = (x^2-4)(x+3)$.

10.3.4. Найти жорданову форму следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

10.3.5. Доказать, что для любой квадратной многочленной матрицы $\boldsymbol{A}(x)$ порядка n над полем $\mathbb{C}$, для которой $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}(x))$ имеет степень n, существует постоянная матрица $\boldsymbol{B}$ такая, что $(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{E}) \sim \boldsymbol{A}(x)$.

10.3.6. Доказать, что минимальный многочлен постоянной матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n равен последнему инвариантному множителю $e_n(x)$ ее характеристической матрицы $\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n$.

10.3.7. Доказать, что некоторая степень минимального многочлена постоянной матрицы $\boldsymbol{A}$ делится на ее характеристический многочлен.

10.3.8. Выяснить, для каких матриц минимальный многочлен имеет вид $x - \alpha$.

10.3.9. Найти жорданову нормальную форму идемпотентной постоянной матрицы $\boldsymbol{A}$ (т. е. такой, что $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$).

10.3.10. Найти жорданову нормальную форму постоянной матрицы $\boldsymbol{A}$ с комплексными элементами, удовлетворяющей условию $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A}^{m+k}$ для некоторых натуральных чисел m, k.

Глава 11

Линейные пространства со скалярным произведением

Во всех вычислительных задачах этой главы координаты векторов предполагаются заданными в некотором ортонормированном базисе.

11.1. Ортогональность

11.1.1. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формулам:

а) $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_2y_2$;

б) $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2$;

в) $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$.

11.1.2. Выяснить, можно ли в линейном пространстве квадратных матриц порядка 3 над полем $\mathbb{R}$ ввести скалярное произведение матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ по формуле $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{33}b_{33}$.

11.1.3. В каждом из приведенных ниже случаев для векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ унитарного пространства найти $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$:

а) $\boldsymbol{x} = (1, i, 2, i)$; $\boldsymbol{y} = (1 - i, 1 + i, 2i, 3)$;

б) $\boldsymbol{x} = (1 + i, -i, 3, 2 - i)$; $\boldsymbol{y} = (1 - 2i, 2 + i, i, 4)$.

11.1.4. Доказать, что векторы приведенных ниже систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

а) $(1, -2, 2, -3)$, $(2, -3, 2, 4)$;

б) $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 2, 3, -3)$;

в) $(1, -2, 1, 3)$, $(2, 1, -3, 1)$;

г) $(1, -1, 1, -3)$, $(-4, 1, 5, 0)$.

11.1.5. Найти векторы, дополняющие приведенные ниже системы векторов до ортонормированных базисов:

а) $\frac{1}{3}(2, 1, 2)$, $\frac{1}{3}(1, 2, -2)$;

б) $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$;

в) $\frac{1}{15}(-11, -2, 10)$, $\frac{1}{15}(-2, -14, -5)$;

г) $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$, $\frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)$.

11.1.6. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейного подпространства, порожденного приведенными ниже системами векторов:

а) $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$;

б) $(1, 1, -1, -2)$, $(5, 8, -2, -3)$, $(3, 9, 3, 8)$;

в) $(2, 1, 3, -1)$, $(7, 4, 3, -3)$, $(1, 1, -6, 0)$, $(5, 7, 7, 8)$;

г) $(2, 3, -4, -6)$, $(1, 8, -2, -16)$, $(12, 5, -14, 5)$, $(3, 11, 4, -7)$;

д) $(1, 1, -1, -2)$, $(-2, 1, 5, 11)$, $(0, 3, 3, 7)$, $(3, -3, -3, -9)$.

11.1.7. Пусть $\boldsymbol{V}_n$ — линейное пространство многочленов из $\mathbb{R}[x]$ степени, не превосходящей n, в котором произвольным образом введено скалярное произведение. Доказать, что справедливы следующие утверждения:

а) в $\boldsymbol{V}_n$ существует ортогональный базис, содержащий по одному многочлену каждой степени k, $0 \le k \le n$;

б) если $f_0, f_1, \ldots, f_n$ и $g_0, g_1, \ldots, g_n$ — два ортогональных базиса $\boldsymbol{V}_n$, обладающих указанным в п. а) свойством, то существует такая перестановка σ чисел $0, 1, \ldots, n$, что многочлен f_k ассоциирован с $g_{\sigma(k)}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$.

11.1.8. В пространстве $\boldsymbol{V}_n$ из задачи 11.1.7 определить скалярное произведение так, чтобы базис $1, x, \dfrac{x^2}{2!}, \ldots, \dfrac{x^n}{n!}$ стал ортонормированным.

11.1.9. Найти базис ортогонального дополнения подпространства, порожденного векторами:

а) $(1, 0, 2, 1)$, $(2, 1, 2, 3)$, $(0, 1, -2, 1)$;

б) $(1, 1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1, 1)$, $(2, 0, 2, 0)$.

11.1.10. Найти систему линейных уравнений, задающую ортогональное дополнение к пространству решений приведенных ниже систем линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0. \end{cases}$

11.1.11. Пусть $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица порядка n над полем $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}$ — столбец из n неизвестных, $\boldsymbol{b}$ — произвольный, $\boldsymbol{o}$ — нулевой столбец с n элементами. Рассмотрим системы линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ (1), \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \ (2), \ \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \ (3).$$

Доказать альтернативу Фредгольма: либо система (2) имеет единственное (нулевое) решение, и в этом случае система (1) имеет единственное решение при любом столбце $\boldsymbol{b}$, либо система (2) имеет ненулевое решение, и в этом случае система (1) совместна тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{U}^{\perp}$, где $\boldsymbol{U}$ — пространство решений системы (3), при каждом таком $\boldsymbol{b}$ система (1) имеет бесконечно много решений.

11.1.12. Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}[x]$ произвольным образом определено скалярное произведение.

а) Доказать, что если $\boldsymbol{U}$ — конечномерное подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^{\perp}$.

б) Указать пример подпространства $\boldsymbol{U}$, отличного от $\boldsymbol{V}$ и такого, что $\boldsymbol{U}^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$.

11.1.13. Пусть $\boldsymbol{V}$ — конечномерное линейное пространство со скалярным произведением, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ — его подпространства. Доказать, что: а) $(\boldsymbol{U}^{\perp})^{\perp} = \boldsymbol{U}$;
б) $(\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2)^{\perp} = \boldsymbol{U}_1^{\perp} \cap \boldsymbol{U}_2)^{\perp}$; в) $(\boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2)^{\perp} = \boldsymbol{U}_1^{\perp} + \boldsymbol{U}_2)^{\perp}$.

11.1.14. Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ и ортогональную составляющую $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на линейное подпространство $\boldsymbol{U}$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{x} = (4, -1, -3, 4)$, $\boldsymbol{U} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$,
$\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 2, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0, 3)$;

б) $\boldsymbol{x} = (5, 2, -2, 2)$, $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$,
$\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 3, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 8, 1)$;

в) $\boldsymbol{x} = (14, -3, -6, -7)$, $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$,
$\boldsymbol{a}_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 4, 3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 2, -2, -2)$;

г) $\boldsymbol{x} = (2, -5, 3, 4)$, $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$,
$\boldsymbol{a}_1 = (1, 3, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3, -5, -3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, -5, 3, -3)$;

д) $\boldsymbol{x} = (7, -4, -1, 2)$, $\boldsymbol{U}$ задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0; \end{cases}$$

е) $\boldsymbol{x} = (-3, 0, -5, 9)$, $\boldsymbol{U}$ задано системой уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

11.1.15. Пусть процесс ортогонализации переводит векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ соответственно.

Доказать следующие утверждения:

а) вектор $\boldsymbol{b}_k$ есть ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{a}_k$ относительно линейного подпространства $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle$ при $1 < k \leq n$;

б) для всех $1 \leq k \leq n$ имеет место $0 \leq |\boldsymbol{b}_k| \leq |\boldsymbol{a}_k|$;

в) $|\boldsymbol{b}_k| = 0$ тогда и только тогда, тогда $\boldsymbol{a}_k$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$;

г) $|\boldsymbol{b}_k| = |\boldsymbol{a}_k|$ тогда и только тогда, когда $k = 1$ или $k > 1$ и $(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_l) = 0$ при всех $l = 1, \ldots, k-1$.

11.1.16. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство со скалярным произведением и $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \boldsymbol{V}$. *Определителем Грама* этой системы называется

$$g(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{vmatrix}.$$

Доказать, что определитель Грама не изменится, если к системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ применить процесс ортогонализации.

11.1.17. Доказать, что для любой системы векторов ее определитель Грама равен нулю, если она линейно зависима, и равен положительному действительному числу в противном случае.

11.1.18. Определим *объем* n-мерного параллелепипеда, построенного на линейно независимой системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_n$, по индукции, полагая $V(\boldsymbol{a}_1) = |\boldsymbol{a}_1|$ и

$$V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}) \cdot h_n,$$

где h_n — длина ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{a}_n$ относительно линейного подпространства $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1} \rangle$.

Доказать следующие утверждения:

а) $V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \sqrt{g(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)}$;

б) $V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = |d|$, где d — значение определителя из координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в каком-либо ортонормированном базисе рассматриваемого линейного пространства.

11.1.19. Определим в пространстве со скалярным произведением *расстояние* между векторами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, полагая $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Для линейного многообразия $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ положим $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{L}) = \inf\{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}\}$. Для линейных многообразий $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ положим $d(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}) = \inf\{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{M}\}$.

а) Доказать, что $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{L}) = |\boldsymbol{z}|$, где $\boldsymbol{z}$ — ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ относительно $\boldsymbol{U}$.

б) Доказать, что $d(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}) = |\boldsymbol{z}|$, где $\boldsymbol{z}$ — ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ относительно $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$.

11.1.20. Найти расстояние от вектора $\boldsymbol{x}$ до линейного многообразия, заданного системой уравнений:

а) $\boldsymbol{x} = (4, 2, -5, 1)$, $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12; \end{cases}$

б) $\boldsymbol{x} = (2, 4, -4, 2)$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

11.1.21. Найти расстояние между линейными многообразиями $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ и $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{d} + \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \rangle$, если:

а) $\boldsymbol{a} = (4, 5, 3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, 2, 2)$, $\boldsymbol{c} = (2, -2, 1, 2)$, $\boldsymbol{d} = (1, -2, 1, -3)$, $\boldsymbol{e} = (2, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{f} = (1, -2, 0, -1)$;

б) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, -1, -1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{d} = (3, -1, 0, 5)$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f} = (0, 1, 0, 1)$.

11.1.22. Найти угол между вектором $\boldsymbol{x}$ и линейным подпространством, порожденным векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$:

а) $\boldsymbol{x} = (2, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_1 = (3, 4, -4, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, -1, 2)$;

б) $\boldsymbol{x} = (1, 0, 3, 0)$, $\boldsymbol{a}_1 = (5, 3, 4, -3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 4, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, -1, 1, 2)$.

По аналогии с трехмерным пространством векторов в произвольном евклидовом пространстве для двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ рассматривается как *треугольник, порожденный векторами* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

11.1.23. В треугольнике, порожденном векторами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, найти длины сторон $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ и углы между ними. Выяснить, какие из углов естественно считать внутренними:

а) $\boldsymbol{x}=(2,-1,3,-2)$, $\boldsymbol{y}=(3,1,5,1)$;

б) $\boldsymbol{x}=(4,0,2,0,4)$, $\boldsymbol{y}=(3,3,3,3,0)$.

11.2. Сопряженное отображение. Нормальные операторы

11.2.1. Пусть линейное отображение $\mathcal{A}$ пространства $\boldsymbol{V}$ в пространство $\boldsymbol{W}$ в базисах $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\ldots,\boldsymbol{f}_k$ имеет матрицу $\boldsymbol{A}$. Найти матрицу $\boldsymbol{A}^*$ сопряженного отображения $\mathcal{A}^*$ в базисах $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\ldots,\boldsymbol{f}_k$ и $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$:

а) $\boldsymbol{e}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1,0,1)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,1,1)$, $\boldsymbol{f}_1=(1,2)$, $\boldsymbol{f}_2=(0,1)$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$;

б) $\boldsymbol{e}_1=(1,2)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$, $\boldsymbol{f}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{f}_2=(1,0,1)$, $\boldsymbol{f}_3=(0,1,1)$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

11.2.2. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства $\boldsymbol{V}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ имеет матрицу $\boldsymbol{A}$. Найти матрицу $\boldsymbol{A}^*$ сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в том же базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$:

а) $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(1,1)$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$;

б) $\boldsymbol{e}_1=(1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1,1,2)$, $\boldsymbol{e}_3=(1,1,0)$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&5&-1\\2&7&-3\end{pmatrix};$$

в) $\boldsymbol{e}_1 = (1, -1, -1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$,
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
г) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, -1, -1)$,
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

11.2.3. Пусть $\boldsymbol{G}$ — матрица Грама некоторого базиса евклидова пространства и $\boldsymbol{A}$ — матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Найти матрицу $\boldsymbol{A}^*$ сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в том же базисе:

а) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

11.2.4. Пусть Oxy — прямоугольная декартова система координат на плоскости и $\mathcal{A}$ — линейный оператор проектирования всех векторов плоскости на ось Ox параллельно биссектрисе первой и третьей четверти. Найти сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$.

11.2.5. Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство со скалярным произведением, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$ и $\mathcal{P}$ — оператор проектирования на $\boldsymbol{U}$ параллельно $\boldsymbol{W}$, определенный в задаче 9.2.20.

Доказать, что $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^\perp \oplus \boldsymbol{W}^\perp$ и $\mathcal{P}^*$ — оператор проектирования на $\boldsymbol{W}^\perp$ параллельно $\boldsymbol{U}^\perp$.

11.2.6. В линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ всех многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2 задано скалярное произведение $(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ для многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Найти матрицы оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ и сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$ в каждом из следующих базисов:

а) $1, x, x^2$; б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,\ x^2 - 1,\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; в) $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

11.2.7. В линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ всех многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2 задано скалярное произведение: для многочленов $f(x)$, $g(x)$

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Найти матрицу оператора, сопряженного к оператору дифференцирования, в каждом из следующих базисов:

а) $1, x, x^2$; б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,\ x^2 - 1,\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; в) $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

11.2.8. В линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ всех многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2 задано скалярное произведение: $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ для многочленов $f(x)$, $g(x)$. Найти матрицу оператора, сопряженного к оператору дифференцирования, в каждом из следующих базисов:

а) $1, x, x^2$; б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,\ x^2 - 1,\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; в) $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

11.2.9. Доказать, что любой линейный оператор $\mathcal{A}$ унитарного пространства размерности n имеет инвариантные подпространства $\boldsymbol{U}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ такие, что $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}_k = k$.

11.2.10. Доказать, что для любого линейного оператора унитарного пространства существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора является треугольной.

11.2.11. Доказать, что коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ унитарного пространства являются комплексно сопряженными к соответствующим коэффициентам характеристического многочлена сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.

11.2.12. Убедиться, что линейный оператор, заданный в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей $\boldsymbol{A}$, является нормальным, и найти для него собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов:

а) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}$; г) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11.2.13. Для каждого нормального линейного оператора, заданного в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей $\boldsymbol{A}$ из п. б), г) задачи 11.2.12, найти канонический ортонормированный базис и матрицу оператора в этом базисе.

11.2.14. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением. Доказать, что $\mathcal{A}$ будет нормальным оператором тогда и только тогда, когда $|\mathcal{A}^*\boldsymbol{v}| = |\mathcal{A}\boldsymbol{v}|$ для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.

11.2.15. Доказать, что собственные векторы нормального оператора, принадлежащие двум различным собственным значениям, ортогональны.

11.2.16. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением. Доказать, что если $\boldsymbol{U}$ — инвариантное относительно $\mathcal{A}$ линейное подпространство в $\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{U}^{\perp}$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

11.2.17. а) Доказать, что если линейный оператор $\mathcal{A}$ унитарного пространства обладает тем свойством, что для любого инвариантного относительно $\mathcal{A}$ подпространства $\boldsymbol{U}$ его ортогональное дополнение $\boldsymbol{U}^{\perp}$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ — нормальный оператор.

б) Выяснить, верно ли утверждение, аналогичное сформулированному в п. а), для евклидова пространства.

11.2.18. Доказать, что для любого нормального линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства $\mathsf{Im}(\mathcal{A})^{\perp} = \mathsf{Ker}(\mathcal{A})$.

11.2.19. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный линейный оператор конечномерного унитарного пространства $\boldsymbol{V}$, $k \in \mathbb{N}$.

а) Доказать, что существует такой нормальный линейный оператор $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B}^k = \mathcal{A}$.

б) Найти число различных нормальных линейных операторов, удовлетворяющих условию п. а).

11.2.20. Доказать, что для любого нормального оператора евклидова пространства в этом пространстве есть одномерное или двумерное инвариантное подпространство относительно этого оператора.

11.3. Изометрические операторы

11.3.1. Доказать, что произведение двух изометрических операторов будет изометрическим оператором.

11.3.2. Доказать, что если линейный оператор линейного пространства со скалярным произведением сохраняет длины всех векторов, то он является изометрическим.

11.3.3. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением такой, что $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{u}, \mathcal{A}\boldsymbol{v})$ для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Доказать, что $\mathcal{A}$ является линейным (и, следовательно, изометрическим) оператором пространства $\boldsymbol{V}$.

11.3.4. Доказать, что если два вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением имеют одинаковую длину, то существует изометрический оператор на $\boldsymbol{V}$, переводящий $\boldsymbol{u}$ в $\boldsymbol{v}$.

11.3.5. Пусть даны системы векторов $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ и $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением. Доказать утверждение: для того чтобы существовал изометрический линейный оператор $\mathcal{A}$ на $\boldsymbol{V}$ такой, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u}_l = \boldsymbol{v}_l$ при $l = 1, 2, \ldots, k$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама двух данных систем совпадали.

11.3.6. Доказать, что два перестановочных унитарных линейных оператора унитарного линейного пространства имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

11.3.7. Доказать, что для любых двух ортонормированных систем векторов пространства со скалярным произведением, состоящих из одного и того же числа векторов, существует унитарный линейный оператор, переводящий первую систему во вторую.

11.3.8. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением такой, что если $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, то $\mathcal{A}\boldsymbol{u} \perp \mathcal{A}\boldsymbol{v}$ для всех $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Доказать, что $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{B}$ для некоторого изометрического оператора $\mathcal{B}$ и скаляра $\alpha \in \mathbb{C}$.

11.3.9. Доказать следующие утверждения для унитарного оператора $\mathcal{A}$ унитарного линейного пространства:

а) модуль любого собственного значения равен 1;

б) если в некотором базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\boldsymbol{A}$ с действительными элементами и собственный вектор, принадлежащий комплексному собственному значению $\alpha+ +\beta i$ $(\beta \neq 0)$, представлен в виде $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$, где векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ имеют действительные координаты, то $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v}$; $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = = \beta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$.

11.3.10. Для ортогонального оператора $\mathcal{A}$, заданного в ортонормированном базисе матрицей $\boldsymbol{A}$, найти ортонормированный базис, в котором матрица $\boldsymbol{A}'$ этого оператора имеет канонический вид, и найти этот канонический вид:

а) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11.3.11. Выяснить, являются ли унитарными линейные операторы, имеющие в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицы:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

11.3.12. Выяснить, может ли унитарный оператор в некотором базисе иметь матрицу, не являющуюся унитарной.

11.3.13. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов унитарных операторов, имеющих в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ матрицы:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$; б) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

11.3.14. Для данной унитарной матрицы $\boldsymbol{A}$:

а) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$

найти диагональную матрицу $\boldsymbol{B}$ и унитарную матрицу $\boldsymbol{Q}$ такие, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

11.4. Самосопряженные операторы

11.4.1. Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для самосопряженного линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\boldsymbol{A}$:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.4.2. В каждом из приведенных ниже случаев для матрицы $\boldsymbol{A}$ найти $\boldsymbol{A}^{100}$, $\sqrt{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{A}^{-50}$:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

11.4.3. Доказать следующие утверждения:

а) линейная комбинация с действительными коэффициентами самосопряженных операторов (в частности, сумма двух самосопряженных операторов) есть самосопряженный оператор;

б) произведение самосопряженных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ есть самосопряженный оператор тогда и только тогда, когда $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$;

в) оператор, обратный к обратимому самосопряженному оператору, также является самосопряженным;

г) если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — самосопряженные операторы, то операторы $\mathcal{AB} + \mathcal{BA}$ и $i(\mathcal{AB} - \mathcal{BA})$ также будут самосопряженными.

11.4.4. Доказать, что отражение $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением относительно подпространства $\boldsymbol{U}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{U}_2$ (определение см. в п. е) задачи 9.2.20) будет самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{U}_1 \perp \boldsymbol{U}_2$.

11.4.5. Доказать, что проектирование $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением на подпространство $\boldsymbol{U}_1$ параллельно подпространству $\boldsymbol{U}_2$ (определение см. в п. а) задачи 9.2.20) будет самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{U}_1 \perp \boldsymbol{U}_2$.

11.4.6. а) Доказать, что если линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением обладает любыми двумя из следующих трех свойств:

1) $\mathcal{A}$ самосопряженный; 2) $\mathcal{A}$ изометрический; 3) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$, то он обладает и третьим свойством.

б) Найти все типы линейных операторов, обладающих свойствами 1–3, указанными в п. а).

11.4.7. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — самосопряженные линейные операторы унитарного пространства $\boldsymbol{V}$ и $(\mathcal{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\mathcal{B}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Доказать, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

11.4.8. Для данной эрмитовой матрицы $\boldsymbol{A}$ найти диагональную матрицу $\boldsymbol{B}$ и унитарную матрицу $\boldsymbol{C}$ такие, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1} A \boldsymbol{C}$:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$.

11.4.9. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный линейный оператор унитарного пространства. Доказать, что:

а) оператор $\mathcal{A} - i\mathcal{E}$ обратим;

б) оператор $(\mathcal{A} - i\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{A} + i\mathcal{E})$ является унитарным.

11.4.10. Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением называется *положительно* [*неотрицательно*] *определенным*, если

$(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ $[(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0]$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$.

а) Доказать, что самосопряженный линейный оператор будет положительно [неотрицательно] определенным тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны [неотрицательны].

б) Доказать, что если для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ выполняется $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ $[(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0]$, то все собственные значения $\mathcal{A}$ положительны [неотрицательны].

в) Привести пример, показывающий, что для несамосопряженного оператора утверждение, обратное к сформулированному в п. б), в общем случае неверно.

11.4.11. Приведенные ниже матрицы представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными собственными числами и ортогональной матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

11.4.12. Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ со скалярным произведением называется *кососимметрическим*, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Доказать, что оператор будет кососимметрическим тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе его матрица $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет условию $\overline{\boldsymbol{A}^\top} = -\boldsymbol{A}$.

11.4.13. Доказать следующие утверждения для кососимметрического оператора $\mathcal{A}$ унитарного линейного пространства:

а) любое собственное значение равно βi, где $\beta \in \mathbb{R}$;

б) если в некотором базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\boldsymbol{A}$ с действительными элементами и собственный вектор, принадлежащий комплексному собственному значению βi $(\beta \neq 0)$, представлен в виде $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$, где векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ имеют действительные координаты, то $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = -\beta\boldsymbol{v}$; $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = = \beta\boldsymbol{u}$.

11.4.14. Доказать, что линейный оператор $\mathcal{A}$ унитарного пространства $\boldsymbol{V}$ будет самосопряженным тогда и только тогда, когда оператор $i\mathcal{A}$ кососимметрический.

Глава 12

Квадратичные формы и квадрики

12.1. Билинейные и квадратичные формы

12.1.1. Доказать, что ненулевая билинейная форма тогда и только тогда распадается в произведение двух линейных форм, когда ее ранг равен 1.

12.1.2. *Левым ядром* билинейной функции $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, заданной на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$, называется множество

$$L_b = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \mid \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V} \;\; b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Аналогично определяется *правое ядро* R_b билинейной функции $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. *Рангом* билинейной функции называется ранг ее матрицы в некотором базисе. Доказать следующие утверждения:

а) L_b и R_b — линейные подпространства;

б) если $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} = n$, то $\mathsf{dim} L_b = \mathsf{dim} R_b = n - r$, где r — ранг билинейной функции.

12.1.3. Найти базисы левого и правого ядер L и R для билинейной формы $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$ и убедиться, что левое ядро не совпадает с правым.

12.1.4. Найти нормальный вид над полями действительных и комплексных чисел для следующих квадратичных форм:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

г) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

д) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

12.1.5. Найти нормальный вид над полем действительных чисел, а также невырожденную замену переменных, приводящую к этому виду, для следующих квадратичных форм:

а) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

б) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

в) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

г) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;

д) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$;

е) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

ж) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$;

з) $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_ix_j$;

и) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_ix_j$.

12.1.6. Указанные ниже квадратичные формы привести к каноническому виду с целыми коэффициентами с помощью невырожденной замены переменных с рациональными коэффициентами и найти выражение новых неизвестных через старые:

а) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

б) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;
в) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$.

12.1.7. Найти невырожденную замену переменных с ортогональной матрицей, приводящую данную квадратичную форму к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид:

а) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
б) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;
в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
д) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 10x_3x_4$;
е) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$;
ж) $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} x_ix_j$;
з) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \le i < j \le n} x_ix_j$.

12.1.8. Выяснить, какие из приведенных ниже квадратичных форм эквивалентны между собой над полем действительных чисел:

а) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$, $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;
б) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$;
$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$;
$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

12.1.9. Пусть бинарное отношение $\sim$ на множестве квадратичных форм от n переменных над любым полем определено следующим образом: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда от f к g можно перейти с помощью невырожденной замены переменных. Доказать, что это отношение является отношением эквивалентности, и найти число его классов эквивалентности для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

12.1.10. Доказать, что квадратичная форма f тогда и только тогда является положительно определенной, когда ее матрица представляется в виде $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}$ — невырожденная действительная матрица.

12.1.11. Найти все значения параметра α, при которых положительно определенны приведенные ниже квадратичные формы:

а) $5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 2x_1x_3$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

д) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

12.1.12. Выяснить, какая из квадратичных форм f, g является положительно определенной; найти невырожденную замену переменных, приводящую эту форму к нормальному, а другую форму той же пары — к каноническому виду:

а) $f = -4x_1x_2$, $g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$;

б) $f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$, $g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$;

в) $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$, $g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$;

г) $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$, $g = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2^2 + 2x_2x_4$;

д) $f = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$, $g = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$;

е) $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$, $g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

12.1.13. Для пары квадратичных форм с матрицами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ уравнение $\mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{B}) = 0$ назовем *x-уравнением.* Пусть дана пара квадратичных форм f, g от одних и тех же переменных, причем форма g положительно определенная. Доказать, что при любой невырожденной замене переменных, приводящей форму g к нормальному виду, форма f приводится к каноническому виду $\alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \ldots + \alpha_nx_n^2$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все корни x-уравнения пары квадратичных форм f, g с учетом кратности, т. е. этот канонический вид определяется однозначно с точностью до перестановки переменных.

12.1.14. Определить, можно ли указанные ниже пары квадратичных форм привести к каноническому виду одной невырожденной заменой переменных над полем $\mathbb{R}$:

а) $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2,\ \ g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $f = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2,\ \ g = x_1^2 - 2x_1x_2$.

12.1.15. Пусть f_1, g_1 и f_2, g_2 — две пары квадратичных форм, где g_1, g_2 — положительно определенные формы. Доказать, что невырожденная замена переменных, переводящая f_1 в f_2 и g_1 в g_2, существует тогда и только тогда, когда корни их x-уравнений (определение см. в задаче 12.1.13) совпадают. В этом случае пары форм f_1, g_1 и f_2, g_2 называются *эквивалентными*.

12.1.16. Выяснить, эквивалентны ли приведенные ниже пары квадратичных форм:

а) $f_1 = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,
$g_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$,
$f_2 = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
$g_2 = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

б) $f_1 = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 21x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 22x_2x_3$,
$g_1 = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$,
$f_2 = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3$,
$g_2 = 9x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

12.2. Квадрики на плоскости

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

12.2.1. Найти полуоси, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36$;   б) $25x^2 + 9y^2 = 225$.

12.2.2. Составить уравнение эллипса, описанного около равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ и совпадают с вершинами эллипса, принадлежащими одной оси.

12.2.3. Эксцентриситет эллипса равен $1/2$, центр совпадает с началом координат, одна из директрис определяется уравнением $x - 16 = 0$. Вычислить расстояние от точки эллипса с абсциссой, равной -4, до фокуса, соответствующего данной директрисе.

12.2.4. Эксцентриситет эллипса равен $1/3$, центр совпадает с началом координат, один из фокусов имеет координаты $(-2, 0)$. Вычислить расстояние от точки эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, соответствующей данному фокусу.

12.2.5. Найти эксцентриситет эллипса, если:

а) малая ось эллипса видна из фокуса под углом $90°$;

б) отрезок между фокусами виден из вершин эллипса, расположенных на оси ординат, под углом $120°$;

в) расстояние между директрисами в 3 раза больше расстояния между фокусами;

г) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на директрису, делится вершиной пополам;

д) расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

12.2.6. Определить, как расположена прямая относительно эллипса $9x^2 + 4y^2 = 36$ (пересекает эллипс, касается его, проходит вне эллипса):

а) $2x + 3y - 6 = 0$; б)$x - y + \sqrt{13} = 0$; в) $x + y - 4 = 0$.

12.2.7. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$:

а) параллельных прямой $x - y + 10 = 0$;

б) перпендикулярных прямой $2x - 2y - 13 = 0$;

в) проходящих через точку $M(4, -1)$.

12.2.8. Составить уравнение эллипса, если известны:

а) эксцентриситет, равный $\sqrt{5}/3$, фокус $(0, \sqrt{5})$ и уравнение ближайшей к нему директрисы $y = 9\sqrt{5}/5$;

б) эксцентриситет, равный $1/2$, фокус $(0, 1)$ и уравнение ближайшей к нему директрисы $x + 2y - 1 = 0$.

12.2.9. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис гиперболы:
а) $x^2 - 4y^2 = 20$; б) $16x^2 - 9y^2 = -144$.

12.2.10. Составить каноническое уравнение гиперболы, если даны:

а) точки $M_1(6, -2)$ и $M_2(-8, \sqrt{11})$, принадлежащие гиперболе;

б) точка $M(-5, 3)$, принадлежащая гиперболе, и эксцентриситет $\sqrt{2}$;

в) точка $M(6, 2)$, принадлежащая гиперболе, и уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{1}{2}x$;

г) точка $M(4, 0)$, принадлежащая гиперболе, и уравнения директрис $x = \pm 16/5$;

д) уравнения асимптот $y = \pm 2x$ и уравнения директрис $x = \pm 1/\sqrt{5}$.

12.2.11. Гипербола задана уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Найти:

а) расстояние от фокуса гиперболы до ее асимптоты;

б) произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух асимптот.

12.2.12. Составить уравнение гиперболы, если известны:

а) эксцентриситет, равный $5/4$, фокус $F(5, 0)$ и уравнение соответствующей ему директрисы $x = 16/5$;

б) эксцентриситет, равный $\sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ и уравнение соответствующей ему директрисы $3x - y + 3 = 0$.

12.2.13. Определить, как расположена прямая относительно гиперболы $x^2 - 4y^2 = 12$ (пересекает ее, касается, проходит вне гиперболы):

а) $x - 2y - 4 = 0$; б) $2x - y = 0$;
в) $x - y - 3 = 0$; г) $x - 3y - 4 = 0$.

12.2.14. Написать уравнение касательных к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$:

а) параллельных прямой $2x - y = 0$;

б) перпендикулярных прямой $x + 3y + 2 = 0$;

в) проходящих через точку $M(-1, -7)$.

12.2.15. Найти вершину, фокус и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $y^2 = 4 - 6x$;
в) $x^2 = 6y + 2$; г) $x^2 = 2 - y$.

12.2.16. Составить уравнение параболы, если известны:

а) фокус $F(-7, 0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$;

б) фокус $F(4, 3)$ и уравнение директрисы $y + 1 = 0$;

в) фокус $F(2, -1)$ и уравнение директрисы $x - y - 1 = 0$.

12.2.17. Определить, как расположена прямая относительно параболы $y^2 = 8x$ (пересекает ее, касается, проходит вне параболы):

а) $x - y - 4 = 0$; б) $2x - y + 2 = 0$;
в) $x - y + 2 = 0$; г) $3y - 5 = 0$.

12.2.18. Написать уравнение касательных к параболе $y^2 = 4x$:

а) параллельных прямой $x - y + 5 = 0$;

б) перпендикулярных прямой $2x + y - 3 = 0$;

в) проходящих через точку $M(9, 6)$.

12.2.19. Определить вид квадрики, найти каноническое уравнение и изобразить на чертеже расположение квадрики (относительно исходной системы координат):

а) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;

в) $y^2 - 2x + 6y + 17 = 0$;

г) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$;

д) $x^2 + 6x + 5 = 0$;

е) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$;

ж) $x^2 + 8x + 16 = 0$.

12.2.20. Определить вид квадрики, найти каноническое уравнение и изобразить на чертеже расположение квадрики (относительно исходной системы координат):

а) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

б) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

в) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

г) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

д) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$;

е) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$;

ж) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

12.2.21. Определить тип линии при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$ и ее расположение относительно данной системы координат, если квадрика на плоскости определяется следующим уравнением:

а) $x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$;

б) $x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 1$.

12.2.22. Найти фокусы и соответствующие им директрисы следующих квадрик:

а) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;

б) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$.

12.2.23. Показать, что уравнение $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ определяет гиперболу, найти фокусы, уравнения директрис и асимптот в исходной системе координат. Сделать чертеж.

12.2.24. Составить уравнение квадрики в полярных координатах, если дано ее каноническое уравнение:

а) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$; в) $y^2 = 8x$.

12.2.25. Составить каноническое уравнение квадрики, определяемой следующим уравнением в полярных координатах:

а) $\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; в) $\rho = \dfrac{6}{1 - \cos\varphi}$.

12.3. Квадрики в пространстве

12.3.1. Составить уравнение сферы, если:

а) точки $K(4, 1, -3)$ и $L(2, -3, 5)$ являются концами ее диаметра;

б) центр сферы находится в точке $C(3, -5, -2)$, а сама сфера касается плоскости $2x - y - 3z + 11 = 0$;

в) радиус сферы равен 3 и она касается плоскости $x+$ $+2y + 2z + 3 = 0$ в точке $A(1, 1, -3)$.

12.3.2. Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 10 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$.

12.3.3. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\vec{a} = (2, 3, -4)$, а направляющая определяется уравнениями $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$

12.3.4. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\vec{a} = (1, 1, 1)$, а направляющая определяется уравнениями $\begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

12.3.5. Написать уравнение круглого цилиндра радиуса r, осью которого является прямая

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

12.3.6. Составить уравнение цилиндрической поверхности, если известно, что она описана около сферы x^2+ $+y^2+z^2=1$, а ее образующие перпендикулярны плоскости $x+y-2z-5=0$.

12.3.7. Составить уравнение цилиндрической поверхности, если известно, что она описана около сферы x^2+y^2+ $+z^2-2x+4y+2z-3=0$, а ее образующие параллельны прямой $x=-3+2t$, $y=7-t$, $z=5-2t$.

12.3.8. Доказать, что линия пересечения двух параболических цилиндров $y^2=x$, $z^2=1-x$ лежит на круговом цилиндре. Составить уравнение этого цилиндра.

12.3.9. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат, направляющая которой определяется уравнениями $\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$

12.3.10. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $C(3,-1,-2)$, направляющая которой определяется уравнениями $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x-y+z=0. \end{cases}$

12.3.11. Составить уравнение круглого конуса, вершина которого находится в точке $M(x_0,y_0,z_0)$, ось параллельна вектору $\vec{a}=(k,l,m)$, а образующие составляют с осью угол φ.

12.3.12. Составить уравнение круглого конуса, вершина которого находится в точке $C(0,0,c)$, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$ $(c>r)$.

12.3.13. Составить уравнение параболоида вращения с параметром $p=6$, вершина которого находится в первом октанте, зная, что плоскость Oxy пересекает параболоид по окружности радиуса 3, касающейся осей Ox и Oy.

12.3.14. Составить уравнение и определить тип поверхности, полученной вращением гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ вокруг:

а) действительной оси; б) мнимой оси.

12.3.15. Определить вид и найти каноническое уравнение квадрики, пользуясь параллельным переносом системы координат:

а) $x^2+4y^2+4z^2-2x+8y-8z=0$;
б) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;
в) $x^2+2y^2-3z^2+2x+8y-6z+6=0$;
г) $x^2+2z^2-2x+4z=0$.

12.3.16. Определить вид и найти каноническое уравнение квадрики, пользуясь поворотом системы координат вокруг одной из осей:

а) $2xy-z^2=0$;
б) $z^2-3x-4y=0$;
в) $x^2+y^2+2xy-z+1=0$.

12.3.17. Определить вид и найти каноническое уравнение квадрики:

а) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$;
б) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$;
в) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0$;
г) $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$;
д) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$;
е) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;
ж) $4x^2+y^2-4xy-36=0$;
з) $9x^2+y^2+4z^2-6xy+12xz-4yz-12x+4y-8z+4=0$;
и) $x^2+2y^2+3z^2-3xy+4xz-7yz-x+3y+z-2=0$;
к) $x^2+4y^2+z^2-4xy+2x-4y+4=0$.

12.3.18. Определить вид линии пересечения квадрики ℓ и плоскости π:

а) ℓ: $x^2+y^2-z^2=1$, π: $3x+4y-5z=0$;
б) ℓ: $x^2+y^2-z^2=0$, π: $x-z+1=0$;

в) ℓ: $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$, π: $2x+2y+z-3=0$;

г) ℓ: $x^2+y^2-z^2=-4$, π: $x+y-z+3=0$;

д) ℓ: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$, π: $2x+3y-6=0$.

12.3.19. Доказать, что плоскость $2x-12y-z+16=0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2-4y^2=2z$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих прямолинейных образующих.

12.3.20. Доказать, что плоскость $4x-5y-10z-20=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих прямолинейных образующих.

12.3.21. Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$, параллельных плоскости $6x+4y+3z-17=0$.

12.3.22. Найти острый угол между прямолинейными образующими квадрики $9x^2-4y^2-36z=0$, проходящими через точку $M(-2,0,1)$.

12.3.23. Найти острый угол между прямолинейными образующими квадрики $4x^2+4y^2-z^2-4=0$, проходящими через точку $M(1,4,8)$.

12.3.24. Даны гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{8}=2z$ и плоскость $2x+3y-z=0$.

а) Составить уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей параболоид по паре прямых.

б) Составить канонические уравнения прямых, указанных в п. а).

12.3.25. Найти точку пересечения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, по которым его пересекает плоскость, параллельная плоскости $x + y - z = 0$, и найти угол между этими образующими.

12.3.26. Найти прямолинейные образующие поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0$, проходящие через точку $M(-1, -1, 1)$.

12.3.27. Дан однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$. Через его образующую $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ и точку $(0, 3, 0)$ проведена плоскость. Найти вторую прямую линию пересечения гиперболоида с этой плоскостью.

12.3.28. Дан гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 2z$. Через его образующую $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0}$ и точку $(1, 1, 1)$ проведена плоскость. Найти вторую прямую линию пересечения параболоида с этой плоскостью.

Глава 13

Неотрицательные матрицы

13.1. Положительные матрицы

13.1.1. Найти спектральный радиус и принадлежащий ему положительный собственный вектор для каждой из следующих положительных матриц:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; е) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13.1.2. Найти спектральный радиус и принадлежащий ему неотрицательный собственный вектор для каждой из следующих неотрицательных матриц:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13.1.3. Привести примеры:

а) неотрицательной матрицы, для которой спектральный радиус имеет кратность больше 1;

б) действительной матрицы, для которой спектральный радиус не принадлежит спектру.

13.2. Матрицы обмена и продуктивные матрицы

13.2.1. Убедиться, что каждая из приведенных ниже матриц является матрицей обмена, и найти неотрицательный собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,9 & 0,7 \end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$;

в) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$; г) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$;

д) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$;

е) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.

13.2.2. Для матрицы потребления $\boldsymbol{A}$ в задаче межотраслевого баланса с тремя продуктами найти вектор конечного потребления по вектору $\boldsymbol{a}$ валового выпуска:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = (120, 140, 130)$;

б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,25 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = (150, 160, 140)$.

13.2.3. Для матрицы потребления $\boldsymbol{A}$ в задаче межотраслевого баланса с тремя продуктами найти вектор валового выпуска по вектору $\boldsymbol{b}$ конечного потребления:

а) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{b} = (1246, 1869, 1246)$;

б) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = (1595, 1914, 1595)$.

13.2.4. Будем говорить, что производство с матрицей потребления $\boldsymbol{A}$ *развивается со скоростью* α, если α — наибольшее число, для которого существует неотрицательный вектор $\boldsymbol{v}$ такой, что $\boldsymbol{v} \geq \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$. Доказать, что в этих условиях $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$.

13.2.5. Пусть производство новой единицы стали требует α_{11} единиц стали и α_{21} единиц труда; производство новой единицы продуктов питания — α_{33} единиц продуктов питания и α_{23} единиц труда; производство новой единицы труда — α_{12} единиц стали, α_{32} единиц продуктов питания и α_{23} единиц труда. В приведенных ниже случаях по матрице потребления $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ определить, будет ли такое производство продуктивным, и найти скорость его развития (см. задачу 13.2.4):

$$\text{а) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

13.2.6. Определить, будут ли продуктивны следующие матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 1 \\ 1,2 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 1 \\ 1,2 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix};$$

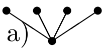
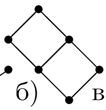
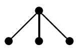
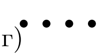
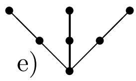
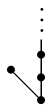
$$\text{в) } \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,7 & 0,6 \end{pmatrix}; \text{ е) } \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответы

1.1.12. В доказательстве шага индукции используется условие $n > 2$. **1.1.13**. Теорема неверна при $n = 5$. В доказательстве шага индукции при $n < 6$ предположение индукции использовать невозможно. **1.2.1**. 729. **1.2.2**. 125. **1.2.3**. 3^n. **1.2.4**. 2^{32}.**1.2.5**. Если среди цифр нет нуля, то 9^9;в противном случае $8 \cdot 9^8$.**1.2.6**. $5^4 10^3 + 5^3 10^4 = 1875000$. **1.2.7**. A_5^3. **1.2.8**. а) C_{25}^{20}, б) C_{20}^{15}.**1.2.9**. $n!$. **1.2.10**. $12!$.**1.2.11**. $(n-1)!$. **1.2.12**. $8!$. **1.2.13**. C_{50}^{25}.**1.2.14**. $C_n^3 - n = \frac{(n-3)n}{2}$. **1.2.15**. а) C_7^3; б) C_n^3. **1.2.16**. C_9^4. **1.2.17**. а) C_{n+2}^2; б) $C_{n+2}^2 C_{k+2}^2$. **1.2.18**. $C_7^3 C_6^3$. **1.2.19**. $C_7^5 + 3C_7^4$. **1.2.20**. A_{10}^6. **1.2.21**. p^n. **1.2.22**. а) $m!n!$; б) $m!(n+1)!$. **1.2.23**. $C_{3n}^{2n} \cdot C_{2n}^n$. **1.3.1**. а), б), г), е), ж) нет; в), д), з) да. **1.3.2**. а) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$; б) $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{\{3\}\},\{1,2\}, \{1, \{3\}\}, \{2, \{3\}\}, \{1, 2, \{3\}\}\}$; в) $\{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$; г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; д) $\{\emptyset\}$; е) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. **1.3.3**. е) Нет, в остальных) случаях – да. **1.3.4**. а) Множество треугольников, каждый из которых либо прямоугольный, либо равносторонний; б) $\emptyset$; в) B; г) A; д) множество всех треугольников, не являющихся прямоугольными; е) множество всех треугольников, не являющихся равносторонними. **1.3.5**. а) Множество всех натуральных чисел, каждое из которых делится на 2 или на 3; б) множество всех натуральных чисел, каждое из которых делится на 6; в) множество всех нечетных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3; г) множество всех четных натуральных чисел, каждое из которых не делится на 3; д) множество всех натуральных чисел, каждое из которых либо нечетное, либо делится на 3; е) множество всех натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо не делится на 3. **1.3.6**. Множество B. **1.3.8**. а) X — любое множество, включающее A; б) X — любое надмножество B, не пересекающееся с $A \setminus B$; в) X — любое подмножество A; г) уравнение имеет решение при условии $A \subseteq B$, X — любое подмножество B, содержащее

$B\backslash A$. **1.3.9**. а) Единственное решение $X = A$; б) система имеет единственное решение $X = A$ при условии $A = B$. **1.3.11**. а) $\emptyset$; б) универсальное множество U; в) B; г) $\overline{A} \cap \overline{B}$; д) $A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$; е) $A \cup \overline{B}$; ж) U. **1.4.1**. Рефлексивные отношения: а)–д); симметричные: в), г), е)–з); транзитивные: а) – д), з); антисимметричные: а), з); отношения эквивалентности: б) – г), з); отношения частичного порядка: а), б). **1.4.2**. Рефлексивные отношения: а) – г), ж) – и); симметричные: в) – е), з), и); транзитивные: а), в), г), е) – з); антисимметричные: нет; отношения эквивалентности: в), г), з); отношения частичного порядка: нет. **1.4.3**. Рефлексивные отношения: б), в); симметричные: а), б); транзитивные: в); антисимметричные: нет. **1.4.4**. Рефлексивные отношения: а); симметричные: все четыре; транзитивные: а); антисимметричные: нет. **1.4.5**. а) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$; $\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$; $\{(2,1),(4,2),(6,3)\}$; $\{(3,1),(6,2)\}$; $\{(1,3),(2,6)\}$; $\{(2,3),(4,6)\}$; $\{(3,2), (6,4)\}$; $\{(1,4)\}$; $\{(4,1)\}$; $\{(1,5)\}$; $\{(5,1)\}$; $\{(1,6)\}$; $\{(6,1)\}$; $\{(2,5)\}$; $\{(5,2)\}$; $\{(3,4)\}$; $\{(4,3)\}$; $\{(3,5)\}$; $\{(5,3)\}$; $\{(4,5)\}$; $\{(5,4)\}$; $\{(5,6)\}$; $\{(6,5)\}$. **1.4.9**. Да (отношение равенства).

1.4.10. а)  б)  в)  г)  д)  е)  **1.4.11**. б) 
в) нет. **1.5.1**. Всюду определенные: а) – д); инъективные: б), ж); сюръективные: б), е), ж). **1.5.2**. Всюду определенное, инъективное, несюръективное. **1.5.3**. Невсюду определенное, инъективное, несюръективное. **1.5.4**. Отображениями будут обратные к б) и ж). **1.5.5**. Да. **1.5.6**. а) $(fg)(x) = \sin\frac{1}{x}$, $(gf)(x) = \frac{1}{\sin x}$. **1.5.7**. Не всюду определенное, инъективное, несюръективное. **1.5.8**. Всюду определенное, неинъективное, несюръективное. **1.5.9**. а) $0 \mapsto 1$, $-n \mapsto 2n$, $n \mapsto 2n{+}1$, $n \in \mathbb{N}$. **1.6.1**. Ассоциативные: а), в); коммутативные: б), в); нейтральный элемент: в); каждый элемент обладает симметричным: в). **1.6.2**. Все операции коммутативны; группы: б), в).

1.6.3. а)

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

1.6.4. а), б) Нет; в) да. **1.6.5**. а), б) Да. **1.6.6**. Ассоциативные: в), г); коммутативные: а)–г); нейтральный элемент: а), г); симметричные элементы: а) – любой элемент симметричен себе, г) — симметричным элементом обладает только 1. **1.6.7**. Ассоциативные: а) – в), д); коммутативные: а) – д); нейтральный элемент: а), б) – 1, в), д) - 0; симметрические элементы: а) – любой элемент a, кроме 0, имеет симметричный $\frac{1}{a}$, б) — симметричным элементом обладает только 1, в), д) — симметричным элементом обладает только 0. **1.6.10**. Группы — а), б), д). **1.6.11**. Группы — б), ж). **1.6.12**. Группа — д). **1.6.13**. Да. **1.6.14**. Нет. **1.6.15**. Все, кроме г), — кольца; поля — а), б), з). **1.6.16**. а) Да; б) да. **1.6.17**. а) Да; б) нет. **2.1.1**. $x = -\dfrac{4}{11}$, $y = \dfrac{5}{11}$. **2.1.2**. $x = -2$, $y = \dfrac{3}{2}$, $z = 2$, $t = -\dfrac{1}{2}$. **2.1.3**. а) 46; б) x^4+4; в) $7+17i$. **2.1.4**. а) $117+44i$; б) -556; в) $-76i$. **2.1.6**.а) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$; б) $\cos 2x + i\sin 2x$; в) $5+5i$; г) $-\dfrac{1}{25}(1+32i)$. **2.1.7**. а) $(1+i, i)$; б) $(\dfrac{17}{8}-\dfrac{5}{4}i,\ \ \dfrac{1}{8}+\dfrac{i}{4})$. **2.1.8**. а) $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1-i$; б) $z_1 = -2+2i$, $z_2 = 2-2i$; в) $z_1 = -2+i$, $z_2 = 2-i$; г) $z_1 = -1-4i$, $z_2 = 1+4i$; д) $z_1 = -i$, $z_2 = i$; е) $z_1 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, $z_3 = \sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}-i\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $z_4 = -\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}+i\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; ж) $z_1 = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))$, $z_2 = \dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))$, $z_3 = \dfrac{1}{2}(-1-\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3}))$, $z_4 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3}))$; з) $z_1 = -1+2i$, $z_2 = 3-i$; и) $z_1 = 1-3i$, $z_2 = 2+i$; к) $z_1 = \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i$, $z_2 = 1-i$. **2.1.9**. а) $x_1 = = \dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+i)$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+i)$, $x_3 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-i)$, $x_4 = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-i)$; б) $x_1 = -4-i$, $x_2 = -4+i$, $x_3 = 4-i$, $x_4 = 4+i$. **2.1.10**. а) $x_1 = -4-2i$, $x_2 = -4+2i$, $x_3 = 1-2i$, $x_4 = 1+2i$, $(x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$; б) $x_1 = -2-2\sqrt{2}i$, $x_2 = -2+2\sqrt{2}i$, $x_3 = 2+i\sqrt{2}$, $x_4 = 2-i\sqrt{2}$, $(x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$. **2.1.12**. $|a| = |b| = 1$, $4 \mid n$ или $|a| = 1$, $|b| = \sqrt{3}$, $3 \mid n$ или $|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 1$, $6 \mid n$. **2.2.1**. а) $5(\cos 0 + i\sin 0)$; б) $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$; в) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; г) $3(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})$; д) $\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$; е) $\sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$; ж) $2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$; з) $2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$; и) $2(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3})$; к) $2(\cos(-\dfrac{\pi}{3})+i\sin(-\dfrac{\pi}{3}))$; л) $2(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$; м) $2(\cos(-\dfrac{\pi}{6})+i\sin(-\dfrac{\pi}{6}))$; н) $2(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6})$; о) $2(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6})$;

п) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12})$; р) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}(\cos(-\dfrac{5\pi}{12})+i\sin(-\dfrac{5\pi}{12}))$; с) $\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$; т) $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)2$; у) $2\cos\dfrac{\varphi}{2}(\cos\dfrac{\varphi}{2}+$ $+i\sin\dfrac{\varphi}{2})$. **2.2.2**. а) $2\sqrt{2}\cos(\dfrac{5\pi}{12}+\varphi)+i\sin(\dfrac{5\pi}{12}+\varphi)$; б) $\cos(\varphi+\psi)+$ $+i\sin(\varphi+\psi)$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\varphi-\frac{\pi}{12})+i\sin(2\varphi-\frac{\pi}{12})$. **2.2.3**. а) $2^{24}(1+i)$; б) -2^{15}; в) -2^{30}; г) $(2+\sqrt{3})^{12}$; д) $-2^{12}(2-\sqrt{3})^{12}$; е) -2^{6}; ж) $2^{15}i$; з) -64. **2.2.4**. а) $3+4i$; б) $5-12i$. **2.2.5**. а) $2^{\frac{n}{2}}(\cos\dfrac{\pi n}{4}+i\sin\dfrac{\pi n}{4})$; б) $\cos(-\dfrac{\pi n}{3})+i\sin(-\dfrac{\pi n}{3})$; в) $\dfrac{1-\mathrm{tg}n\alpha}{1+\mathrm{tg}n\alpha}$; г) $2^n\cos^n\dfrac{\varphi}{2}(\cos\dfrac{n\varphi}{2}+i\sin\dfrac{n\varphi}{2})$. **2.2.7**. а) $4\cos^3x\sin x-4\cos x\sin^3x$; б) $\cos^4x-6\cos^2x\sin^2x+\sin^4x$; в) $5\cos^4x\sin x-10\cos^2x\sin^3x+\sin^5x$; г) $\cos^5x\sin x-10\cos^3x\sin^2x+$ $+5\cos x\sin^4x$. **2.2.9**. а) $\dfrac{1}{8}(\cos4x-4\cos2x+3)$; б) $\dfrac{1}{8}(\cos4x+4\cos2x+$ $+3)$; в) $\dfrac{1}{16}(\sin5x-5\sin3x+10\sin x)$; г) $\dfrac{1}{16}(\cos5x+5\cos3x+10\cos x)$.

2.3.2. а) $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$; б) -1, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $4+i\sqrt{3}$, $3+2i\sqrt{3}$, $1+2i\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$, 1, 3; г) $\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. **2.3.3**. Расстояние между точками, соответствующими числам z_1 и z_2. **2.3.4**. Угол между векторами, направленными из точки z_1 в точку z_2 и из точки z_2 в точку z_3. **2.3.5**. а) Вершины правильного треугольника с центром в начале координат; б) вершины ромба с центром в начале координат. **2.3.6**. а) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат; б) луч, выходящий из начала координат и образующий с положительным направлением оси Ox угол $\dfrac{\pi}{3}$; в) все точки круга радиуса 3 с центром в начале координат включая границу; г) все точки круга радиуса 1 с центром в точке $1+i$ не включая границу; д) все точки круга радиуса 5 с центром в точке $3-4i$ включая границу; е) все точки “кольца” внешнего радиуса 3, внутреннего радиуса 2 с центром в точке 0 не включая границы; ж) все точки “кольца” внешнего радиуса 2, внутреннего радиуса 1 с центром в точке $2i$ включая внутреннюю границу и не включая внешнюю; з) все точки угла между лучами, выходящими из начала координат и образующими с положительным направлением оси Ox углы $-\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{\pi}{6}$ не включая границы; и) эллипс с фокусами в точках

$(-1,0)$, $(1,0)$ и полуосями $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$; к) левая ветвь гиперболы с фокусами в точках $(-2,0)$, $(2,0)$ и полуосями $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **2.3.7**. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. **2.3.8**. $z_4 = z_1 - z_2 + z_3$. **2.3.9**. $\frac{z+w}{2} \pm i\frac{z-w}{2}$. **2.3.10**. $z_k = c + (z_0 - c)(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где $c = \frac{1}{2}(z_0+z_1) \pm (\frac{1}{2}i\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n})(z_1 - z_0)$ — центр многоугольника. **2.3.11**. Все точки окружности радиуса -1 с центром в начале координат за исключением точки $z = 1$. **2.3.13**. Точка обходит: а) единичную окружность дважды против часовой стрелки; б) отрезок [-2,2] от точки 2 к точке -2 и обратно; в) окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в начале координат против часовой стрелки; г) окружность радиуса 3 с центром в начале координат против часовой стрелки; д) окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$ против часовой стрелки. **2.3.14**. Точка обходит: а) контур, состоящий из двух дуг парабол $x = y^2 - 1$ и $x = 1 - y^2$, при $y \in [-1, 1]$ против часовой стрелки; б) контур, состоящий из четырех дуг окружностей: $y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$, $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$, $y = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$, $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$ против часовой стрелки; в) квадрат с вершинами $3-3i$, $-3-3i$, $-3+3i$, $3+3i$ по часовой стрелке; г) квадрат с вершинами $2+i$, i, $-i$, $2-i$ против часовой стрелки; д) отрезок $[-2i, 2i]$ от точки $2i$ до точки $-2i$; е) квадрат с вершинами $2i$, -2, $-2i$, 2 против часовой стрелки; ж) квадрат с вершинами $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, $1+i$ по часовой стрелке; з) отрезок $[-2-i, 2+i]$ от точки 0 до $-2-i$, затем до $2+i$, и обратно до 0. **2.4.1**. а) $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$ n — любое; б) $z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, n — четное. **2.4.3**. а) $\{\cos\frac{\pi+4\pi k}{12} + i\sin\frac{\pi+4\pi k}{12} \mid k = 0, 1, \ldots, 5\}$; б) $\{2(\cos\frac{-\pi+12\pi k}{60} + i\sin\frac{-\pi+12\pi k}{60}) \mid k = 0, 1, \ldots, 9\}$; в) $\{\sqrt[4]{2}(\cos\frac{-\pi+8\pi k}{32} + +i\sin\frac{-\pi+8\pi k}{32}) \mid k = 0, 1, \ldots, 7\}$; г) $\{\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\pi+2\pi k}{4}) \mid k = 0, 1, 2, 3\}$; д) $\{2(\cos\frac{2\pi k}{6} + +i\sin\frac{2\pi k}{6}) \mid k = 0, 1, \ldots, 5\}$; е) $\{\sqrt{3}(\cos\frac{-\pi+2\pi k}{6} + +i\sin\frac{-\pi+2\pi k}{6}) \mid$

$k = 0, 1, \ldots, 5\}$; ж) $\{\sqrt[8]{2}(\cos\dfrac{\pi+8\pi k}{16} + i\sin\dfrac{\pi+8\pi k}{16}) \mid k = 0, 1, 2, 3\}$; з) $\{\sqrt{2}(\cos\dfrac{-\pi+8\pi k}{12} + i\sin\dfrac{-\pi+8\pi k}{12}) \mid k = 0, 1, 2\}$. **2.4.6**. $\dfrac{n}{\varepsilon-1}$, если $\varepsilon \neq 1$, и $\dfrac{n(n-1)}{2}$, если $\varepsilon = 1$. **2.4.7**. $\dfrac{2}{1-\varepsilon}$. **2.4.8**. а) $\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; б) $\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; в) $-\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$; г) $\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. **2.4.9**. а) $z_k = -i\operatorname{ctg}\frac{-\pi+2\pi k}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; б) $z_k = -i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; в) $z_k = \operatorname{ctg}\dfrac{-\pi+2\pi k}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. **2.4.10**. $(-1)^{n-1}$. **2.4.11**. Нет. **2.4.12**. $s = 6$. **2.5.1**. а) $2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{\pi n}{4}$; б) $2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{\pi n}{4}$; в) $2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}\cos\dfrac{\pi n}{4}$; г) $2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}\sin\dfrac{\pi n}{4}$. **2.5.3**. а) $x_k = -\dfrac{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi-2n\alpha}{2n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; б) $x_k = \operatorname{tg}^2\dfrac{2k-1}{4n}\pi$, $k = 1, \ldots, n$. **2.5.5**. а) $2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{n+2}{2}x$; б) $2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{n+2}{2}x$; в) $\dfrac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$; г) $\dfrac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$; д) $\dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$; е) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$; ж) $\dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$; з) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$. **2.6.1**. а) $q = 1$, $r = 1+i$; б) $q = 4-4i$, $r = -1$; в) $q = 1+i$, $r = 1+2i$; г) $q = 1-2i$, $r = -i$; д) $q = 1-i$, $r = i$; е) $q = 2+i$, $r = -1+i$. **2.6.2**. а), в) – з), к) – простые; б) $(1+i)(2+i)$; и) обратимый элемент; л) $(1-4i)(-3+i)$. **2.6.6**. а), в), г) 1; б) $2-i$. **3.1.1.** а) Например, $x = -2t$, $y = 7t$, $z = 4t$; б) например, $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 0$; в) $x = 24\frac{1}{2}$, $y = 21\frac{1}{2}$, $z = 10$; г) например, $x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2)$, $x_2 = \frac{1}{11}(-5x_3 + x_4 + 10)$; д) например, $x_3 = -11 + 22x_1 - 33x_2$, $x_4 = 8 - 16x_1 + 24x_2$; е) например, $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2$, $x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2$; ж) система несовместна. **3.1.2.** а) Например, $x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2x_1 - x_2$; б) $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -5$, $x_4 = 11$; в) система несовместна; г) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -4$, $x_4 = -3$; д) например, $x_1 = \frac{20}{9} + x_4 - \frac{53}{18}x_5$, $x_2 = -\frac{5}{3} - \frac{5}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5$, $x_3 = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9}x_5$; е) система несовместна. **3.2.1**. а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & 18 & 7 & -31 \\ 1 & -12 & -5 & 25 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -2 & 5 & \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5 & -2 & 4 \\ 3 & \frac{7}{2} & 4 & -7 \end{pmatrix}$. **3.2.3**. Всегда. **3.2.4**. а) (-1);

б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. **3.2.5**. а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $AA^\top = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$, $A^\top A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 7 & 18 \\ 10 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 5 \\ 18 & 7 & 5 & 13 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k^n \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} \alpha^n & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1k} \\ 0 & \alpha^n & \beta_{23} & \dots & \beta_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^n \end{pmatrix}$, где $\beta_{ij} = \begin{cases} C_n^{j-i}\alpha^{n+i-j}, \text{ если } j-i \le n; \\ 0, \text{ если } j-i > n, \end{cases}$
$i = 1, 2, \dots, k-1,\ j = 2, \dots, n.$

3.2.6. а) $\begin{pmatrix} -6 & 22 \\ -22 & 49 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.2.8**. а) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где a, b, c — любые числа, удо-

влетворяющие соотношению $a^2+bc=0$; б) E_2, $-E_2$ или $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где a,b,c — любые числа, удовлетворяющие соотношению $a^2+bc=1$. **3.2.9**. а) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; д), е) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, где a,b,c — любые числа. **3.2.10**. в) $(\alpha_{kl})_{n\times n}$, где $\alpha_{ii}=\alpha_{jj}$ и $\alpha_{ki}=0$ при $k\neq i$, $\alpha_{jl}=0$ при $l\neq j$, $1\le k,l\le n$. **3.3.1**. а) $X=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X==Y=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; в) $X=\begin{pmatrix} \frac{2+3a}{2} & \frac{2+3b}{2} \\ a & b \end{pmatrix}$, где a,b — любые числа, Y не существует; г) X,Y не существует; д) $X=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,
$Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{pmatrix}$; е) $X=\begin{pmatrix} 7-3a & 5-3b & 7-3c \\ a & b & c \\ 5a-9 & 5b-3 & 5c-7 \end{pmatrix}$, где a,b,c — любые числа, Y не существует;

ж) $X=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -5 & -3 \\ -8 & -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -6 \\ 4 & -3 & 0 & -5 \\ 9 & -2 & -9 & -11 \\ 7 & -1 & -10 & -9 \end{pmatrix}$.

3.3.2. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;
ж) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -27 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;
и) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.3.3**. а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 8 & -18 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 6 \\ -1 & 3 & -32 \\ 9 & -25 & 35 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. **3.3.4**. В матрице A^{-1} соответственно: а) поменяются местами i-й и j-й столбцы; б) i-й столбец умножится на $\frac{1}{\alpha}$; в) из j-го столбца вычтется i-й, умноженный на α. При преобразовании столбцов матрицы A аналогично указанному изменяются строки матрицы A^{-1}. **3.3.8**. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_k & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_l \end{pmatrix}$. **4.1.1**. а) 5; б) 7; в) $\frac{n(n+1)}{2}$; г) $\frac{n(n-1)}{2}$; д) $\frac{3n(n-1)}{2}$; е) $3n(n-1)$; ж) $n(3n-2)$. **4.1.2**. а) $k-1$; б) $n-k$. **4.1.7**. $\frac{n!}{2}C_n^2$. **4.1.9**. а), б) Нечетная; в) четная; г) четность совпадает с четностью n; д) четная, если либо k — четное, либо k, n — нечетные; нечетная, если k — нечетное и n — четное. **4.2.1**. а), г) Входит со знаком минус; б) входит со знаком плюс; в) не является слагаемым определителя. **4.2.2**. а) Не является слагаемым определителя; б) входит со знаком $(-1)^{n-1}$; в) входит со знаком $(-1)^n$; г) входит со знаком $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$; д) входит со знаком $(-1)^{3n} = (-1)^n$. **4.2.3**. а) $i = 5$, $k = 1$; б) $i = 6$, $k = 2$. **4.2.4**. а) $10x^4 - 5x^3$; б) $-12x^4+$ $+4x^3$. **4.2.5**. а) входит со знаком плюс; б) входит со знаком $(-1)^{C_n^2}$. **4.2.6**. а) $\prod_{i=1}^n a_{ii}$; б) 0; в) $(-1)^{C_n^2}\prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$. **4.2.10**. а) Умножится на $(-1)^{n-1}$; б) умножится на $(-1)^{C_n^2}$; в) не изменится; г) умножится на $(-1)^n$; д) не изменится; е) обратится в нуль. **4.3.1**. а) 1; б) 1; в) 42; г) 79. **4.3.2**. а) 40; б) -3; в) 100; г) -5; д) 4; е) 20. **4.3.3**. а) -8; б) -3; в) -9; г) 18; д) 90; е) 27; ж) 10; з) 1. **4.3.4**. а) 52; б) 5; в) -350; г) 100. **4.3.7**. а) $x = -10$, $x = 2$; б) $x = 2$. **4.4.1**. а) $n!$; б) $x_1\prod_{i=2}^n(x_i - a_{i-1,i})$; в) $(a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$; г) $(\sum_{i=0}^n a_i)x^n$; д) $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; е) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; ж) $-2(n-2)!$; з) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$;

и) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. **4.4.2**. а) 1; б) $n(-1)^{n-1}$; в) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. **4.4.3**. а) $\prod_{i=1}^{n-1}(x-i)$; б) $(-1)^n\prod_{i=1}^{n}(x-i)$; в) $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$; г) $(x^2-1)(x^2-4)$; д) x^2z^2. **4.4.4**. а) $-(\prod_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})$; б) $\sum_{k=0}^n(-1)^k\prod_{i=1}^{n-k}a_i$; в) $n+1$; г) $2^{n+1}-1$; д) $\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$; е) $9-2^{n+1}$; ж) $5\cdot 2^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}$; з) $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.
4.4.5. а) $\prod_{k=1}^n k! = \prod_{k=1}^n k^{n-k+1}$; б) $\prod_{1\le i<k\le n}(a_i-a_k)$; в) $\prod_{k=1}^n k!$; г) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{1\le i<k\le n}\cos\dfrac{\varphi_k+\varphi_i}{2}\cos\dfrac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$; д) $n!\prod_{i=1}^n\prod_{j=i+1}^n(j^2-i^2)$.
4.4.6. а) $x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^n a_i$; б) $\prod_{i=1}^n(x_i-a_i)(1+\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{x_i-a_i})$; в) $\prod_{i=1}^n(a_i-x_i)-\prod_{i=1}^n a_i$. **4.4.7**. а) 10; б) 60; в) 10; г) 90; д) 1000. **4.4.9**. а) 0 при $n>2$, $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ при $n=2$; б) $\prod_{1\le i<k\le n}(a_k-a_i)(b_k-b_i)$; в) $\prod_{i=1}^n {i \atop n}\prod_{1\le i<k\le n}(a_k-a_i)(b_k-b_i)$; г) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$. **4.4.10**. а) $5^{n+1}-4n+1$; б) 1; в) $x^n+(-y)^n$; г) $\dfrac{x\prod_{j=1}^n(a_j-y)-y\prod_{j=1}^n(a_j-x)}{x-y}$; д) $b_1b_2\ldots b_n$; е) $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$; ж) $\prod_{j=1}^{n-1}(1-a_{jj}x)$; з) $a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_n$. **4.5.1**. а) $\frac{1}{23}\begin{pmatrix}5&-3\\1&4\end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$; д) $\frac{1}{36}\begin{pmatrix}-7&5&25\\43&-5&-97\\-13&-1&31\end{pmatrix}$;
е) $\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-7&-4&36\\43&41&-140\\-13&-14&45\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}2-n&1&1&\ldots&1\\1&-1&0&\ldots&0\\1&0&-1&\ldots&1\\.&.&.&\ldots&.\\1&0&0&\ldots&-1\end{pmatrix}$;
з) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}2-n&1&1&\ldots&1\\1&2-n&1&\ldots&1\\1&1&2-n&\ldots&1\\.&.&.&\ldots&.\\1&1&1&\ldots&2-n\end{pmatrix}$;
и) $\frac{1}{a(n+a)}\begin{pmatrix}1-n-a&1&1&\ldots&1\\1&1-n-a&1&\ldots&1\\1&1&1-n-a&\ldots&1\\.&.&.&\ldots&.\\1&1&1&\ldots&1-n-a\end{pmatrix}$;

к) $\frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{1-a_1 s}{a_1^2} & \frac{1}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_1 a_3} & \dots & \frac{1}{a_1 a_n} \\ \frac{1}{a_2 a_1} & \frac{1-a_2 s}{a_2^2} & \frac{1}{a_2 a_3} & \dots & \frac{1}{a_2 a_n} \\ \frac{1}{a_3 a_1} & \frac{1}{a_3 a_2} & \frac{1-a_3 s}{a_3^2} & \dots & \frac{1}{a_3 a_n} \\ . & . & . & \dots & . \\ \frac{1}{a_n a_1} & \frac{1}{a_n a_2} & \frac{1}{a_n a_3} & \dots & \frac{1-a_n s}{a_n^2} \end{pmatrix}$, где $s = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

4.5.3. а) $x = \frac{32}{15}$, $y = \frac{15}{19}$; б) $x = -82$, $y = 67$; в) $x = 1$, $y = -2$; г) $x = 37$, $y = 42\frac{1}{2}$; д) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$; е) $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$; ж) $x = 3 - 11i$, $y = -3 - 9i$, $z = 1 - 7i$. **5.1.1**. а) Частное $2x^2 + x + 11$, остаток $25x - 5$; б) частное $\frac{3x-7}{9}$, остаток $\frac{-26x-2}{9}$. **5.1.2**. а) $q = m$, $p = -m^2 - 1$; б) если $m = 0$, то $q = p - 1$, если $m \neq 0$, то $p = 2 - m^2$, $q = 1$. **5.1.3**. а) Частное $x^3 - x^2 + 3x - 3$, остаток 5; б) частное $2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$, остаток -327; в) частное $4x^2 - (3+4i)x - 1 + 7i$, остаток $8 - 6i$; г) частное $x^2 - 2ix - 5 - 2i$, остаток $-9 + 8i$. **5.1.4**. а) 136; б) $-1 - 44i$. **5.1.5**. а) $(x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$; б) $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$; в) $(x-2)^4 - 18(x-2) + 38$; г) $(x+i)^4 - 2i(x+i)^3 - (1+i)(x+i)^2 - 5(x+i) + 7 + 5i$; д) $(x+1-2i)^4 - (x+1-2i)^3 + 2(x+1-2i) + 1$. **5.1.6**. а) $x+2$; б) $x+1$; в) $x^3 - x + 1$; г) 1; д) $x^2 + x + 1$; е) $x^2 + x + 1$. **5.1.7**. а) $f(x)(-x-1) + g(x)(x+2) = x^2 - 2$; б) $-f(x) + g(x)(x+1) = x^3 + 1$; в) $f(x)(-\frac{1}{3})(x-1) + g(x)\frac{1}{3}(2x^2 - 2x - 3) = x - 1$; г) $f(x)(-x^2 + x + 1) + g(x)(x^3 + 2x^2 - 5x - 4) = 3x + 2$. **5.1.8**. а) $u(x) = x$, $v(x) = -3x^2 - x + 1$; б) $u(x) = -x - 1$, $v(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$; в) $u(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 3)$, $v(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^2 - 2)$. **5.2.1**. а) 3; б) 4. **5.2.2**. $a = n$, $b = -n - 1$. **5.2.5**. $3125b^2 + 108a^5 = 0$, $a \neq 0$. **5.2.6**. $b = 9a^2$, $1728a^5 + c^2 = 0$. **5.2.10**. а) $(x+1)^4(x-2)^2$; б) $(x-2)(x^2 - 2x + 2)^2$; в) $(x^3 - x^2 - x - 3)^2$; г) $(x^2+1)^2(x-1)^3$. **5.3.1**. а) $(x-1)(x-2)(x-3)$; б) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$; в) $(x + 1 + \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})(x + 1 + \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8})(x + 1 - \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})(x + 1 - \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8})$; г) $2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(x - \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n})$; д) $2\prod\limits_{k=1}^{n}(x + \dfrac{\sin(\varphi + \frac{(2k-1)\pi}{2n})}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}})$. **5.3.2**. а) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i) = x^5 - (8+i)x^4 + (24+7i)x^3 - (34+17i)x^2 + (23+17i)x - (6+6i)$; б) $x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$; в) $x^3 + (1-i)x^2 + (1-2i)x - 1 - i$. **5.3.3**. а) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$; б) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$; в) $(x^2 + 2(1 - \cos\frac{\pi}{8})x + 2(1 - \cos\frac{\pi}{8}))(x^2 + 2(1 + \cos\frac{\pi}{8})x + 2(1 + \cos\frac{\pi}{8}))$;

г) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x^2-2^{1+\frac{1}{2n}}x\cos\dfrac{8k+1}{4n}\pi+2^{\frac{1}{n}})$; д) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos\dfrac{3k+1}{3n}2\pi+1)$;
е) $(x-1)\prod\limits_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\dfrac{\pi k}{2n+1}+1)$; ж) $(x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\dfrac{\pi k}{2n}+1)$.
5.3.4. а) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)=x^6-9x^5+33x^4-65x^3+74x^2-{}$ $-46x+12$; б) $x^4-9x^2+28x^2-38x+24$; в) $x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$.
5.3.5. а) $(x-1)^2(x+2)$; б) $(x-1)^2(x+1)$; в) $(x+1)(x^2+1)$; г) $x^{(m,n)}-1$; д) $x^{(m,n)}+a^{(m,n)}$, если $\dfrac{m}{(m,n)}$ и $\dfrac{n}{(m,n)}$ — нечетные числа; 1, если по крайней мере одно из этих чисел четное. **5.3.6**. m,n,p — одновременно четные или одновременно нечетные числа. **5.3.7**. $m,n+1,p$ — одновременно четные или одновременно нечетные числа. **5.3.8**. а) при $m=6n+2$ и $m=6n+4$; б) при $m=6n+4$. **5.3.9**. а) при $m=6n+1$ и $m=6n+5$; б) при $m=6n+1$. **5.4.2**. а) -3, $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; г) рациональных корней нет; д) $-\frac{1}{2}$ (кратности 2). **5.4.10**. $x^5+mx^3-{}$ $-mx+1$, $m\in\mathbb{Z}$ (делится на $x+1$); $x^5+mx^3-(m+2)x+1$, $m\in\mathbb{Z}$ (делится на $x-1$); $x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$; $x^5-2x^3-x+1=$ $=(x^2+x-1)(x^3-x^2-1)$; $x^5+2x^3+x+1=(x^2-x+1)(x^3+x^2+{}$ $+2x+1)$; $x^5-4x^3+3x+1=(x^2-x-1)(x^3+x^2-2x-1)$. **5.4.11**. а) многочлен неприводим; б) $(x^2-2)(x^2-x-1)$. **5.5.1**. а) $\dfrac{1}{12(x-1)}-{}$ $-\dfrac{4}{3(x+2)}+\dfrac{9}{4(x+3)}$; б) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{-2+i}{2(x-i)}+\dfrac{-2-i}{2(x+i)}$; в) $-\dfrac{1}{16}(\dfrac{1+i}{x-1-i}+{}$ $+\dfrac{1-i}{x-1+i}+\dfrac{-1+i}{x+1-i}+\dfrac{-1-i}{x+1+i})$; г) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+{}$ $+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$; д) $-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\eta_k}{x-\eta_k}$, где $\eta_k=\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n}+i\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{n}$; е) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; ж) $\dfrac{1}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)^2}$; з) $\dfrac{3}{(x-1)^3}-\dfrac{4}{(x-1)^2}+{}$ $+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$; и) $\dfrac{1}{n^2}(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k^2}{(x-\varepsilon_k)^2}-(n-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k})$, где $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$; к) $\dfrac{1}{x^m}+\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{n^{\overline{j}}}{j!x^{m-j}}+\dfrac{1}{(1-x)^n}+{}$

$+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m^{\overline{j}}}{j!(1-x)^{n-j}}$, где $a^{\overline{k}} = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ для $a, k \in \mathbb{N}$.
5.5.2. а) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$; б) $\frac{1}{8}(\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{x-2}{x^2-2x+2})$; в) $\frac{1}{18}(\frac{1}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{2}{x^2+3})$; г) $-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+$ $+\frac{x+1}{4(x^2+1)^2}$; д) $-\frac{1}{x}+\frac{7}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$; е) $\frac{1}{16}(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{x+1})+\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2}$.
5.5.4. б) Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все различные элементы конечного поля. Тогда нулевой многочлен и $\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$ определяют одну и ту же функцию, тождественно равную нулю. **5.5.5**. а) $-\frac{4}{3}x^3+10x^2-\frac{65}{3}x+15$; б) $-\frac{1}{2}((1+i)x^3+x^2+(1-i)x-5)$. **5.5.8**. а) $f = x^3-3x-1$, $f_1 = x^2-1$, $f_2 = 2x+1$, $f_3 = 1$, три действительных корня в интервалах $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,2)$; б) $f = x^3+x^2-2x-1$, $f_1 = 3x^2+2x-2$, $f_2 = 2x+1$, $f_3 = 1$, три действительных корня в интервалах $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,2)$; в) $f = x^4-12x^2-16x-4$, $f_1 = x^3-6x-4$, $f_2 = 3x^2+x+2$, $f_3 = x+1$, $f_4 = 1$, четыре действительных корня в интервалах $(-3,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(4,5)$; г) $f = x^4+4x^3-12x+9$, $f_1 = x^3+3x-3$, $f_2 = x^2+3x-4$, $f_3 = -4x+3$, $f_4 = 1$, действительных корней нет; д) $f = 2x^5-10x^3+10x-3, f_1 = x^4-3x^2+1$, $f_2 = 4x^3-8x+3$, $f_3 = 4x^2+3x-4$, $f_4 = x$, $f_5 = 1$, пять действительных корней в интервалах $(-2,-\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2},-1)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},1)$, $(1,2)$; е) $f = x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$, $f_1 = 5x^4+4x^3-12x^2-6x+3$, $f_2 = 4x^3+3x^2-6x-2$, $f_3 = 3x^2+2x-2$, $f_4 = 2x+1$, $f_5 = 1$, пять действительных корней в интервалах $(-2,-\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2},-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$. **5.5.9**. а) Ряд Штурма образован многочленами x^3+px+q, $3x^2+p$, $-2px-3q$, $-4p^3-27q^2$. Если $-4p^3-27q^2 > 0$, то $p < 0$, все старшие коэффициенты многочленов Штурма положительны и потому все корни многочлена x^3+px+q действительны. Если $-4p^3-27q^2 < 0$, то независимо от знака p ряд Штурма имеет при $-\infty$ две перемены знака, а при $+\infty$ одну перемену, и многочлен x^3+px+q имеет один действительный корень; б) ряд Штурма образован многочленами $x^5-5ax^3+5a^2x+2b$, $x^4-3ax^2+a^2$, ax^3-2a^2x-b, $a(a^2x^2-bx-a^3)$, $a(a^5-b^2)x$, 1. Если $a^5-b^2 > 0$, то многочлен имеет пять действительных корней, если $a^5-b^2 < 0$, то многочлен имеет один действительный корень; в) ряд Штурма образован многочленами x^n+px+q, $nx^{n-1}+p$, $-(n-1)px-nq$, $-p-n(\frac{-nq}{(n-1)p})^{n-1}$.

Пусть $\Delta = -(n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. При нечетном n, если $\Delta > 0$, многочлен имеет три действительных корня, а если $\Delta < 0$, то многочлен имеет один действительный корень. При четном n при $\Delta > 0$ многочлен имеет два действительных корня, при $\Delta < 0$ не имеет действительных корней; г) $E'_n = E_{n-1}$, поэтому $E_n = E_{n-1} - (-\dfrac{x^n}{n!})$ и многочлены E_n, E_{n-1}, $-\dfrac{x^n}{n!}$ образуют ряд Штурма для E_n на промежутке $(-\infty, -\varepsilon)$ при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. При четном n многочлен E_n не имеет отрицательных корней; при нечетном n многочлен E_n имеет один отрицательный корень; при $x \geq 0$ многочлен E_n принимает положительные значения. **5.5.12**. а) $0 < x_k < 3$; б) $0 < x_k < 1$; в) $-11 < x_k < 11$; г) $-6 < x_k < 2$. **5.5.13**. а) Например, $M = 6$; б) например, $M = 4$. **5.5.14**. а) Например, $x = \rho i$, $0 < \rho < \sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$; б) например, $x = \rho$, $0 < \rho < \sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$. **5.6.1**. а) $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$; б) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_2$; в) $2\sigma_1^3 - 9\sigma_1^2\sigma_2 + 27\sigma_3$; г) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + {}$ ${}+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^3$; д) $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2$. **5.6.2**. а) $\sigma_1^2\sigma_2 - {}$ ${}-\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2 + 4\sigma_4$; б) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$; в) $\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$; г) $\sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$; д) $\sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5$; е) $\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$. **5.6.3**. а) $\dfrac{\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3}{\sigma_3}$; б) $\dfrac{2(\sigma_1^2\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2)}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}$; в) $\dfrac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3\sigma_3 - 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 9\sigma_3^3}{\sigma_3^2}$. **5.6.4**. а) -4; б) -35; в) 16; г) $\dfrac{25}{27}$; д) $\dfrac{35}{27}$; е) $-\dfrac{1679}{625}$. **5.6.5**. а) $a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_2 - 4a_2^3a_0 + {}$ ${}+18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$; б) $a_1^3a_3 - a_2^3a_0$; в) $\dfrac{a_1a_2}{a_0a_3} - 9$. **5.6.8**. а) $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$, $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$, $s_5 = {}$ ${}= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$, $s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + {}$ ${}+9\sigma_1^2\sigma_2^2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_1^2\sigma_4 + 3\sigma_3^2 + 6\sigma_2\sigma_4 + 6\sigma_1\sigma_5 - 6\sigma_6$; б) $2\sigma_2 = s_1^2 - s_2$, $6\sigma_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3$, $24\sigma_4 = s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - {}$ ${}-6s_4$, $120\sigma_5 = s_1^5 - 10s_1^3s_2 + 20s_1^2s_3 + 15s_1s_2^2 - -20s_2s_3 - 30s_1s_4 + 24s_5$, $720\sigma_6 = s_1^6 - 15s_1^4s_2 + 40s_1^3s_3 + 45s_1^2s_2^2 - 120s_1s_2s_3 - 15s_2^3 - 90s_1^2s_4 + {}$ ${}+40s_3^2 + 40s_3^2 + 90s_2s_4 + 144s_1s_5 - 120s_6$. **5.6.9**. а) 859; б) 13; в) 621. **5.6.10**. а) -7; б) 243; в) 0; г) -59. **5.6.11**. а) При $\lambda = 3$ и $\lambda = -1$; б) $\lambda = 1$, $\lambda = \dfrac{-2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$, $\lambda = \dfrac{-2 - \sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2} + 2}}{2}$; в) $\lambda = \pm i\sqrt{2}1$, $\lambda = \pm 2i\sqrt{3}$ **5.6.12**. а) 49; б) -107; в) -843; г) 725; д) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}$; е) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n q^{n-1} + (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)^{n-1} p^n$.

5.6.13. а) $\lambda = \pm 2$; б) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$; в) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 125$; г) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(7 \pm 9i\sqrt{3})$. **6.1.2.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ должны: а) быть перпендикулярны; б) образовывать тупой угол; в) образовывать острый угол. **6.1.3.** Векторы должны иметь одинаковую длину. **6.1.4.** $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. **6.1.5.** $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\lambda+1}(\lambda\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{\lambda+1}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{\lambda+1}(\lambda\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{\lambda}{\lambda+1}(\vec{a} + \vec{b})$. **6.1.7.** $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. **6.1.8.** $\vec{0}$. **6.1.11.** $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AL} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AL} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AK}$. **6.1.12.** Точка пересечения медиан треугольника. **6.1.13.** 1 : 5. **6.1.15.** $\sin\alpha{:}\sin\beta{:}\sin\gamma$. **6.1.16.** Если все углы треугольника меньше $\frac{2\pi}{3}$, то такая точка существует и $\angle BMC = \angle CMA = \angle AMB = \frac{2\pi}{3}$. Если один из углов треугольника больше $\frac{2\pi}{3}$, то такой точки не существует. **6.1.19.** $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$. **6.1.20.** Например, $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$. **6.1.21.** $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, 1)$, $\overrightarrow{DE} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{EF} = (1, -1)$, $\overrightarrow{FA} = (2, -1)$. **6.1.22.** $\overrightarrow{AB} = (0, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (\lambda, 0)$, $\overrightarrow{CD} = (1 - \lambda, -1)$, $\overrightarrow{DA} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (\lambda, 1)$, $\overrightarrow{BD} = (1, -1)$. **6.1.23.** а) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{CA} = (1, 0, -1)$; б) $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{DF} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. **6.1.24.** а) $(1, -1, 6)$; б) $(5, -3, 6)$; в) $(6, -4, 12)$; г) $(1, -\frac{1}{2}, 0)$; д) $(0, -1, 12)$; е) $(3, -\frac{5}{3}, 2)$. **6.1.25.** Вектор $\vec{b}$ длиннее вектора $\vec{a}$ в три раза; векторы антинаправленны. **6.1.26.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$. **6.1.27.** $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. **6.1.28.** $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$; $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$; $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$. **6.1.29.** $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. **6.1.30.** $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$. **6.1.31.** $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; **6.2.1.** $\overrightarrow{AB} = (-4, 3, -1)$, $\overrightarrow{BA} = (4, -3, 1)$. **6.2.2.** $B(3, -1, -4)$. **6.2.3.** $(-1, 2, 3)$. **6.2.4.** Вектор $\overrightarrow{AB}$ длиннее вектора $\overrightarrow{CD}$ в два раза; векторы сонаправленны. **6.2.6.** а) $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(-2, 2)$, $E(-3, 2)$, $F(-2, 1)$; б) $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(1, \sqrt{3})$, $E(0, \sqrt{3})$, $F(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. **6.2.7.** а) $A(-4, 0)$, $B(-1, 3)$, $C(1, 3)$, $D(4, 0)$; б) $M(0, \frac{12}{5})$; в) $S(0, 4)$. **6.2.8.** $C(5{,}3)$, $D(2{,}5)$. **6.2.9.** $D(1{,}-2)$. **6.2.10.** а) $(-x,-y,-z)$; б) $(x,y,-z)$; в) $(-x,-y,z)$. **6.2.11.** а) $(x{,}0{,}0)$; б) $(0,y,z)$. **6.2.12.** а) $d_x = \sqrt{y^2 + z^2}$; б) $d_y = \sqrt{x^2 + z^2}$; в) $d_z = \sqrt{x^2 + y^2}$. **6.2.13.** $(-6, -4, 3)$. **6.2.14.** $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $A'(0, 0, 1)$, $B'(1, 0, 1)$, $C'(1, 1, 1)$, $D'(0, 1, 1)$. **6.2.15.** $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ для грани AOB, $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ для грани BOC, $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ для грани COA, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ для грани ABC. **6.2.16.** $(-3, 3)$; $(7, 5)$; $(-3, -3)$. **6.2.17.** $D(8,\ -18)$; $M(\frac{13}{8}, \frac{1}{3})$; $S(\frac{7}{4}, \frac{23}{4})$. **6.2.18.** $10\frac{\sqrt{2}}{3}$. **6.2.19.** $(4, -5, -2)$. **6.2.20.** $-\frac{1}{2}$. **6.2.21.** Пересекаются в точке $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 11)$. **6.2.22.** $D(\frac{31}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3})$; $M(\frac{9}{2}, 3,\ \frac{17}{8})$; $S(7, 8, 9)$. **6.2.23.** Окружность с центром в середине отрезка $[A,B]$ и радиусом, равным $\sqrt{a^2-c^2}$. **6.2.24.** Две прямые, перпендикулярные к прямой AB и находящиеся на расстоянии a^2/c от середины отрезка $[A, B]$. **6.2.25.** Прямая, на которой лежит гипотенуза треугольника. **6.2.26.** Окружность, вписанная в треугольник. **6.2.27.** Две прямые, соединяющие середины противоположных сторон прямоугольника. (Указание: принять за оси координат средние линии прямоугольника.) **6.2.28.** Окружность с центром в точке, лежащей на прямой AB и делящей направленный отрезок $\vec{AB}$ в отношении $-k^2$; радиус окружности $r = \dfrac{k}{|1-k^2|}|AB|$. **6.2.29.** Прямая, перпендикулярная к линии центров данных окружностей. Если окружности пересекаются — все точки прямой, проходящей через точки пересечения данных окружностей, кроме точек этой прямой, лежащих внутри окружностей. Если окружности касаются — касательная в их общей точке. **6.2.30.** Два луча прямой $x = -1$, $y \geq 3$ и $x = -1$, $y \leq 3$. **6.2.31.** $x = -x_1 + 1$, $y = -y_1 + 1$. **6.2.32.** $x = 6x' + 4y' - 4$, $y = -2x' + 6y' + 2$. **6.2.33.** $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$. **6.2.34.** $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}$. **6.2.35.** $x' = (x+y)\cos\frac{\omega}{2}$, $y' = (-x+y)\cos\frac{\omega}{2}$. **6.2.36.** $x = \frac{-x'\cos\omega + y'}{\sin\omega}$, $y = \frac{x'\cos - y'\omega}{\sin\omega}$. **6.2.37.** а) $x = 2x' + z' + 2$, $y = 4x' + 4y' + z' + 1$, $z = x' + 4y' + 3$; б) $x' = -x + y - z + 4$, $y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{7}{4}$, $z' = 3x - 2y + 2z - 10$; в) $O(4, -\frac{7}{4}, -10)$, $\vec{e}_1 = (-1, \frac{1}{4}, 3)$, $\vec{e}_2 = (1, -\frac{1}{4}, -2)$, $\vec{e}_3 = (-1, \frac{1}{2}, 2)$. **6.2.38.** а) $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$, $y' = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}$, $z' = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$; б) $O'(-1, 0, 1)$, $\vec{e}'_1 = (-2, 0, 1)$, $\vec{e}'_2 = (-1, -1, 3)$, $\vec{e}'_3 = (-1, -1, 1)$; в) $O'(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $\vec{e}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $\vec{e}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$, $\vec{e}_3 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. **6.2.39.** $x = -x' + 1$, $y = -y' + 1$, $z = -z' + 1$. **6.3.1.** а) -6; б) 9; в) 16; г) 13; д) -61; е) 37; ж) 73. **6.3.2.** а) -62; б) 162; в) 373. **6.3.4.** 22. **6.3.5.** 20. **6.3.6.** 13. **6.3.7.** $\alpha = \pm\frac{3}{5}$. **6.3.8.** $-\frac{3}{2}$. **6.3.9.** 0. **6.3.10.** -19. **6.3.12.** $\frac{3}{2}\vec{a}$. **6.3.13.** а) $2nr^2$; б) n^2r^2. **6.3.14.** $\vec{x} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$, $\vec{y} = \vec{b} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$. **6.3.15.** $\vec{x} = \dfrac{1}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}(\vec{b}^2\vec{a} - (\vec{a}\vec{b})\vec{b})$. **6.3.16.** $\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$. **6.3.17.** $\vec{a} - \dfrac{\vec{a}\vec{n}}{\vec{n}^2}\vec{n}$. **6.3.18.** а) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta + 2ab\cos\gamma}$;

б) $\cos\angle DOA = \dfrac{a+b\cos\gamma+c\cos\beta}{d}$; $\cos\angle DOB = \dfrac{a\cos\gamma+b+c\cos\alpha}{d}$; $\cos\angle DOC = \dfrac{a\cos\beta+b\cos\alpha+c}{d}$. **6.3.19.** $|\vec a|=6$; $|\vec b|=7$; $\vec e_{\vec a} = \frac13(2,-1,-2)$; $\vec e_{\vec b} = \frac17(6,-3,2)$; а) 22; б) -200; в) 129; г) 41. **6.3.20.** $(3,3,1)$; $R=3$. **6.3.21.** $(2,1)$; $R=5$. **6.3.22.** $(2,5)$, $(16,3)$. **6.3.23.** $\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)$; $\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)$; $\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1)$. **6.3.24.** $(4\sqrt2,\ -4,4)$. **6.3.25.** $(\frac{12}{25},-\frac35,-\frac{16}{25})$. **6.3.26.** а) Да; б) нет; в) да. **6.3.27.** $\alpha=-6$. **6.3.28.** A–90^o;B–45^o;C–45^o. **6.3.29.** A–$\arccos(-\frac49)$, B–$\arccos(-\frac{5}{\sqrt{29}})$, C–$\arccos(-\frac{24}{\sqrt{957}})$. **6.3.30.** $(1,\frac12,-\frac12)$. **6.3.31.** $\vec x=(-4,-6,12)$. **6.3.32.** $\vec x=(2{,}3{,}-2)$. **6.3.33.** $\sqrt3$. **6.3.34.** 6. **6.3.35.** -4. **6.3.36.** 5. **6.3.37.** $(-6{,}6,-3)$. **6.3.38.** $(6,6,0)$. **6.3.39.** $(3,-1,1)$. **6.3.40.** Все углы $-\frac{\pi}{2}$. **6.3.41.** $|\vec e_1|=\sqrt{g_{11}}$, $|\vec e_2|=\sqrt{g_{22}}$, $\cos\omega=\dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$, $S = \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$. **6.3.42.** $g_{11}x_1x_2+g_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+g_{22}y_1y_2$. **6.3.43.** $\cos\varphi = \dfrac{g_{11}x_1x_2+g_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+g_{22}y_1y_2}{\sqrt{g_{11}x_1^2+g_{12}x_1y_1+g_{22}y_1^2}\sqrt{g_{11}x_1^2+g_{12}x_1y_1+g_{22}y_1^2}}$. **6.3.45.** 30. **6.3.46.** $2\sqrt{61}$. **6.3.47.** а) $|\vec e_1|=2$, $|\vec e_2|=1$, $\widehat{(\vec e_1,\vec e_2)}=\frac23\pi$; б) $|\vec e_1|=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $|\vec e_2|=\frac{3\sqrt2}{2}$, $\widehat{(\vec e_1,\vec e_2)}=\arccos-\frac{2}{\sqrt2}$. **6.4.1.** 15. **6.4.2.** $36\sqrt{10}$. **6.4.3.** а) 24; б) 60. **6.4.4.** а) 3; б) 27; в) 300. **6.4.12.** а) $(5,1,7)$; б) $(10,2,14)$; в) $(20,14,28)$. **6.4.13.** а) 14; б) 9. **6.4.14.** 5. **6.4.15.** $(-6,-24,8)$. **6.4.16.** $\frac13(1,2,-2)$. **6.4.17.** $\frac{1}{\sqrt2}(0,-1,1)$. **6.4.18.** $\frac{1}{5\sqrt5}(6,-5,-8)$. **6.4.20.** а), в) Компланарны, б) некомпланарны. **6.4.22.** а) 48; б) $\arcsin\frac{4\sqrt2}{45}$; в) $\frac{4\sqrt2}{3}$. **6.4.23.** 3. **6.4.24.** 11. **6.4.25.** $D_1(0,8,0)$; $D_2(0,-7,0)$. **6.4.27.** $\vec x = \dfrac{\alpha[\vec b,\vec c]+\beta[\vec c,\vec a]+\gamma[\vec a,\vec b]}{\vec a\vec b\vec c}$. **6.4.28.** а) $(\vec a,\vec b)=0$; б) $\vec x=\beta\vec a-\dfrac{1}{\vec a^2}[\vec a,\vec b]$.
6.4.29. $G=\frac12\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$; $V=\frac12$; $\vec{e_1}'=\frac12(3,-1,-1)$, $\vec{e_2}'=\frac12(-1,3,-1)$, $\vec{e_3}'=\frac12(-1,-1,3)$; $[\vec a,\vec b]=(21,21,-35)$, $\vec a\vec b\vec c=14$. **6.4.30.** $G=2\sqrt2\times \begin{pmatrix}\sqrt2&1&1\\1&\sqrt2&1\\1&1&\sqrt2\end{pmatrix}$; $V=32(\sqrt2-1)$; $\vec{e_1}'=((\sqrt2+1)/4,-1/4,-1/4)$, $\vec{e_2}'=(-1/4,(\sqrt2+1)/4,-1/4)$, $\vec{e_3}'=(-1/4,\ -1/4,(\sqrt2+1)/4)$; $[\vec a,\vec b] = ((\sqrt2-1)/128,-(\sqrt2+2)/64,(5\sqrt2+8)/128)$, $\vec a\vec b\vec c=288(1-\sqrt2)$.
7.1.1. Точки M_1, M_3 и M_4 лежат на данной прямой, а точки M_2, M_5 и M_6 не лежат на ней. **7.1.2.** а) $3x-y+4=0$; б) $5x+y-13=0$;

в) $x-3=0$; г) $x+2y+7=0$; д) $3x-2y=0$; е) $5x-3y-15=0$. **7.1.3.** а) -2; б) $a_1=-3$, $a_2=3$; в) $a_1=1$, $a_2=\frac{5}{3}$. **7.1.4.** $5x+7y-11=0$. **7.1.5.** $7x+y+18=0$. **7.1.6.** $x-2y-4=0$. **7.1.7.** $2x+5y\pm 10=0$. **7.1.8.** $(6,0)$ и $(0,4)$. **7.1.9.** $(3,-5)$. **7.1.10.** $(2,-1)$; $(-1,3)$; $(2,4)$. **7.1.11.** $x+y-12=0$, $(0,0)$, $(4,8)$, $(2,10)$. **7.1.12.** $5x-3y-1=0$. **7.1.13.** $(1,-3)$; $(-2,5)$; $(5,-9)$; $(8,-17)$. **7.1.14.** а) Параллельны; б) пересекаются; в) совпадают. **7.1.15.** а) $2x+3y-7=0$; б) $3x-2y-4=0$. **7.1.16.** $3x+2y=0$; $2x-3y-13=0$. **7.1.17.** $x-y-7=0$, $x-2y=0$. **7.1.18.** $2x+y-3=0$, $2x-y-6=0$, $x+2y-23=0$, $2x-y+14=0$. **7.1.19.** $(2,1)$; $(4,2)$; $(-1,7)$; $(1,8)$. **7.1.20.** $(-2,-1)$. **7.1.21.** $(11,-11)$. **7.1.22.** $5x+y-3=0$ — биссектриса внутреннего угла; $x-5y-11=0$ — биссектриса внешнего угла. **7.1.23.** $(-12,5)$. **7.1.24.** Основания $x+7y-8=0$, $x+7y-58=0$, боковые стороны $3x-4y-24=0$, $4x+3y+18=0$. **7.1.25.** $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$. **7.1.26.** $(10,-5)$. **7.1.27.** а) 45^o; б) 90^o; в) $\operatorname{arctg}\frac{16}{11}$. **7.1.28.** а) Образуют треугольник; б) проходят через одну точку; в) первая и третья прямые параллельны, вторая их пересекает; г) попарно параллельны. **7.1.29.** а) $3x+2y-7=0$; б) $2x-y=0$; в) $y-2=0$; г) $x-1=0$; д) $4x+3y-10=0$; е) $3x-2y+1=0$. **7.1.30.** $x-y+1=0$. **7.1.31.** $2x+y+8=0$, $x+2y+1=0$. **7.1.32.** $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$, $2x-y+1=0$. **7.1.33.** а) По одну сторону; б) по разные стороны; в) по одну сторону; г) по одну сторону. **7.1.34.** Точки A, B, C лежат в полосе, точки D и F принадлежат одной внешней области, точка E принадлежит другой внешней области. **7.1.35.** M принадлежит и AB, и CD. **7.1.36.** Пересекает AB и BC и продолжение CA за точку A. **7.1.37.** Точка M лежит на продолжении стороны BC за вершину B; точка N лежит в области, ограниченной отрезком AB и продолжениями сторон CA и CB за точки A и B; точка лежит в области, ограниченной продолжениями сторон AB и CB за вершину B. **7.1.38.** Вне треугольника. **7.1.39.** 5. **7.1.40.** 6. **7.1.41.** $4x+y+5=0$, $y-3=0$. **7.1.42.** а) 11; б) 2,5; в) 3. **7.1.43.** а) $3x-y-10=0$; б) $3x-19=0$. **7.1.44.** а) $4x-4y+3=0$, $2x+2y-5=0$; б) $4x+1=0$, $8y+13=0$; в) $14x-8y-3=0$, $64x+112y-23=0$. **7.1.45.** $C(6,-6)$. **7.1.46.** $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$. **7.1.47.** $3x-5y-13=0$, $8x-3y+17=0$, $5x+2y-1=0$. **7.1.48.** $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$. **7.1.49.** $3x+7y-5=0$, $3x+2y-10=0$, $9x+11y+5=0$. **7.1.50.** $x+y-7=0$. **7.1.52.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg} 7$. **7.1.53.** $5x-12y+62=0$, $x-2=0$. **7.1.54.** Основание

$2x-3y+7=0$, боковые стороны $14x+5y+23=0$, $10x+11y-95=0$. **7.1.55.** $8x+9y-33=0$. **7.1.56.** $x-5y+23=0$. **7.1.57.** $(2,-4)$. **7.1.58.** $x+3y-13=0$. **7.1.59.** $(0,1)$. **7.1.60.** $(-1,4)$. **7.1.61.** $(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$; $\frac{1}{2}$. **7.1.62.** $(-2,-6)$; $2\sqrt{2}$. **7.1.63.** $x-y=0$, $7x-56y+25=0$, $77x+21y-50=0$. **7.1.64.** $4x-4y+5=0$. **7.2.1.** а) $x-2y+3z+3=0$; б) $x-y-3z+2=0$; в) $x+4y+7z+16=0$; г) $x-y-z=0$; д) $3x+3y+z-8=0$. **7.2.2.** а) $x=1$, $y=2$, $z=3$; б) $3y-2z=0$, $3x-z=0$, $2x-y=0$; в) $x=1$, $y=2$, $z=3$. **7.2.3.** а) $x-4y-z+16=$ $=0$; б) $5x+2y+3z+10=0$. **7.2.4.** а) $(-13,13,-9)$; б) $\frac{1}{5}(-1,2)$. **7.2.5.** а) $(-6,-4,-3)$; б) $u+v-1=0$, $u=0$, $v=0$; в) $39u+9v-1=$ $=0$. **7.2.6**. а), в) Плоскости параллельны; б) плоскости пересекаются. **7.2.7.** а) 6; б) -19; в) $-\frac{1}{7}$. **7.2.8.** а) 60^0 и 120^0; б) 45^0 и 135^0; в) 90^0; г) $\arccos\frac{2}{15}$ и $\pi-\arccos\frac{2}{15}$. **7.2.9.** $x+3y=0$, $3x-y=0$. **7.2.10.** $x+20y+7z-62=0$, $x-z+2=0$. **7.2.11.** $2x-3z-27=0$. **7.2.12.** $7x-y-5z-10=0$. **7.2.13.** $4x-y-2z-9=0$. **7.2.14.** $(1,-2,2)$. **7.2.15.** 4. **7.2.16.** а) 2, $x-2y-2z=0$; б) $3\frac{1}{2}$, $2x-3y+6z-35=0$; в) $6\frac{1}{2}$, $2x-y+2z-30=0$; г) 1, $16x+12y-15z=0$. **7.2.17.** $(0,7,0)$ и $(0,-5,0)$. **7.2.18.** $(2,0,0)$ и $(\frac{11}{43},0,0)$. **7.2.21.** Начало координат лежит внутри острого угла. **7.2.22.** Точка лежит внутри тупого угла. **7.2.23.** Точки A, B лежат внутри одного угла; точки C и D лежат в вертикальных углах, смежных с углом, содержащим точку A; точка E лежит в угле, вертикальном к углу, содержащему точку A. **7.2.24.** Точки A, B лежат между плоскостями, C и D лежат в разных внешних областях. **7.2.25.** $\arccos(-\frac{1}{3})$. **7.2.26.** а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$; б) $\dfrac{x-3}{2}=$ $=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$; в) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-3}{-2}$. **7.2.27.** а) $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$; б) $x=2t+1$, $y=4t-1$, $z=-3$; в) $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$. **7.2.28.** а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{4}$; б) $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y+1}{12}=\dfrac{z-1}{13}$; в) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$. **7.2.29.** а) $y=2$, $z=3$; $x=1$, $z=3$; $x=1$, $y=2$; б) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$; в) $x=1$, $y=2$; $x=1$, $z=3$; $y=2$, $z=3$; г) $3y-2z=0$, $x=1$; $3x-z=0$, $y=2$; $2x-y=0$, $z=3$. **7.2.30.** $18x-11y+3z-47=0$. **7.2.31.** $x-8y+5z-3=0$. **7.2.32.** $2x-4y-8z+1=0$, $2x-y+z-1=0$. **7.2.33.** $(3,7,-6)$. **7.2.34.** $x=3+t$, $y=2-t$, $z=1-t$. **7.2.35.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$. **7.2.36.** $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. **7.2.37.** $x=11+t$, $y=t$, $z=2+2t$.

7.2.38. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$. **7.2.39.** $x=8t-3$, $y=-3t-1$, $z= =-4t+2$. **7.2.40.** $x=2t-5$, $y=-3t+1$, $z=-4t$. **7.2.41.** а) Прямая параллельна плоскости; б) прямая лежит в плоскости; в) прямая и плоскость пересекаются в точке $(2,-3,6)$; г) прямая параллельна плоскости. **7.2.42.** а) Три плоскости пересекаются в точке $(3,5,7)$; б) плоскости попарно параллельны; в) плоскости проходят через одну прямую; г) плоскости образуют призму. **7.2.43.** $2x-2y-2z-1=0$. **7.2.44.** $4y-3z-3=0$. **7.2.45.** $(3,-2,4)$. **7.2.46.** $Q(2,-3,2)$. **7.2.47.** $Q(4,1,-3)$. **7.2.48.** $(1,4,-7)$. **7.2.49.** $Q(-5,1,0)$. **7.2.50.** $Q(1,-2,2)$. **7.2.51.** $(2,-3,-5)$. **7.2.52.** Биссектриса AD: $\frac{x-1}{7}=\frac{y-6}{5}=\frac{z+8}{2}$; высота AE: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-6}{6}=\frac{z+8}{5}$; медианы AF: $x=1+5t$, $y=6+3t$, $z=-8+t$; BG: $x=3+4t$, $y=8$, $z=-7-t$; CH: $x=9+14t$, $y=10+6t$, $z=-7+t$; точка пересечения медиан $M(\frac{13}{3},8,-\frac{22}{3})$. **7.2.53.** а) 21; б) 6; в) 15. **7.2.54.** 25. **7.2.55.** а) 13; б) 3; в) 7. **7.2.56.** а) Совпадают; б) параллельны и лежат в плоскости $12x-3y+8z=0$; в) скрещиваются и равноудалены от плоскости $4x-2y-z=0$; г) пересекаются в точке $(10,-1,0)$ и лежат в плоскости $x-7y+3z-17=0$. **8.1.1**. а) Образуют линейное пространство тогда и только тогда, когда прямая проходит через начало координат; б), в) не образуют линейного пространства. **8.1.2**. а), в), г) Да; б) нет. **8.1.8**. а) Любая абелева группа V с нулем 0, умножение на элементы из поля определяется так: $\forall\alpha\in\mathbb{F}\ \ \forall x\in V\ \alpha x=0$. **8.2.5**. а) Да, будут линейно независимы; б) да; в) нет. **8.2.6**. а) Нет; б) да. **8.2.7**. а),б) Линейно зависима **8.2.8**. а), б) линейно зависима; в) линейно независима; г) линейно зависима; д) линейно независима. **8.2.9**. а), б) Линейно независима; в) – д) линейно независима при любом n; е) линейно независима при $n=2$ и $n=3$, при $n\geq 4$ линейно зависима. **8.2.13**. а) $t=15$; б) t — любое число; в) t — любое число; г) $t\neq 12$; д) такого значения t не существует. **8.2.14**. а) Например, векторы a_1,a_2,a_4 образуют максимальную линейно независимую подсистему; $a_3=a_1-a_2$; б) например, векторы a_1,a_2,a_3 образуют максимальную линейно независимую подсистему; $a_4=2a_1-3a_2+4a_3$, $a_5=a_1+5a_2-5a_3$; в) например, векторы a_1,a_2,a_5 образуют максимальную линейно независимую подсистему; $a_3=a_1-a_2+a_5$, $a_4=3a_1+4a_2-2a_5$. **8.2.15**. а) a_1,a_3; a_1,a_4; a_2,a_3; a_2,a_4; б) a_1,a_2; a_2,a_3; в) любые два вектора образуют максимальную линейно независимую подсистему; г) a_1,a_4; a_2,a_4; a_3,a_4; д) любые три вектора, кроме a_1,a_2,a_3 и a_3,a_4,a_5, образуют максимальную линейно независимую подсистему. **8.2.16**. Тогда и только тогда, когда либо система линейно независима, либо все векторы, не входящие в максимальную линейно независимую подсистему, нулевые. **8.2.17**. Две. **8.2.18**. Размерности: а) $n+1$; б) $\dfrac{n+2}{2}$ при n четном и $\dfrac{n+1}{2}$ при n нечетном; в) kn; г) n^2; д) $\dfrac{n^2+n}{2}$; е) $\dfrac{n^2-n}{2}$; ж) n; з) 1. **8.2.21**. а) $(1,2,3)$; б) $(1,1,1)$; в) $(0,2,1,2)$. **8.2.22**. а) $x_1 = -27y_1 - 71y_2 - 41y_3$; $x_2 = 9y_1 + 20y_2 + 9y_3$; $x_3 = 4y_1 + 12y_2 + 8y_3$; б) $x_1 = 2y_1 + y_3 - y_4$; $x_2 = -3y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4$; $x_3 = y_1 - 2y_2 + 2y_3 - y_4$; $x_4 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4$. **8.2.23**. в) $(11,5; 11,5; -9)$; г) $(-11,-1,6)$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 3,5 & 2,5 \\ 1 & 4,5 & 4,5 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -9 & 1 & -9 \\ -4 & 0 & -5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **8.2.24**. $(\tau_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$, где $\tau_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i<j; \\ 1, \text{ если } i=j; \\ (-1)^{i-1}C_j^{i-1}\alpha^{j-i+1}, \text{ если } i>j. \end{cases}$ **8.2.25**. $80+107(x-3)+54(x-3)^2 + 12(x-3)^3 + (x-3)^4$. **8.3.1**. Может быть равен 3 или 5. **8.3.2**. а) Да; б) нет. **8.3.3**. а) 2; б) 3; в) 3; г) 2; д) 3; е) 2; ж) 3; з) 2. **8.3.4**. а) 2 при $\alpha = 0$ и 3 при $\alpha \neq 0$; б) 2 при $\alpha = 3$ и 3 при $\alpha \neq 3$; в) 3 при $\alpha \in \{-2,-1,1,2\}$ и 4 при $\alpha \notin \{-2,-1,1,2\}$; г) 3 при $\alpha \in \{-4,0\}$ и 4 при $\alpha \notin \{-4,0\}$. **8.3.13**. а) $x_1 = -8$; $x_2 = 3+x_4$; $x_3 = 6+2x_4$; б) система несовместна; в) $x_1 = -16+x_3+x_4+5x_5$, $x_2 = 23-2x_3-2x_4-6x_5$; г) $x_1 = \frac{1}{3}(1+x_5)$, $x_2 = \frac{1}{3}(1+3x_3+3x_4-5x_5)$; д) $x_1 = \frac{1}{3}(2+x_5)$, $x_2 = \frac{1}{6}(1+3x_3-3x_4+5x_5)$; е) система несовместна. **8.3.14**. а) При $\alpha \neq 0$ система несовместна; при $\alpha = 0$ она совместна и общее решение имеет вид $x_1 = \frac{1}{2}(-5x_3 - 13x_4 - 3)$, $x_2 = \frac{1}{2}(-7x_3 - 19x_4 - 7)$; б) при $\alpha = 0$ система несовместна; при $\alpha \neq 0$ она совместна и общее решение имеет вид $x_1 = \dfrac{4-\alpha}{5\alpha} - \dfrac{3}{5}x_3$, $x_2 = \dfrac{9\alpha-16}{5\alpha}x_3$, $x_4 = \dfrac{1}{\alpha}$; в) система совместна при любом значении α. При $\alpha = 8$ общее решение имеет вид $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - x_1 - \frac{3}{2}x_2$; при $\alpha \neq 8$ общее решение имеет вид $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$; г) при $(\alpha-1)(\alpha+2) \neq 0$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\alpha+2}$. При $\alpha = 1$ общее решение имеет вид $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. При $\alpha = -2$ система несовместна; д) при $(\alpha-1)(\alpha+3) \neq 0$ система имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\alpha+3}$. При $\alpha = 1$ общее решение имеет вид $x_1 = 1-x_2-x_3-x_4$. При $\alpha = -3$ система несовместна; е) при $\alpha(\alpha+3) \neq 0$ система имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{2-\alpha^2}{\alpha(\alpha+3)}, x_2 = \dfrac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha+3)}, x_3 =$

$= \dfrac{\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1}{\alpha(\alpha+3)}$. При $\alpha=0$ и при $\alpha=-3$ система несовместна. **8.3.15**. а) Общее решение: $x_3=-\frac{5}{2}x_1+5x_2$, $x_4=\frac{7}{2}x_1-7x_2$; фундаментальная система решений: $(1,0,-\frac{5}{2},\frac{7}{2})$, $(0,1,5,-7)$; б) общее решение: $x_4=-\frac{1}{4}(9x_1+6x_2+x_3)$, $x_5=\frac{1}{4}(3x_1+2x_2+4x_3)$; фундаментальная система решений: $(4,0,0,-9,3)$, $(0,2,0,-3,1)$, $(0,0,1,-2,1)$; в) система имеет только нулевое решение, фундаментальной системы решений не существует; г) общее решение: $x_4=\frac{1}{11}(-9x_1+3x_2-$ $-10x_3)$, $x_5=\frac{1}{11}(-3x_1+x_2+4x_3)$; фундаментальная система решений: $(11,0,0,-9,-3)$, $(0,11,0,3,1)$, $(0,0,11,-10,4)$; д) система имеет только нулевое решение; е) общее решение: $x_1=x_4-x_5$, $x_2=$ $=x_4-x_6$, $x_3=x_4$; фундаментальная система решений: $(1,1,1,1,0,0)$, $(-1,0,0,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,0,1)$. **8.3.16**. а) x_1,x_2; x_1,x_4; x_2,x_3; x_2,x_5; x_3,x_4; x_4,x_5; б) x_1; x_2; x_3; x_4. **8.3.19**. Если $r<n-1$, то $\tilde{r}=0$; если $r=n-1$, то $\tilde{r}=1$; если $r=n$, то $\tilde{r}=n$. **8.3.22**. а) $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=2\beta_i$, $i=1,2,\ldots,s$; б) $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\lambda\beta_i$, $i=1,2,\ldots,s$. **8.3.23**. а), б) система должна быть однородной. **8.4.1**. а) Не является; б) является; в) не является. **8.4.2**. В а), б) при $a=0$, в) – д) — линейные пространства, не являющиеся конечномерными; в б) при $a\neq 0$ не является пространством; в е) — подпространство размерности m. **8.4.3**. а), б) Не является; в) является, не конечномерное. **8.4.4**. а), б) Не является; в) является, n^2-1; г) является, n; д) является, 1. **8.4.5**. а) Является при $\alpha=0$, представляет собой множество всех векторов, перпендикулярных к $\vec{a}$, и $\vec{0}$; б) является при $\vec{b}=\vec{0}$, представляет собой множество всех векторов, коллинеарных вектору $\vec{a}$. **8.4.9**. а) Нет; б) да. **8.4.10**. $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m$. **8.4.11**. а) Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы a_1, a_2, a_4; б) размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы a_1, a_2, a_5. **8.4.12**. а) Например, $x_1-x_3-x_4=0$, $x_2+x_3-x_4=0$; б) например, $x_1-x_2-2x_3=0$, $x_1-x_2+2x_4=0$, $2x_1+x_2-x_5=0$. **8.4.14**. а) Размерность суммы 3, размерность пересечения 1; б) размерность суммы 3, размерность пересечения 2. **8.4.15**. а) Базис суммы образуют, например, векторы a_1,a_2,b_1; базис пересечения состоит из одного вектора, например $c=2a_1+a_2=b_1+b_2=(3,5,1)$; б) базис суммы образуют, например, векторы a_1,a_2,a_3,b_2; базис пересечения состоит, например, из векторов $b_1=-2a_1+a_2+a_3$; $b_3=5a_1-a_2-2a_3$; в) базис суммы образуют, например, векторы a_1,a_2,a_3,b_1; базис пересечения состоит, например, из векторов $c_1=a_1+a_2+a_3=b_1+b_2=(1,2,2,1)$; $c_2=2a_1+2a_3=b_1+b_3=(2,2,2,2)$; г) базис суммы образуют, на-

пример, векторы a_1, a_2, a_3, b_3; базис пересечения состоит, например, из векторов $b_1 = a_2 - a_1$; $b_2 = a_1 - a_2$; д) базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, a_3, b_2, b_3; базис пересечения состоит, например, из векторов $b_1 = a_1 - a_2$; $b_2 = a_3 - a_2$. **8.4.19**. б) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$; в) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ и $D_1 \cup D_2 = [a, b]$. **8.4.20**. $u_1 = \frac{1}{n}((n-1)\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n, -\alpha_1 + (n-1)\alpha_2 - \ldots - \alpha_n, \ldots, -\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots (n-1)\alpha_n)$, $u_2 = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}(1, \ldots, 1)$. **8.4.25**. $u \in L$, $v \notin L$. **8.4.26**. а) $x_1 - x_3 = 1$, $x_2 - x_4 = -1$; б) $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4$; в) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -3$, $x_1 + x_3 - x_5 = 0$; г) $x_1 + x + 2 - x_3 = 1$, $x_2 - x_4 = -1$, $x_1 - x_5 = -1$. **8.4.28**. а) $L \cap K = \{e\}$, где $e = (-2, -5, -1, 1, -1)$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = e + \langle b, d\rangle$; б) $L \cap K = \{e\}$, где $e = (0, 1, -1, -2, -3)$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = e + \langle b, d\rangle$; в) $L \cap K = \{e\}$, где $e = (-5, 11, -16, -11, 7)$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = e + \langle b, d\rangle$; г) $L \cap K = \emptyset$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = a + \langle a - c, b, d\rangle$. **8.4.29**. а) $L \cap K = \emptyset$; б) $L \cap K = \{g\}$, где $g = (2, 1, -2, 2)$; в) $L \subseteq K$. **8.4.30**. а) $L \cap K = \{g\}$, где $g = (1, 2, 1, 0, 1)$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = a + \langle b, c, e, f\rangle$; б) $L \cap K = \emptyset$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = V$, где V — пространство всех строк длины 5; в) $L \cap K = \emptyset$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = a + \langle b, c, e, a - d\rangle$, а $\langle b, c\rangle \cap \langle e, f\rangle = \langle g\rangle$, где $g = 2b + c = f - e = (5, 1, 0, 0, 5)$; г) $L \cap K = g + \langle f\rangle$, где $g = (-2, -1, 6, 6, 7)$; д) $L \cap K = \emptyset$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = a + \langle a - d, b, c\rangle$, $\langle b, c\rangle = \langle e, f\rangle$; е) $L = K$. **8.4.31**. а) $L \cap K = h + \langle e\rangle$, где $h = (1, 2, 4, 5)$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = a + \langle b, c, f, g\rangle$ — пространство всех строк длины 4; б) $L \cap K = h + \langle f\rangle$, где $h = (0, 3, 1, 5, 2)$, $\langle\langle L, K\rangle\rangle = a + \langle b, c, d, e, g\rangle$ — пространство всех строк длины 5.

9.1.1. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **9.1.2**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **9.1.3**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
9.1.4. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -12 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; г) $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 & 20 & 25 \\ 12 & 15 & 20 \end{pmatrix}$. **9.1.5**. а) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & 6 \\ -12 & 4 & -12 \end{pmatrix}$;
б) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 & -4 & -16 \\ 9 & 3 & 12 \\ -6 & -2 & -8 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -14 & 6 & -12 \\ -35 & 15 & -30 \\ 7 & -3 & 6 \end{pmatrix}$;
г) $\frac{1}{51}\begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 24 & -64 & 16 \\ 15 & -40 & 10 \end{pmatrix}$. **9.1.6**. а) $(\frac{1}{2}\ 1\ \frac{3}{2})$; б) $(3\ -2\ 1)$; в) $(2\ -2\ -1)$;

г) $(1\ -2\ 4)$. **9.1.8**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. **9.1.11**. а) Да, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) нет; в) нет; г) да, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **9.1.12**. а) При умножении слева $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$; б) при умножении справа $\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$; в) при умножении с двух сторон $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & bc \\ ac & ad & c^2 & cd \\ ab & b^2 & ad & bd \\ bc & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}$.

9.1.10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **9.1.13**. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9.1.14. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.1.15. а) В матрице A поменяются местами два столбца с номерами, равными номерам переставляемых векторов в базисе N; б) в матрице A поменяются местами две строки с номерами, равными номерам переставляемых векторов в базисе M.

9.1.16. а) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 & 16 \\ 16 & -29 & 1 & 75 \\ 39 & -69 & 3 & 177 \end{pmatrix}$; б) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 2 \\ -6 & 15 & -17 & 10 \end{pmatrix}$.

9.1.17. а) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

9.1.18. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **9.1.19**. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

9.1.20. $\begin{pmatrix} 164 & 21 \\ -203 & -26 \end{pmatrix}$. **9.2.1**. $\mathsf{dim}V \le \mathsf{dim}U + \mathsf{dim}W$. **9.2.2**. $r = 1$, $d = n - 1$ или $r = 0$, $d = n$. **9.2.3**. Ядро — $\langle \vec{a} \rangle$, образ — множество всех векторов, ортогональных к $\vec{a}$. **9.2.4**. а) Базис образа состоит, например, из векторов $(1, 5, -3)$, $(2, 6, -2)$, а базис ядра — из векторов $(1, -2, 1, 0)$ и $(2, -3, 0, 1)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = \mathsf{d}(\mathcal{A}) = 2$; б) базис образа — $(1, 2, 3)$, $(-3, 4, 1)$, $(4, -1, 2)$; базис ядра — $(-1, -2, 5, 5)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = 3$, $\mathsf{d}(\mathcal{A}) = 1$; в) базис образа — $(1, 2, 3, -2)$, $(2, 4, 4, -4)$, $(2, 3, 4, -4)$, $(-2, -5, -2, 7)$; базис ядра — $(2, 1, 2, 0, 0)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = 4$, $\mathsf{d}(\mathcal{A}) = 1$; г) базис образа — $(1, 1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1, 0)$, $(1, 1, -1, 1)$; базис ядра — $(-1, 0, 1, 1, 0)$, $(-1, 1, 1, 0, 1)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = 3$, $\mathsf{d}(\mathcal{A}) = 2$. **9.2.5**. а), б) Образ — множество всех многочленов степени $\le n - 1$, ядро — множество всех постоянных многочленов. **9.2.6**. а) Базис образа состоит, например, из векторов $(1, 4, 5, 6)$, $(2, 3, 6, 7)$, а базис ядра — из векторов $(1, -2, 1, 0)$ и $(2, -3, 0, 1)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = \mathsf{d}(\mathcal{A}) = 2$; б) базис образа — $(1, 2, 1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$; базис ядра — $(-1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, -1, 1)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = 2$, $\mathsf{d}(\mathcal{A}) = 2$; в) базис образа — $(1, 1, 0, 2, 1)$, $(2, 0, 1, 1, 3)$; базис ядра — $(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = 2$, $\mathsf{d}(\mathcal{A}) = 3$; г) базис образа — $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(2, 1, 2, 3, 4)$, $(-2, 0, 1, 2, 3)$; базис ядра — $(-1, 0, 0, 0, 1)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$; $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = 3$, $\mathsf{d}(\mathcal{A}) = 2$. **9.2.16**. б) $-\mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования. **9.3.5**. а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, собственные векторы имеют вид $\alpha(1, 1, -1)$, где $\alpha \ne 0$; б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, собственные векторы имеют вид $\alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(0, 0, 1)$, где $\alpha_1 \ne 0$ или $\alpha_2 \ne 0$; в) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = = \lambda_3 = 0$, собственные векторы для значения 1 имеют вид $\alpha(1, 1, 1)$, а для значения 0 — $\alpha(1, 2, 3)$, где $\alpha \ne 0$; г) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, собственные векторы имеют вид $\alpha(3, 1, 1)$, где $\alpha \ne 0$; д) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, собственные векторы для значения 3 имеют вид $\alpha(1, 2, 2)$, а для значения -1 — $\alpha(1, 2, 1)$, где $\alpha \ne 0$; е) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, собственные векторы для значения 1 имеют вид $\alpha_1(2, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, -1)$, а для значения -1 — $\alpha(3, 5, 6)$, где α_1 и α_2 одновременно не равны нулю и $\alpha \ne 0$; ж) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$, собственные векторы для значения 1 имеют вид $\alpha_1(1, 2, 1)$, для значения $2 + 3i$ — $\alpha(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$, для значения $2 - 3i$ — $\alpha(3 + 3i, 5 + 3i, 4)$, где $\alpha \ne 0$; з) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, собственные векторы для значения 1 имеют вид $\alpha(0, 0, 0, 1)$, а для значения 0 — $\alpha_1(0, 1, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, 1, 0)$, где α_1 и α_2 одновременно не равны нулю и $\alpha \ne 0$; и) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, собственные векторы для значения 1 имеют вид $\alpha_1(1, 0, 1, 0) + +\alpha_2(0, 0, 0, 1)$, а для значения 0 — $\alpha_1(0, 1, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, 1, 0)$, где α_1 и α_2 одновременно не равны нулю; к) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, собственные векторы имеют вид $\alpha_1(1,1,-1,0)+ +\alpha_2(1,1,0,1)$, где α_1 и α_2 одновременно не равны нулю. **9.3.6**. а) Оператор является оператором простой структуры; базис из собственных векторов: $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = = (1,0,-3)$, матрица оператора в этом базисе: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) оператор не является оператором простой структуры; в) оператор является оператором простой структуры; базис из собственных векторов: $e_1 = (1,1,0,0)$, $e_2 = (1,0,1,0)$, $e_3 = (1,0,0,1)$, $e_4 = (1,-1,-1,-1)$; матрица оператора в этом базисе: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; г) оператор не является оператором простой структуры. **9.3.9**. Единственное собственное значение $\lambda = 1$. Собственные векторы имеют вид $\alpha_1(a_1+ +2a_2) + \alpha_2(a_2 + a_3 + 2a_4)$, где α_1 и α_2 одновременно не равны нулю. **9.3.10**. Нулевое подпространство и подпространства, состоящие из всех многочленов степени не выше k, где $k = 0,1,2,\ldots,n$. **9.3.11**. Подпространство, порожденное вектором $a_1 = (2,2,-1)$, любое подпространство пространства, порожденного векторами $a_2 = (1,1,0)$ и $a_3 = (1,0,-1)$, любое двумерное подпространство, содержащее вектор a_1 и все трехмерное пространство. **9.3.12**. Инвариантными подпространствами являются нулевое подпространство и любое подпространство, порожденное какой угодно подсистемой системы векторов a_1, $a_2, \ldots,$ a_n; их число равно 2^n. **9.3.13**. Подпространство, порожденное вектором $(1,-2,1)$; подпространство, порожденное векторами $(1,1,1)$ и $(1,2,3)$; все пространство и нулевое подпространство. **9.3.14**. Скалярные операторы и только они.

В ответах к задачам **9.3.15–9.3.17** указаны нетривиальные (отличные от нулевого и от всего пространства) инвариантные подпространства. Для краткости множество всех векторов, параллельных данной прямой (плоскости), называется прямой (плоскостью).

9.3.15. $\langle\vec{a}\rangle$, множество всех векторов, ортогональных к $\vec{a}$. **9.3.16**. а) все прямые в плоскости α, прямая l, плоскость α, все плоскости, включающие прямую l; б) все прямые в плоскости α, прямая, перпендикулярная к α, все плоскости, перпендикулярные к α. **9.3.17**. а), б) $U_1 + W_1$ для любых подпространств $U_1 \subseteq U$ и $W_1 \subseteq W$; в) если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — все различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$

и $U_k = \mathsf{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_k\mathcal{E})$, $k = 1,\ldots,m$, то все инвариантные подпространства исчерпываются суммами $\sum_{k=1}^{m} W_k$, где $W_k \subseteq U_k$. **9.3.19.** а) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, корневые подпространства: для λ_1 — $\langle(1,1,1)\rangle$, для λ_2 — $\langle(1,1,0),\ (1,0,-3)\rangle$; б) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, корневые подпространства: для λ_1 — $\langle(1,2,2)\rangle$, для λ_2 — $\langle(1,1,0),\ (1,0,-1)\rangle$; в) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; все пространство является корневым подпространством; г) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, корневые подпространства: для λ_1 — $\langle(1,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$, для λ_3 — $\langle(1,0,0,0),\ (0,1,0,1)\rangle$; д) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, корневые подпространства: для λ_1 — $\langle(1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle$, для λ_3 — $\langle(3,1,0,0),\ (0,-2,3,1)\rangle$. **9.3.20.**

а) $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (1,4,3)$, $f_3 = (3,0,1)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (1,-3,-2)$, $f_3 = (1,0,1)$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $f_1 = (3,1,0)$, $f_2 = (6,6,-8)$, $f_3 = (2,1,-1)$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (3,3,1)$, $f_3 = (5,0,1)$; $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $f_1 = (-1,0,0,0)$, $f_2 = (1,1,1,1)$, $f_3 = (0,0,-1,0)$, $f_4 = (1,1,0,0)$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $f_1 = (2,1,0,0)$, $f_2 = (-1,-1,-1,0)$, $f_3 = (1,0,0,-1)$, $f_4 = (3,6,7,1)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $f_1 = (1,0,0,0)$, $f_2 = (1,1,3,4)$, $f_3 = (0,0,1,0)$, $f_4 = (0,0,3,3)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

з) $f_1 = (0,-1,0,-1)$, $f_2 = (2,2,2,2)$, $f_3 = (0,1,0,0)$, $f_4 = (-4,-4,0,0)$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

и) $f_1 = (0,1,0,0)$, $f_2 = (-1,-3,0,0)$, $f_3 = (0,1,1,0)$, $f_4 = (0,-10,4,2)$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

к) $f_1 = (-2, 2, 1, 2)$, $f_2 = (0, 0, 1, 1)$, $f_3 = (1, 2, 1, -1)$, $f_4 = (1, 1, 0, 0)$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

л) $f_1 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $f_2 = (0, 0, 1, 0, -1)$, $f_3 = (0, 1, -1, -1, 1)$, $f_4 = (1, -2, 0, 2, 1)$, $f_5 = (1, -4, 6, -4, 1)$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

м) $f_1 = (6, 3, 1, 0, 0)$, $f_2 = (-3, -2, -1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $f_4 = (-1, 0, 1, -2, 3)$, $f_5 = (1, -1, 1, -1, 1)$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

н) $f_1 = (36, 36, 0, 30, 35, 72)$, $f_2 = (0, 216, -36, 66, 119, 126)$, $f_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $f_4 = (0, 0, 0, 1, 5, 8)$, $f_5 = (0, 0, 0, 0, 7, 6)$, $f_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

о) $f_1 = (-2, 0, 2, 0, 2, 0)$, $f_2 = (0, 0, 0, 0, 2, 0)$, $f_3 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $f_4 = (0, 0, 0, 3, 0, 1)$, $f_5 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $f_6 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

п) $f_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $f_2 = (2, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $f_3 = (1, 2, 1, 0, 1, 2)$, $f_4 = (-1, 0, 2, -1, 0, -2, -1)$, $f_5 = (2, 1, -2, 1, 1, 1, 2)$, $f_6 = (3, -1, 0, 0, 0, 2, 3)$; $f_7 = (1, 3, 0, 0, 0, 3, 4)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

р) $f_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$,
$f_2 = (2, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$,
$f_3 = (1, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$,
$f_4 = (-1, 0, 2, -1, 0, 0, 0)$,
$f_5 = (2, 1, -2, 1, 1, 0, 0)$,
$f_6 = (3, -1, 1, 1, 1, 2, 3)$;
$f_7 = (1, 3, -1, 1, -1, 3, 4)$;
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.3.21. а) $2^{n-1}\begin{pmatrix} 2+n & 2n & -3n \\ 4n & 8n+2 & -12n \\ 3n & 6n & 2-9n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $(-1)^n\begin{pmatrix} 3n+1 & -15n & -9n \\ 3n & 1-15n & -9n \\ -4n & 20n & 12n+1 \end{pmatrix}$;

г) $3^{n-1}\begin{pmatrix} 3n+3 & 6n & -15n \\ n & 2n+3 & -5n \\ n & 2n & 3-5n \end{pmatrix}$;

д) $2^{-n-1}\begin{pmatrix} 2-n & -2n & 3n \\ -4n & 2-8n & 12n \\ -3n & -6n & 2+9n \end{pmatrix}$; е) матрица из п. б) необратима;

ж) $(-1)^n\begin{pmatrix} 3n+1 & -15n & -9n \\ 3n & 1-15n & -9n \\ -4n & 20n & 12n+1 \end{pmatrix}$;

з) $3^{-n-1}\begin{pmatrix} 3-3n & -6n & 15n \\ -n & 3-2n & 5n \\ -n & -2n & 3+5n \end{pmatrix}$. **9.3.22**. а) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$;

б) $2^{n-1}\begin{pmatrix} 4^n+(-1)^n & 4^n+(-1)^{n+1} \\ 4^n+(-1)^{n+1} & 4^n+(-1)^n \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3^{n+2}-8\cdot 5^n & 12\cdot 5^n-4\cdot 3^{n+1} \\ 2\cdot 3^{n+1}-6\cdot 5^n & 9\cdot 5^n-8\cdot 3^n \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 9\cdot 2^n+8\cdot(-1)^{n+1}3^n & (-1)^n 4\cdot 3^{n+1}-3\cdot 2^{n+2} \\ 3\cdot 2^{n+1}+(-1)^{n+1}2\cdot 3^{n+1} & (-1)^n 3^{n+2}-2^{n+3} \end{pmatrix}$.

10.1.1. а) $\begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x^3+x^2-2x-2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x^2+x & 0 \\ 0 & 0 & x^3+x^2 \end{pmatrix}$.

10.1.2. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x(x-1)(x-2) & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1)(x-2) \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1)(x-2)(x-3) \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, где $f = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$;

г) $\begin{pmatrix} d(x) & 0 \\ 0 & \frac{f(x)g(x)}{\beta d(x)} \end{pmatrix}$, где $d(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, имеющий старший коэффициент 1; β — произведение старших коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & fgh & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}$.

10.1.3. а) $x+1$, $(x-1)^2$; б) $x+1$, $x-1$, $x-1$; в) элементарных делителей не существует.

10.1.4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4-2x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+2x^2-4x-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^6-12x^4+48x^2-64 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10.1.5. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x(x+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x(x+1)(x-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2(x+1)^3(x-1)^2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3-4x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3-4x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4-4x^2 \end{pmatrix}$.

10.2.2. б) Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **10.2.3**. Скалярные матрицы. **10.2.6**. а), б) Подобны; в) не являются подобными.

10.3.3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; в) таких инвариантных множителей у матрицы $A - xE$ быть не может.

10.3.4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

г), д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **10.3.8**. Для скалярных матриц. **10.3.10**. Спектр матрицы A содержится в множестве $\{0, \alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha^k = 1\}$; клетки Жордана, относящиеся к 0, имеют порядки $\leq m$, а клетки Жордана, относящиеся к ненулевым элементам спектра, имеют порядок 1. **11.1.1**. а) Нет; б) да; в) да. **11.1.2**. Нет. **11.1.3**. а) $2+i$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{17}$; б) $6-6i$, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{3}$. **11.1.4**. а) Можно добавить векторы $(2,2,1,0)$ и $(5,-2,-6,-1)$; б) можно добавить векторы $(1,-2,1,0)$ и $(25,4,-17,-6)$; в) можно добавить векторы $(1,1,1,0)$ и $(-1,1,0,1)$; г) можно добавить векторы $(2,3,1,0)$ и $(1,-1,1,1)$. **11.1.5**. а) Один из векторов $\frac{1}{3}(2,-2,1)$ или $\frac{1}{3}(-2,2,1)$; б) например, $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$; $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$; в) один из векторов $\frac{1}{3}(2,-1,2)$ или $\frac{1}{3}(-2,1,-2)$; г) например, $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$. **11.1.6**. а) $(1,2,2,-1)$, $(2,3,-3,2)$, $(2,-1,-1,-2)$; б) $(1,1,-1,-2)$, $(2,5,1,3)$; в) $(2,1,3,-1)$, $(3,2,-3,-1)$, $(1,5,1,10)$; г) $(2,3,-4,-6)$, $(-3,2,6,-4)$, $(4,6,\ 2,3)$; д) $(1,1,-1,-2)$, $(2,5,1,3)$, $(2,-1,1,0)$. **11.1.8**. Для многочленов $f=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\alpha_n\dfrac{x^n}{n!}$, $g=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\beta_n\dfrac{x^n}{n!}$ скалярное произведение $(f,g)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k$. **11.1.9**. а) Например, $(2,-2,-1,0)$, $(1,1,0,-1)$; б) например, $(0,1,0,-1)$, $(1,0,-1,0)$. **11.1.10**. а) Например, $6x_1-9x_2-x_3=0$, $x_2+x_4=0$; б) например, $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $-18x_1+x_2+18x_3+11x_4=0$. **11.1.14**. а) $y=(1,-1,-1,5)$, $z=(3,0,-2,-1)$; б) $y=(3,1,-1,-2)$, $z=(2,1,-1,4)$; в) $y=(5,2,-9,-8)$, $z=(9,-5,3,1)$; г) $y=(0,-3,5,2)$, $z=(2,-2,-2,2)$; д) $y=(5,-5,-2,-1)$, $z=(2,1,1,3)$; е) $y=(1,2,-5,1)$, $z=(-4,-2,0,8)$. **11.1.20**. а) 5; б) 2. **11.1.21**. а) 3; б) 4. **11.1.22**. а) 60^o; б) 30^o. **11.1.23**. а) $|x|=3\sqrt{2}$, $|y|=6$, $|x-y|=3\sqrt{2}$. Таким образом, треугольник равнобедренный. $\widehat{(x,x-y)}=90^o$, так что треугольник прямоугольный. $\widehat{(x,y)}=45^o$ и является внутренним углом треугольника. $\widehat{(y,x-y)}=135^o$, поэтому внутренним углом треугольника является $\widehat{(y,y-x)}=45^o$; б) $|x|=|y|=|x-y|=6$. Таким образом, треугольник равносторонний; $\widehat{(x,y)}=\widehat{(x,x-y)}=60^o$ и являются внутренними углами треугольника; $\widehat{(y,x-y)}=120^o$, поэтому внутренним углом треугольника является $\widehat{(y,y-x)}=60^o$.

11.2.1. а) $\begin{pmatrix}25&11\\-21&-9\\-13&-6\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&3&-6\end{pmatrix}$. **11.2.2**. а) $\begin{pmatrix}3&6\\-1&-3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-36&-37&-15\\30&30&14\\26&27&9\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0&1&1\\2&-1&-1\\-4&6&4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}8&0&0\\12&-1&-11\\12&51&49\end{pmatrix}$.

11.2.3. а) $\begin{pmatrix}128&313&454\\36&117&145\\-61&-197&-245\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5&5&3\\-5&-7&-2\\3&6&0\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **11.2.4**. $\mathcal{A}^*$ — оператор проектирования на биссектрису второй и четвертой четверти параллельно оси Oy. **11.2.6**. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

11.2.7. а) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

11.2.8. а) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -\frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

11.2.12. а) $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$; базис составляют, например, векторы $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ и $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$; б) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3i$, $\lambda_3 = -3i$; базис — $e_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4-3i, 2+6i, 5)$, $e_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4+3i, 2-6i, 5)$; в) $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = 2-i$, $\lambda_3 = 3-i$; базис — $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$; г) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$; базис — $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$, $e_3 = \frac{1}{2}(1,-1,i,i)$, $e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-i,-i)$.

11.3.10. а) $f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1,0)$, $f_2 = (0,0,1)$, $f_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1,-1,0)$, $\quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $$f_1 = \frac{1}{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}(-2-\sqrt{2},\ -4-3\sqrt{2},\ \sqrt{2}),$$
$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{84}}(6\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}),$$
$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{84}}(0,\ \sqrt{42-28\sqrt{2}},\ \sqrt{42+28\sqrt{2}}),$$
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2+7\sqrt{7}}{12} & -\frac{\sqrt{42-28\sqrt{2}}}{12} \\ 0 & \frac{\sqrt{42-28\sqrt{2}}}{12} & \frac{-2+7\sqrt{7}}{12} \end{pmatrix};$$

в) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

г) $f_1 = (0,0,-1)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

д) $f_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)$,
$f_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,1)$,
$f_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$,
$f_4 = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

е) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$,
$f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.3.11. а) Да; б) нет. **11.3.12**. Может, в базисе, который не является ортонормированным. **11.3.13**. а) Собственные значения i, $-i$; ортонормированный базис из собственных векторов $f_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}((1+\sqrt{2})ie_1 + e_2$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}e_1 + (1+\sqrt{2})ie_2$; б) собственные значения $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$; ортонормированный базис из собственных векторов $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1+e_2)$.

11.3.14. а) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -i \\ -2i & i & 2 \\ i & -2i & 2 \end{pmatrix}$;

б) $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$, $Q = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2i & -i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

11.4.1. а) $f_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$,
$f_2 = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$,
$f_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, $A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$;

б) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,-4)$,
$f_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)$, $A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$;

в) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)$,
$f_3 = (0, 0, 1)$,
$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$,
$A' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$,
$f_2 = (0, 1, 0)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$,
$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

е) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$,
$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$,
$f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$,
$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$,
$f_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$,
$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)$,
$f_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, -1)$,
$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

11.4.2. а) $\boldsymbol{A}^{100} = \begin{pmatrix} 2^{99} + 2^{299} & 2^{99} - 2^{299} \\ 2^{99} - 2^{299} & 2^{99} + 2^{299} \end{pmatrix}$, $\sqrt{\boldsymbol{A}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}^{-50} = \begin{pmatrix} 2^{-51} + 2^{-151} & 2^{-51} - 2^{-151} \\ 2^{-51} - 2^{-151} & 2^{-51} + 2^{-151} \end{pmatrix}$;

б) $\boldsymbol{A}^{100} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 6^{100} + 1 & 2(6^{100} - 1) \\ 2(6^{100} - 1) & 6^{100} + 4 \end{pmatrix}$,

$\sqrt{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4\sqrt{6} + 1 & 2(\sqrt{6} - 1) \\ -2(\sqrt{6} - 1) & \sqrt{6} + 4 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}^{-50} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 6^{-50} + 1 & 2(6^{-50} - 1) \\ 2(6^{-50} - 1) & 6^{-50} + 4 \end{pmatrix}$.

11.4.6. б) Отражение относительно подпространства U параллельно $U^\perp$ для любого подпространства $U \subseteq V$.

11.4.8. а) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 - i & 1 \\ -1 & 2 + i \end{pmatrix}$;

б) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(1 + i) & 1 + i \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$.

11.4.10. в) Линейный оператор двумерного пространства, заданный в ортонормированном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и вектор $v = (1,1)$ в том же ортонормированном базисе.

11.4.11. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

12.1.3. Базис L образует вектор $(3,-1)$, базис R — вектор $(2,-1)$. **12.1.4**. а) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ над $\mathbb{R}$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ над $\mathbb{C}$; б) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ над $\mathbb{R}$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ над $\mathbb{C}$; в) $y_1^2-y_2^2$ над $\mathbb{R}$, $z_1^2+z_2^2$ над $\mathbb{C}$; г) $y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$ над $\mathbb{R}$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$ над $\mathbb{C}$; д) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ над $\mathbb{R}$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ над $\mathbb{C}$. **12.1.5**. а) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $x_1 = y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2-\frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$; б) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{2}y_1+y_2$, $x_2 = y_2+y_3$, $x_3 = -y_2+y_3$; в) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $x_1 = y_1-y_2-y_3$, $x_2 = y_1+y_2-y_3$, $x_3 = y_3$; г) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{5}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$; д) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $x_1 = -\frac{3}{4}y_1-\frac{1}{4}y_2+\frac{1}{6}\sqrt{3}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2$, $x_3 = \frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2$; е) $y_1^2-y_2^2$, $x_1 = y_1-y_2-y_3$, $x_2 = y_1+y_2-y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$; ж) $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{1}{\sqrt{15}}y_2+\frac{2}{\sqrt{85}}\sqrt{3}y_3-\frac{1}{\sqrt{629}}y_4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}y_2-\frac{6}{\sqrt{85}}\sqrt{3}y_3+3\frac{1}{\sqrt{629}}y_4$, $x_3 = \frac{1}{17}\sqrt{85}y_3+\frac{6}{\sqrt{629}}y_4$, $x_4 = \frac{1}{37}\sqrt{629}y_4$. **12.1.6**. а) $2y_1^2+10y_2^2+190y_3^2$, $y_1 = x_1-\frac{1}{2}x_2+x_3$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2-\frac{1}{10}x_3$, $y_3 = \frac{1}{10}x_3$; б) $3y_1^2-30y_2^2+530y_3^2$, $y_1 = x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{2}x_3$, $y_2 = \frac{1}{3}x_2-\frac{1}{20}x_3$, $y_3 = \frac{1}{20}x_3$; в) $2y_1^2+6y_2^2-6y_3^2+2y_4^2$, $y_1 = \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{6}x_3$, $y_3 = \frac{1}{6}x_3+\frac{1}{2}x_4$, $y_4 = \frac{3}{2}x_4$. **12.1.7**. а) $3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$, $x_1 = \frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$, $x_2 = \frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$, $x_3 = -\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$; б) $9y_1^2+18y_2^2-9y_3^2$, $x_1 = \frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$; в) $3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2$; г) $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2$; д) $4y_1^2+8y_2^2+12y_3^2-4y_4^2$, $x_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4)$, $x_2 = \frac{1}{2}(y_1-y_2-y_3+y_4)$, $x_3 = \frac{1}{2}(y_1+y_2-y_3-y_4)$, $x_4 = \frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4)$; е) $9y_1^2+9y_2^2+9y_3^2$, $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{3}(y_2+2y_3+2y_4)$, $x_3 = \frac{1}{3}(2y_2+y_3-2y_4)$, $x_4 = \frac{1}{3}(2y_2-2y_3+y_4)$. **12.1.8**. а) Формы f_1 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_2; б) формы f_2 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_1. **12.1.11**. а) $\alpha > 2$; б) $|\alpha| < \sqrt{\frac{5}{3}}$; в) $0,8 < \alpha < 1$; г), д)

$\emptyset$. **12.1.12**. а) $f_1 = -2y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2$, $g_1 = y_1^2 + y_2^2$, $x_1 = y - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_2$, $x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}y_2$; б) $f_1 = y_1^2 + y_2^2$, $g_1 = 4y_1^2 - 2y_2^2$, $x_1 = -2\sqrt{2}y_1 + 3\sqrt{2}y_2$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $f_1 = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$, $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $x_1 = \sqrt{2}y_2$, $x_2 = \frac{1}{6}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3$; г) $f_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$, $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$, $x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $x_2 = y_2 - y_4$, $x_3 = \frac{1}{2}y_1 - -\frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4$, $x_4 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4$; д) $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 7y_4^2$, $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$, $x_1 = \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4$, $x_2 = \frac{2}{3}y_2 - \frac{4}{3}y_3 + \frac{4}{3}y_4$, $x_3 = y_3 - 2y_4$, $x{=}y_1$; е) $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$, $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = -y_2 + y_3$, $x_3 = -3y_2 + 2y_3$. **12.1.14**. а), б) Нельзя. **12.1.16**. а), б) Эквивалентны. **12.2.1**. а) Полуоси $a = 3$, $b = 2$, вершины $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 2)$, фокусы $(\pm\sqrt{5}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, директрисы $x = \pm\frac{9\sqrt{5}}{5}$; б) полуоси $a = 5$, $b = 3$, вершины $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 5)$, фокусы $(0, \pm 4)$, $e = \frac{4}{5}$, директрисы $x = \pm\frac{25}{4}$. **12.2.2**. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3a^2} = 1$. **12.2.3**. 10. **12.2.4**. 20. **12.2.5**. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{4}}{5}$. **12.2.6**. а) Пересекает; б) касается; в) проходит вне эллипса. **12.2.7**. а) $x - y - 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$; б) $x + y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$; в) $x - y - 5 = 0$. **12.2.8**. а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $19x^2 + 16y^2 - 4xy - 2x - 36y + 19 = 0$. **12.2.9**. а) $a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{5}$, вершины $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ фокусы $(\pm 5, 0)$ $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, асимптоты $y = \pm\frac{1}{2}x$, директрисы $y = \pm 4$; б) $a = 4$, $b = 3$, вершины $(0, \pm 4)$ фокусы $(0, \pm 5)$ $e = \frac{5}{4}$, асимптоты $y = \pm\frac{4}{3}x$, директрисы $y = \pm\frac{16}{5}$. **12.2.10**. а) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$; г) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; д) $x^2 - \frac{y^2}{16}$. **12.2.11**. а) b; б) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. **12.2.12**. а) $9x^2 - 16y^2 = 144$; б) $7x^2 - 6xy - y^2 + 26y - 18y - 17 = 0$. **12.2.13**. а) Пересекает в одной точке; б) проходит вне гиперболы; в) касается; г) пересекает в двух точках. **12.2.14**. а) $y = 2x \pm 4\sqrt{3}$; б) $y = 3x \pm 8\sqrt{2}$; в) $5x - 3y - 16 = 0$; г) $13x + 5y + 48 = 0$. **12.2.15**. а) $p = 2$, вершина $(2, 0)$, фокус $(3, 0)$, директриса $x - 1 = 0$; б) $p = 3$, вершина $(\frac{2}{3}, 0)$, фокус $(-\frac{5}{6}, 0)$, директриса $6x - 13 = 0$; в) $p = 3$, вершина $(0, -\frac{1}{3})$, фокус $(0, \frac{7}{6})$, директриса $6y + 11 = 0$; г) $p = \frac{1}{2}$, вершина $(0, 2)$, фокус $(0, \frac{3}{2})$, директриса $2y - 5 = 0$. **12.2.16**. а) $y^2 = -28x$; б) $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$; в) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **12.2.17**. а) Пересекает в двух точках; б) проходит вне параболы; в) касается; г) пересекает в одной точке. **12.2.18**. а) $x - y + 1 = 0$; б) $x - 2y + 4 = 0$; в) $x - 3y + 9 = 0$. **12.2.19**. а) эллипс, $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 0$; б) гипербола $\frac{x_1^2}{16} - \frac{x_1^2}{9} = 1$; в) парабола $y_1^2 = 2x_1$; г) $\emptyset$; д) пара параллельных прямых $x_1^2 - 4 = 0$; е) пара пересекающихся прямых $4x_1^2 - y_2 = 0$; ж) пара совпавших прямых $x_1 = 4$. **12.2.20**. а) Эллипс $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1$; б) гипербола $x_1^2 - \frac{y_1^2}{4} = 1$;

в) пара пересекающихся прямых $x_1^2 - 4y_1^2 = 0$; г) точка; д) парабола $y_1^2 = 6x_1$; е) пара параллельных прямых $y_1^2 - 25 = 0$; ж) пара пересекающихся прямых $y_1^2 = 0$. **12.2.21**. а) При $-\infty < \lambda < -1$ — гипербола $(x-\lambda)^2 + \lambda(y - \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Oy, при $\lambda = -1$ — две пересекающиеся прямые $x - y = 0$, $x+y+2 = 0$, при $-1 < \lambda < 0$ — гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda(y-\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Ox, при $\lambda = 0$ — парабола $x^2 = 2y$, при $\lambda > 0$ — эллипс $(x-\lambda)^2 + \lambda(y - \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{\lambda^3+1}{\lambda}$ (при $\lambda = 1$ — окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$); б) при $-\infty < < \lambda < -1$ — гипербола $(1-\lambda)x_1^2 + (1+\lambda)y_1^2 = 1$, действительная ось которой имеет угловой коэффициент, равный -1, при $\lambda = -1$ — две параллельные прямые $x - y \pm 1 = 0$, при $-1 < \lambda < 1$ — эллипс $(1-\lambda)x_1^2 + (1+\lambda)y_1^2 = 1$, большая ось которого имеет угловой коэффициент, равный -1 (при $\lambda = 0$ — окружность $x^2 + y^2 = 1$), при $\lambda = 1$ — параллельные прямые $x + y \pm 1 = 0$, при $\lambda > 1$ — гипербола $(1-\lambda)x_1^2+(1+\lambda)y_1^2 = 1$, действительная ось которой имеет угловой коэффициент, равный 1. **12.2.22**. а) $F_1(-2,1)$, $d_1 : x–3y–4=0$, $F_2(0,-5)$, $d_2 : x - 3y - 6 = 0$; б) $(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{10})$, $4x - 2y - 3 = 0$. **12.2.23**. $F_1(-6,10)$, $F_2(2,6)$, директрисы $x + 2y + 2 = 0$, $x + 2y + 10 = 0$, асимптоты $3x-4y-10 = 0$, $5x+2 = 0$. **12.2.24**. а) $\rho = \frac{25}{13-12\cos\varphi}$; б) $\rho = \frac{25}{12-13\cos\varphi}$; в) $\rho = \frac{4}{1-\cos\varphi}$. **12.2.25**. а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $y^2 = 12x$. **12.3.1**. а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 10 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y + 4z - 18 = 0$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 10z + 17 = 0$. **12.3.2**. а) $r = \sqrt{14}$, $C(1,2,-3)$; б) $r = \frac{7}{2}$, $C(\frac{3}{2},0,0)$; в) $r = 4$, $C(-4,0,0)$. **12.3.3**. $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$. **12.3.4**. $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$. **12.3.5**. $\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2 = r^2(a^2+b^2+c^2)$. **12.3.6**. $5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz + 4yz - 6 = 0$. **12.3.7**. $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 8xz - 4yz + 6x + 24y - 6z - 63 = 0$. **12.3.8**. $y^2 + z^2 = 1$. **12.3.9**. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **12.3.10**. $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$. **12.3.11**. $(k(x-x_0)+l(y-y_0)+m(z-z_0))^2 = (k^2+l^2+m^2)((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)\cos^2\varphi$. **12.3.12**. $x^2+y^2-\frac{r^2}{c^2-r^2}(z-c)^2 = 0$. **12.3.13**. $x^2+y^2 - 6x - 6y + 12z + 9 = 0$. **12.3.14**. а) двуполостный гиперболоид $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$; б) однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$.

12.3.15. а) Эллипсоид, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9/4}+\frac{z^2}{9/4}=1$; б) однополостный гиперболоид, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{16}=-1$; в) конус, $x^2+\frac{y^2}{1/2}-\frac{z^2}{1/3}=0$; г) эллиптический цилиндр, $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3/2}=1$. **12.3.16**. а) конус, $x^2-y^2-z^2=0$; б) параболический цилиндр, $y^2=5x$; в) гиперболический параболоид, $x^2-y^2=$ $=2z$. **12.3.17**. а) Эллипсоид, $\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{2}=1$; б) однополостный гиперболоид, $-\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{1/3}+\frac{z^2}{1/6}=1$; в) гиперболический цилиндр, $\frac{x^2}{1/3}-\frac{y^2}{1/3}=1$; г) эллиптический цилиндр, $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4/3}=1$; д) эллиптический цилиндр, $\frac{x^2}{2}+y^2=1$; е) пара пересекающихся плоскостей, $2x+y=0$, $y+2z-2=0$; ж) пара параллельных плоскостей, $2x-y\pm 6=0$; з) пара совпавших плоскостей, $3x-y+2z-2=0$; и) прямая, являющаяся пересечением плоскостей $x-2y+z+1=0$ и $x-y+3z-2=0$; к) $\emptyset$. **12.3.18**. а) Пара параллельных прямых $\left\{\begin{array}{l}3x+4y-5z=0,\\ 4x-3y\pm 5=0;\end{array}\right.$ б) парабола с параметром $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) эллипс с полуосями $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{3}$; г) гипербола с полуосями $\sqrt{6}$, 2; д) прямая $\left\{\begin{array}{l}2x-3y-12z=0,\\ 2x+3y-6=0.\end{array}\right.$ **12.3.19**. $\left\{\begin{array}{l}2x-12y-z+16=0,\\ x-2y+4=0\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{l}2x-12y-z+16=0,\\ x+2y-8=0.\end{array}\right.$ **12.3.20**. $\left\{\begin{array}{l}y+2z=0,\\ x-5=0\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{l}2x-5z=0,\\ y+4=0.\end{array}\right.$ **12.3.21**. $x=t$, $y=-3$, $z=-2t$; $x=t$, $y=3$, $z=-2t$; $x=2$, $y=3t$, $z=-4t$; $x=-2$, $y=3t$, $z=-4t$. **12.3.22**. $\arccos\left(\frac{1}{17}\right)$. **12.3.23**. $\arccos\left(\frac{83}{85}\right)$. **12.3.24**. а) $2x-3y-z+32=0$; б) $\frac{x-4}{1}=\frac{y+24}{2}=$ $=\frac{z+32}{8}$, $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+24}{2}=\frac{z+32}{8}$. **12.3.25**. Точки $(1,1,1)$ и $(-1,-1,-1)$, угол $\frac{\pi}{3}$. **12.3.26**. $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{0}$, $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. **12.3.27**. $\frac{x-2}{1}=$ $=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{2}$. **12.3.28**. $\frac{x+48}{4}=\frac{y+36}{-3}=\frac{z}{-24}$. **13.1.1**. а) Спектральный радиус $\rho(A)=5$, принадлежащий ему собственный вектор $v=(1,1)$; б) $\rho(A)=5$, $v=(1,2)$; в) $\rho(A)=6$, $v=(1,1,1)$; г) $\rho(A)=7$, $v=(19,26,9)$; д) $\rho(A)=8$, $v=(448,115,109,142)$; е) $\rho(A)=7$, $v=(13,19,22,9)$. **13.1.2**. а) Спектральный радиус $\rho(A)=2$, принадлежащий ему собственный вектор $v=(1,1)$; б) $\rho(A)=4$, $v=(1,2)$; в) $\rho(A)=1$, $v=(1,0,0)$; г) $\rho(A)=4$, $v=(1,0,1)$; д) $\rho(A)=1$, $v=$ $=(1,0,0,1)$; е) $\rho(A)=1$, $v=(1,1,0,0)$. **13.1.3**. а) Единичная матрица; б) $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. **13.2.1**. а) $(1,3)$; б) $(7,4)$; в) $(25,36,51)$; г) $(32,23,38)$; д) $(204,389,180,439)$; е) $(935,710,5519,1015)$. **13.2.2**. а) $(41,88,67)$; б) $(89;117;26,5)$. **13.2.3**. а) $(2090,2690,3060)$; б) $(2790,\ 2875,3410)$. **13.2.5**. а) $2\sqrt{6}-2$; б) $20-10\sqrt{3}$. **13.2.6**. а), в), г), е) Да; б), д) нет.

Список использованной литературы

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Наука, 1979.

2. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М. : Наука, 1987.

3. *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шмикин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах. М. : Физматлит, 2001.

4. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М. : Наука, 1969.

5. *Замятин А. П., Верников Б. М., Булатов А. А.* Алгебра и геометрия : в 4 ч. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 1998.

6. *Замятин А. П., Верников Б. М., Булатов А. А.* Алгебра и геометрия. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2001.

7. *Жильцов И. Ю., Замятин А. П.* Задачи по линейной алгебре : метод. разработка для студентов 2-го курса эконом. фак. / Урал. гос. ун-т. Екатеринбург, 1996.

8. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. М. : Наука, 1975.

9. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М. : Наука, 1972.

10. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. В 3 ч. Ч. 1. Основы алгебры; Ч. 2. Линейная алгебра. М. : Физматлит, 2000.

11. *Лефор Г.* Алгебра и анализ : Задачи. М. : Наука, 1973.

12. *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1969.

13. *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М. : Наука, 1976.

14. *Овсянников А. Я.* Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие для студентов эконом. специальностей / Гуманитар. ун-т. Екатеринбург, 2001.

15. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М. : Наука, 1978.

16. *Сесекин Н. Ф.* Основы линейной алгебры : учеб. пособие / Урал. гос. ун-т. Свердловск, 1987; То же. 2-е изд., перераб. и доп. / Урал. гос. ун-т. Екатеринбург, 1992; То же. 3-е изд., перераб. и доп. / Урал. гос. ун-т. Екатеринбург, 1997.

17. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. М. : Наука, 1977.

18. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. М. : Наука, 1987; То же. 2-е изд. М. : Факториал, 1995; То же. 3-е изд., испр. и доп. М. : Физматлит, 2001.

19. Задачник по алгебре и геометрии для студентов первого курса / сост. А. Я. Овсянников. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2004.

Учебное издание

ЗАДАЧНИК ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА

Учебное пособие

Составитель
Овсянников Александр Яковлевич

Редактор и корректор Е. И. Маркина
Компьютерная верстка А. Я. Овсянников

План выпуска 2010 г., поз. 78.
Подписано в печать 15.12.2010. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Уч.-изд. л. 11,5. Усл. печ. л. 13,48.
Тираж 500 экз. Заказ .

Издательство Уральского университета.
620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ».
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

9 785799 605698