§ 16. Плоскость

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Этот параграф посвящен изучению плоскости. Он построен по тому же плану, что и предыдущий. Многие утверждения схожи как по формулировкам, так и по доказательствам. Иногда все отличия в доказательствах сводятся к появлению у точек и векторов третьих координат. В этих случаях мы не приводим доказательство в явном виде, ограничиваясь указанием на его сходство с доказательством аналогичного утверждения для прямой на плоскости.

Подобно тому, как прямая является частным случаем кривой, плоскость является частным случаем поверхности. В конце нашего курса (в § 45–48) будут изучаться поверхности, которые не являются плоскостью. Поэтому в начале этого параграфа мы скажем несколько слов о произвольных поверхностях.

Как и кривые на плоскости, поверхности можно задавать с помощью уравнений двумя способами. Первый из них состоит в том, чтобы указать, как связаны между собой координаты точек, лежащих на поверхности (и только этих точек). Этот подход приводит к следующему определению.

Определение

Будем считать, что пространстве зафиксирована система координат. Уравнение вида $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — произвольная функция от трех переменных, называется *общим уравнением* поверхности σ, если точка пространства лежит на σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, называется *геометрическим образом* этого уравнения.

В качестве примера рассмотрим сферу. Как известно из школьного курса, сфера радиуса r с центром в точке $C(a, b, c)$ задается (в прямоугольной декартовой системе координат) уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

которое равносильно общему уравнению

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0.$$

Второй способ задания поверхности уравнениями, как и в случае кривой на плоскости, состоит в том, что указывается не зависимость между координатами точек, которые принадлежат данной поверхности, а зависимость каждой из этих координат от некоторых параметров (отличие от кривых состоит в том, что для задания поверхности требуется не один параметр, а два). Этот подход приводит к следующему определению.

Определение

Будем считать, что пространстве зафиксирована система координат. Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = g(u,v), \\ z = h(u,v), \end{cases}$$

где $f(u,v)$, $g(u,v)$ и $h(u,v)$ — произвольные функции от двух переменных, называются *параметрическими уравнениями* поверхности σ, если точка M с координатами (x_0, y_0, z_0) лежит на σ тогда и только тогда, когда существуют числа u_0 и v_0 такие, что $x_0 = f(u_0, v_0)$, $y_0 = g(u_0, v_0)$ и $z_0 = h(u_0, v_0)$. Переменные u и v называются *параметрами*.

В качестве примера рассмотрим сферу радиуса r с центром в начале координат. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Обозначим через u угол между положительным направлением оси Ox и радиусом-вектором проекции точки M на плоскость Oxy, а через v — угол между положительным направлением оси Oz и радиусом-вектором точки M. Легко понять, что точка M принадлежит сфере тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x = r\cos u \sin v, \\ y = r\sin u \sin v, \\ z = r\cos v \end{cases}$$

(см. рис. 1 на следующем слайде). Это и есть параметрические уравнения сферы.

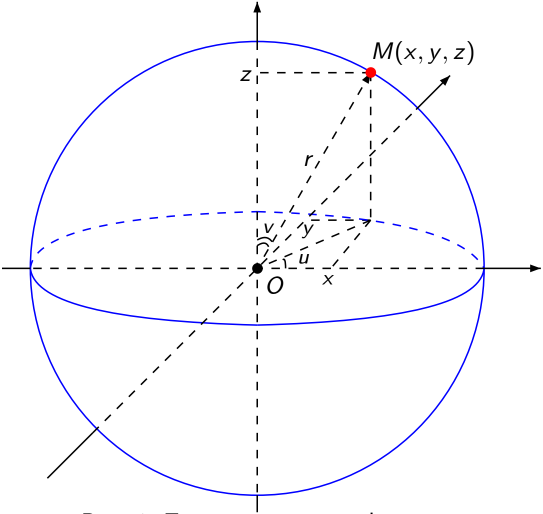

Рис. 1. Параметризация сферы

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению плоскости. Прежде всего, введем в рассмотрение следующие два понятия, которые будут играть исключительно важную роль в дальнейшем.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной плоскости, называется ее *направляющим вектором*. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется ее *нормальным вектором*.

Из этого определения видно, что

- как направляющий, так и нормальный вектор для данной плоскости определены неоднозначно. Плоскость имеет бесконечно много направляющих векторов и бесконечно много (коллинеарных друг другу) нормальных векторов.

Перейдем к рассмотрению видов уравнений плоскости. Мы рассмотрим пять видов таких уравнений: параметрические, каноническое, по трем точкам, общее и в отрезках. По сравнению с видами уравнений прямой на плоскости (см. § 15), здесь отсутствует лишь аналог уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Выясним, как выглядят параметрические уравнения плоскости. Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке O. Пусть σ — плоскость, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости σ, а векторы $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ и $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ являются ее направляющими векторами, не коллинеарными между собой. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\vec{r}_0$, а радиус-вектор точки M — через $\vec{r}$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2.

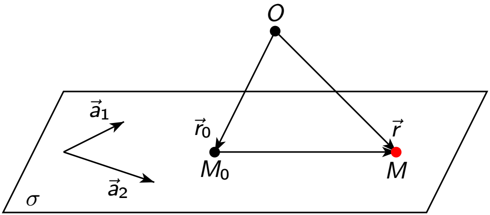

Рис. 2. К выводу параметрических уравнений плоскости

Ясно, что точка M лежит в плоскости σ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен σ. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис плоскости σ. Если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и плоскость σ коллинеарны, то, в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (см. § 10), существуют числа u и v такие, что $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$. Обратно, очевидно, что если $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \sigma$. Таким образом, $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v. Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$, получаем, что $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v. Координаты векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ совпадают с координатами точек M и M_0 соответственно. Расписав равенство $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ в координатах, получаем уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1u + q_2v, \\ y = y_0 + r_1u + r_2v, \\ z = z_0 + s_1u + s_2v, \end{cases} \qquad (1)$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости*.

Понятие параметрических уравнений плоскости является частным случаем понятия параметрических уравнений поверхности, которое было введено в начале данного параграфа.

Как было показано выше, точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Из замечания о координатах компланарных векторов (см. § 13) вытекает, что это условие эквивалентно выполнению равенства

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

которое называется *каноническим уравнением плоскости*.

- На первый взгляд может показаться, что каноническое уравнение плоскости не имеет ничего общего с каноническим уравнением прямой на плоскости (см. уравнение (4) в § 15). В действительности, эти уравнения можно считать аналогичными друг другу, поскольку каноническое уравнение прямой на плоскости, т. е. уравнение $\frac{x-x_0}{r} = \frac{y-y_0}{s}$, можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ r & s \end{vmatrix} = 0.$$

Предположим теперь, что мы знаем координаты трех точек, принадлежащих плоскости и не лежащих на одной прямой, — $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ коллинеарны плоскости и не коллинеарны между собой (последнее гарантировано тем обстоятельством, что точки M_0, M_1 и M_2 не лежат на одной прямой). Подставляя их координаты в уравнение (2), получаем следующее уравнение, которое называется *уравнением плоскости по трем точкам*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

- Как и в случае с каноническим уравнением, это уравнение можно считать аналогичным уравнению прямой на плоскости по двум точкам (см. уравнение (5) в § 15), поскольку последнее уравнение можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Из сказанного выше вытекают следующие два замечания.

1-е замечание о направляющих векторах плоскости

Если плоскость задана любым из уравнений (1) *и* (2), *то векторы с координатами* (q_1, r_1, s_1) *и* (q_2, r_2, s_2) *являются ее направляющими векторами, не коллинеарными между собой.*

Замечание о точке, лежащей на плоскости

Если плоскость задана любым из уравнений (1), (2) *и* (3), *то точка с координатами* (x_0, y_0, z_0) *принадлежит плоскости.*

Разложив определитель из равенства (2) по первой строке, имеем следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (4)$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда равенство (4) можно переписать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Положив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (5)$$

Легко понять, что если $A = B = C = 0$, то $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$. В силу критерия коллинеарности векторов (см. § 10) это означает, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны вопреки их выбору. Уравнение вида (5), в котором по крайней мере одно из чисел A, B и C отлично от нуля, называется *общим уравнением плоскости*. Теорема со следующего слайда показывает, что это понятие является частным случаем понятия общего уравнения поверхности, которое было введено в начале данного параграфа.

Теорема об общем уравнении плоскости

Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая плоскость может быть задана уравнением вида (5)*, в котором по крайней мере одно из чисел A, B и C отлично от нуля. Обратно, любое уравнение вида* (5) *с указанным ограничением на числа A, B и C определяет плоскость.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы было доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим уравнение (5), где $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$. Для определенности будем считать, что $A \neq 0$. Возьмем произвольное решение (x_0, y_0, z_0) уравнения (5). Обозначим через M_0 точку с координатами (x_0, y_0, z_0). Положим $\vec{a}_1 = (-B, A, 0)$ и $\vec{a}_2 = (-C, 0, A)$. Из того, что $A \neq 0$ вытекает, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ непропорциональны, а значит и не коллинеарны. Обозначим через σ плоскость, проходящую через точку M_0 коллинеарно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Докажем, что плоскость σ задается уравнением (5). Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — точка, лежащая на σ. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис плоскости σ, а вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарен этой плоскости. По теореме о разложении вектора по базису (см. § 10) $\overrightarrow{M_0M_1} = t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$ для некоторых чисел t и s. Расписывая это векторное равенство в координатах, получаем, что $x_1 - x_0 = -Bt - Cs$, $y_1 - y_0 = At$ и $z_1 - z_0 = As$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= A(x_0 - Bt - Cs) + B(y_0 + At) + C(z_0 + As) + D = \\ &= Ax_0 - ABt - ACs + By_0 + ABt + Cz_0 + ACs + D = \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению (5).

Мы доказали, что точка лежит в плоскости σ, то ее координаты удовлетворяют уравнению (5). Докажем противоположное утверждение. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (5). Требуется доказать, что она лежит в плоскости σ. Это эквивалентно тому, что векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. В силу замечания о координатах компланарных векторов (см. § 13) достаточно убедиться в том, что определитель, в котором по строкам записаны координаты этих векторов, равен нулю. В самом деле, учитывая, что координаты точек M_0 и M_1 удовлетворяют уравнению (5), мы получаем, что $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$.

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = A^2(x_1 - x_0) + AB(y_1 - y_0) + AC(z_1 - z_0) =$$

$$= A(Ax_1 + By_1 + Cz_1) - A(Ax_0 + By_0 + Cz_0) =$$

$$= (-AD) - (-AD) = 0.$$

Теорема доказана. □

Из доказательства теоремы об общем уравнении плоскости легко выводится следующий факт.

2-е замечание о направляющих векторах плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением (5). Положим $\vec{s}_1 = (-B, A, 0)$, $\vec{s}_2 = (-C, 0, A)$ *и* $\vec{s}_3 = (0, -C, B)$. *Если* $A \neq 0$, *то векторы* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_2$ *не коллинеарны и являются направляющими векторами плоскости; если* $B \neq 0$, *то теми же свойствами обладают векторы* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_3$, *а если* $C \neq 0$ *— векторы* $\vec{s}_2$ *и* $\vec{s}_3$. □

Определение

Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *главным вектором* плоскости π.

Отметим, что главный вектор плоскости определен неоднозначно. В самом деле, ясно, что если t — ненулевое число, то уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ и $tAx + tBy + tCz + tD = 0$ определяют одну и ту же плоскость, главными векторами которой будут как (A, B, C), так и (tA, tB, tC).

Замечание о главном векторе плоскости

Главный вектор плоскости не коллинеарен этой плоскости. $\square$

Мы опускаем доказательство этого факта, поскольку оно вполне аналогично доказательству замечания о главном векторе прямой из § 15.

Если система координат является прямоугольной декартовой, то замечание о главном векторе плоскости можно существенно усилить. В самом деле, в этом случае скалярное произведение векторов (A, B, C) и $(-B, A, 0)$ равно $-AB + BA = 0$, т. е. эти векторы ортогональны (см. критерий ортогональности векторов в § 11). Аналогично проверяется ортогональность вектора (A, B, C) каждому из векторов $(-C, 0, A)$ и $(0, -C, B)$. В силу 2-го замечания о направляющих векторах плоскости, вектор (A, B, C) ортогонален к двум неколлинеарным векторам, лежащим в плоскости с уравнением (5). Следовательно, справедливо

Замечание о нормальном векторе плоскости

Если система координат является прямоугольной декартовой, то главный вектор плоскости является ее нормальным вектором. Другими словами, если плоскость задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (5), то вектор с координатами (A, B, C) является ее нормальным вектором. $\square$

Пусть теперь σ — плоскость, не проходящая через начало координат и не параллельная ни одной из осей координат. Тогда σ пересекает все три оси координат. Обозначим первую координату точки пересечения σ с осью абсцисс через a, вторую координату точки пересечения σ с осью ординат — через b, а третью координату точки пересечения σ с осью аппликат — через c. Тогда $a, b, c \neq 0$ и σ проходит через точки с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$. Напишем уравнение плоскости σ по этим трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель из левой части последнего равенства, получим $bcx + acy + abz = abc$. Разделим обе части последнего равенства на abc (воспользовавшись тем, что $a, b, c \neq 0$). Получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (6)$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках*. Этот термин объясняется тем, что параметры a, b и c, фигурирующие в уравнении (6), суть, с точностью до знака, длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

Мы закончили рассмотрение видов уравнений плоскости.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимном расположении двух плоскостей.

Теорема о взаимном расположении плоскостей

Пусть плоскость σ_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а плоскость σ_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Плоскости σ_1 и σ_2:

1) *пересекаются тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;*
2) *параллельны тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;*
3) *совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2. \end{cases} \tag{7}$$

Ясно, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет решение, но уравнения системы не равносильны; параллельны тогда и только тогда, когда система не имеет решений; совпадают тогда и только тогда, когда уравнения системы равносильны.

Предположим сначала, что коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, т. е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Для определенности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Убедимся, что в этом случае плоскости пересекаются. Придадим z произвольное значение $z = z_0$ и запишем систему (7) в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2. \end{cases} \tag{8}$$

Условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому по теореме Крамера (см. § 9) система (8) имеет единственное решение. Обозначим его через (x_0, y_0). Тогда тройка чисел (x_0, y_0, z_0) будет решением системы (7). Следовательно, плоскости σ_1 и σ_2 имеют по крайней мере одну общую точку, т. е. либо пересекаются, либо совпадают.

Предположим, что плоскости совпадают. Обозначим через σ_3 плоскость с уравнением $z = z_0$. Пересечение (совпадающих) плоскостей σ_1 и σ_2 с σ_3 содержит точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а значит, оно содержит и некоторую прямую. У всех точек этой прямой третья координата равна z_0 (так как эти точки лежат в плоскости σ_3). Пусть $M_1(x_1, y_1, z_0)$ — точка этой прямой, отличная от M_0. Тогда пара чисел (x_1, y_1) отлична от (x_0, y_0) и является решением системы (8). Но, как отмечалось выше, эта система имеет единственное решение. Полученное противоречие показывает, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются.

Мы доказали достаточность в утверждении 1) доказываемой теоремы. Достаточность в утверждениях 2) и 3) доказывается вполне аналогично тому, как это сделано в тех же случаях в доказательстве теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости в § 15. После того, как достаточность во всех трех утверждениях доказана, легко понять, что в каждом из этих утверждений верна и необходимость (см. конец доказательства теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости в § 15). $\square$

Из п. 2) доказанной теоремы вытекает, что

- *любые два главных вектора плоскости коллинеарны.*

Наша следующая цель состоит в том, чтобы выяснить, как по уравнению плоскости и координатам двух точек, не лежащих в этой плоскости, определить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от плоскости. Пусть σ — плоскость, заданная уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Все пространство делится этой плоскостью на три непересекающиеся части: саму плоскость σ и два *полупространства* (в каждое из этих полупространств входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от σ). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3.

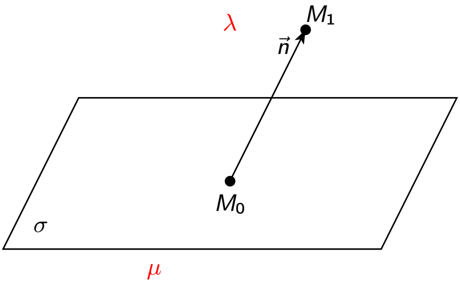

Рис. 3. Полупространства

Обозначим главный вектор плоскости σ через $\vec{n}$. Возьмем на σ произвольную точку M_0 и отложим от нее вектор $\vec{n}$. Конец получившегося направленного отрезка обозначим через M_1. Из замечания о главном векторе плоскости вытекает, что точка M_1 не принадлежит плоскости σ. Обозначим то полупространство, в котором лежит точка M_1, через λ, а другое — через μ.

Теорема о полупространствах

Пусть $M(x', y', z')$ — произвольная точка пространства. Если $M \in \lambda$, то $Ax' + By' + Cz' + D > 0$, а если $M \in \mu$, то $Ax' + By' + Cz' + D < 0$. □

Доказательство этой теоремы мы не приводим, поскольку оно вполне аналогично доказательству теоремы о полуплоскостях из § 15. Из теоремы о полупространствах вытекает следующий ответ на сформулированный выше вопрос.

Следствие о расположении двух точек относительно плоскости

Точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ расположены по одну сторону от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ имеют одинаковый знак, и по разные стороны от этой плоскости тогда и только тогда, когда эти числа имеют разные знаки. □

В заключение параграфа укажем формулу для расстояния от точки до плоскости. *Будем предполагать, что система координат, заданная на плоскости, — прямоугольная декартова.*

Пусть плоскость σ задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а $M(x', y', z')$ — некоторая точка пространства. Обозначим через $d(M, \sigma)$ расстояние от M до σ. Тогда справедлива следующая формула:

$$d(M, \sigma) = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (9)$$

Мы опускаем вывод этой формулы, поскольку он вполне аналогичен выводу формулы (14) из § 15.