§ 17. Прямая в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Общие уравнения кривой (определение)

Этот параграф во многом схож с двумя предыдущими, но есть и существенные отличия.

Как и в случаях кривой на плоскости и поверхности, кривую в пространстве можно задавать либо общими, либо параметрическими уравнениями. Общие уравнения в данном случае возникают из следующего простого наблюдения: любую кривую в пространстве можно представить как пересечение двух поверхностей.

Определение

Будем считать, что в пространстве зафиксирована некоторая система координат. Пусть кривая ℓ является пересечением поверхностей σ_1 и σ_2, поверхность σ_1 задана общим уравнением $F_1(x, y, z) = 0$, а поверхность σ_2 — общим уравнением $F_2(x, y, z) = 0$. Тогда уравнения

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

называются *общими уравнениями* кривой ℓ.

Из определения общего уравнения поверхности (см. § 16) вытекает, что точка лежит на кривой ℓ тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений (1).

Параметрические уравнения кривой в пространстве определяются вполне аналогично одноименным уравнениям кривой на плоскости (см. § 15).

Определение

Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \tag{2}$$

где $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ — произвольные функции от одной переменной, называются *параметрическими уравнениями* кривой ℓ, если точка M с координатами (x_0, y_0, z_0) лежит на ℓ тогда и только тогда, когда существует число t_0 такое, что $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$ и $z_0 = h(t_0)$. Переменная t называется *параметром*.

Общие и параметрические уравнения кривой (пример)

В качестве примера составим общие и параметрические уравнения окружности радиуса 2 с центром в точке $C(0,0,1)$, расположенной в плоскости, параллельной плоскости Oxy (см. рис. 1 на следующем слайде). Ясно, что эту окружность можно представить себе как пересечение плоскости, заданной уравнением $z=1$, и сферы радиуса 2 с центром в точке $(0,0,1)$. Следовательно, в прямоугольной декартовой системе координат наша окружность задается общими уравнениями

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2 &= 4, \\ z &= 1. \end{cases}$$

Перейдем к параметрическим уравнениям. Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка пространства. От точки C отложим ненулевой вектор $\vec{a}$, сонаправленный с положительным направлением оси Ox, и возьмем в качестве параметра t угол между векторами $\overrightarrow{CM}$ и $\vec{a}$ (см. рис. 1). Нетрудно понять, что наша окружность задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x &= 2\cos t, \\ y &= 2\sin t, \\ z &= 1 \qquad . \end{cases}$$

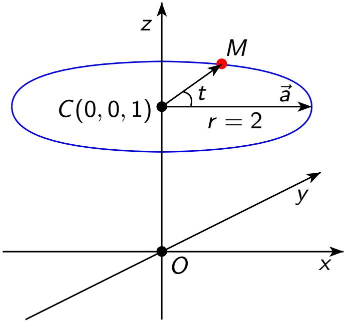

Рис. 1. Окружность в пространстве

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению прямых в пространстве.

Понятие направляющего вектора для прямой в пространстве вводится точно так же, как это было сделано в § 15 для прямой на плоскости.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Из этого определения видно, что

- направляющий вектор для данной прямой определен неоднозначно: прямая в пространстве имеет бесконечно много (коллинеарных друг другу) направляющих векторов.

Отметим еще, что

- для прямой в пространстве понятие нормального вектора не определено.

Формально можно было бы назвать нормальным вектором прямой в пространстве произвольный ортогональный ей ненулевой вектор, но никакой пользы для изучения прямой это понятие не дает, поскольку векторов с указанным свойством «слишком много» — они заполняют собой целую плоскость (перпендикулярную к данной прямой).

Перейдем к рассмотрению видов уравнений прямой в пространстве. Мы рассмотрим четыре вида таких уравнений: параметрические, канонические, по двум точкам и общие. По сравнению с видами уравнений плоскости и прямой на плоскости (см. два предыдущих параграфа), здесь отсутствуют аналоги уравнений с угловым коэффициентом и в отрезках.

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке O. Пусть ℓ — прямая в пространстве, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит прямой ℓ, а вектор $\vec{a} = (q, r, s)$ является ее направляющим вектором. Дословно повторяя рассуждения, проведенные в § 15 при выводе параметрических уравнений прямой на плоскости, можно показать, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases} \tag{3}$$

для некоторого t. Уравнения (3) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Понятие параметрических уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия параметрических уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

Выражая параметр t из первого, второго и третьего уравнений системы (3) и приравнивая полученные выражения, мы получаем уравнения

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}, \tag{4}$$

которые называются *канонiческими уравнениями прямой в пространстве*.

Предположим теперь, что мы знаем координаты двух различных точек, принадлежащих прямой: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т. е. является направляющим вектором прямой. Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем следующие уравнения, которые называются *уравнениями прямой в пространстве по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{5}$$

Из сказанного выше вытекают следующие два замечания.

1-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3) *и* (4)*, то вектор с координатами* (q, r, s) *является ее направляющим вектором.* $\square$

Замечание о точке, лежащей на прямой в пространстве

Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3), (4) *и* (5) *, то точка с координатами* (x_0, y_0, z_0) *принадлежит прямой.* $\square$

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. Пусть ℓ — прямая, являющаяся пересечением плоскостей σ_1 и σ_2, а $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — общие уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Точка $M(x, y, z)$ лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*. Из того, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются, вытекает, что либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (см. теорему о взаимном расположении плоскостей в § 16). Теорема со следующего слайда показывает, что понятие общих уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия общих уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

Общие уравнения прямой (2)

Теорема об общем уравнении прямой в пространстве

Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая в пространстве может быть задана уравнениями вида (6), в которых либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$*, либо* $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$*. Обратно, любые уравнения вида (6) с указанным ограничением на числа* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 *и* C_2 *определяют прямую.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим систему (6). Каждое из двух уравнений, входящих в эту систему, задает некоторую плоскость. Эти две плоскости пересекаются, поскольку коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (6) не пропорциональны (см. теорему о взаимном расположении плоскостей в § 16). Ясно, что прямая, по которой пересекаются эти плоскости, задается системой (6). $\square$

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (1)

2-е замечание о направляющем векторе прямой на плоскости из § 15 указывает простой способ нахождения направляющего вектора прямой на плоскости, заданной общим уравнением. Рассмотрим аналогичную задачу для прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями (6). Требуется найти координаты ее направляющего вектора. По условию либо $\frac{A_1}{A_2} \ne \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \ne \frac{C_1}{C_2}$. Без ограничения общности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \ne \frac{B_1}{B_2}$. Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты некоторой точки, принадлежащей прямой ℓ. Тогда справедливы равенства $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$. Вычтем первое из этих равенств из первого уравнения системы (6), а второе — из второго уравнения этой системы. Получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = -C_1(z - z_0), \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) = -C_2(z - z_0). \end{cases}$$

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (2)

Будем смотреть на эту систему как на систему уравнений относительно $x - x_0$ и $y - y_0$. Поскольку $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, определитель этой системы отличен от нуля. По теореме Крамера (см. § 9), ее решение можно найти по следующим формулам:

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Используя 2-е и 4-е свойства определителей и принцип равноправия строк и столбцов (см. § 8), получаем, что

$$\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix} = (z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix} = -(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, равенства (7) можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

или в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

С учетом 1-го замечания о направляющем векторе прямой в пространстве, из последних равенств вытекает

2-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

Вектор

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \qquad (8)$$

является направляющим вектором прямой, заданной уравнениями (6). □

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат (1)

Мы вывели 2-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве в предположении, что система координат — произвольная. Формулы получились достаточно громоздкими и трудными для запоминания. Однако в случае, когда система координат — прямоугольная декартова, они имеют очень простую интерпретацию (и намного более простой вывод).

Итак, предположим, что прямая ℓ задана системой уравнений (6) в прямоугольной декартовой системе координат. Обозначим плоскости, задаваемые первым и вторым уравнением системы (6), через σ_1 и σ_2 соответственно. Векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются теперь нормальными векторами плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно (см. замечание о нормальном векторе плоскости в § 16). Положим $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Тогда $\vec{b} \perp \vec{n}_1$. Поскольку $\vec{n}_1 \perp \sigma_1$, получаем, что $\vec{b} \parallel \sigma_1$. Аналогично проверяется, что $\vec{b} \parallel \sigma_2$. Но тогда $\vec{b}$ коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2, т. е. прямой ℓ. Далее, из того, что $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, вытекает, что $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$. В силу 2-го критерия коллинеарности векторов (см. § 12), $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$. Таким образом, вектор $\vec{b}$ является направляющим вектором прямой ℓ.

Осталось заметить, что векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет в точности те координаты, которые указаны в правой части равенства (8) (см. формулу (3) в § 12). Итак, справедливо

3-е замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

Если в прямоугольной декартовой системе координат прямая задана как пересечение двух плоскостей, то в качестве ее направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей. $\square$

Отметим еще, что

- направляющий вектор прямой ℓ, заданной уравнениями (6), можно найти не используя 2-го и 3-го замечаний о направляющем векторе прямой в пространстве.

В самом деле, найдем координаты двух различных точек M_1 и M_2, принадлежащих ℓ (т. е. два различных решения (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) системы уравнений (6)). Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, очевидно, будет направляющим вектором прямой ℓ.

Перейдем к вопросам о взаимном расположении прямой и плоскости и о взаимном расположении двух прямых.

Теорема о взаимном расположении прямой и плоскости

Пусть плоскость σ *задана уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *а прямая* ℓ — *уравнениями* (3). *Тогда:*

1) ℓ *и* σ *пересекаются тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs \neq 0$;
2) ℓ *и* σ *параллельны тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;
3) ℓ *лежит в* σ *тогда и только тогда, когда* $Aq + Br + Cs = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Доказательство. Подставим правые части равенств (3) вместо x, y и z в уравнение плоскости. Получим уравнение

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) + D = 0. \tag{9}$$

Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит одновременно и ℓ, и σ, то, с одной стороны, существует такое значение параметра t, при котором x, y и z удовлетворяют равенствам (3), а с другой — x, y и z удовлетворяют уравнению плоскости. Но в таком случае значение параметра t, соответствующее точке M, является решением уравнения (9). Следовательно, ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда это уравнение имеет единственное решение; ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда оно не имеет решений; наконец, ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда это уравнение имеет бесконечно много решений. Уравнение (9) можно переписать в виде

$$(Aq + Br + Cs)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Ясно, что оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$, что доказывает утверждение 1); не имеет решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, что доказывает утверждение 2); имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, что доказывает утверждение 3). ☐

Теорема о взаимном расположении прямых в пространстве

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}.$$

1) *ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$;*
2) *ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$ и либо $\frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$, либо $\frac{r_1}{r_2} \neq \frac{s_1}{s_2}$;*
3) *ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ и либо $\frac{x_2 - x_1}{q_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{r_1}$, либо $\frac{y_2 - y_1}{r_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{s_1}$;*
4) *ℓ_1 и ℓ_2 совпадают тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ и $\frac{x_2 - x_1}{q_1} = \frac{y_2 - y_1}{r_1} = \frac{z_2 - z_1}{s_1}$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ — направляющий вектор прямой ℓ_1; $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ — направляющий вектор прямой ℓ_2; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_1; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_2; $\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{c}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Утверждение 1) вытекает теперь из замечания о координатах компланарных векторов в § 13.

Предположим теперь, что прямые лежат в одной плоскости или, что эквивалентно, выполнено равенство $\Delta = 0$. Ясно, что при выполнении этого условия прямые пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$. Учитывая критерий коллинеарности векторов (см. § 10), получаем утверждение 2).

Пусть, наконец, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить два этих случая, достаточно проверить, лежит ли точка M_2 на прямой ℓ_1. Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае — параллельны. Учитывая, что канонические уравнения прямой ℓ_1 имеют вид $\frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{r_1} = \frac{z-z_1}{s_1}$, получаем утверждения 3) и 4). $\square$

Наша ближайшая цель — вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а $M(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка пространства. Точку с координатами (x_0, y_0, z_0), принадлежащую прямой ℓ, обозначим через M_0, а вектор с координатами (q, r, s), являющийся направляющим вектором прямой ℓ, — через $\vec{a}$. Кроме того, положим $\vec{c} = \overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2.

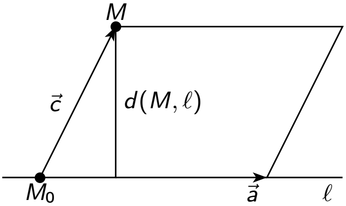

Рис. 2. Расстояние от точки до прямой

Обозначим расстояние от точки M до прямой ℓ через $d(M,\ell)$. Ясно, что $d(M,\ell)$ — высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Обозначим его площадь через S. Тогда $d(M,\ell)=\frac{S}{|\vec{a}|}$. Вспоминая геометрический смысл векторного произведения векторов (см. § 12), мы получаем, что

$$d(M,\ell)=\frac{|\vec{a}\times\vec{c}|}{|\vec{a}|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния от точки до прямой в пространстве. Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 12, можно в явном виде выразить $d(M,\ell)$ через координаты точек M_0 и M и вектора $\vec{a}$:

$$d(M,\ell)=\frac{\sqrt{\begin{array}{c}\bigl(r(z_1-z_0)-s(y_1-y_0)\bigr)^2+\bigl(q(z_1-z_0)-s(x_1-x_0)\bigr)^2+\\+\bigl(q(y_1-y_0)-r(x_1-x_0)\bigr)^2\end{array}}}{\sqrt{q^2+r^2+s^2}}.$$

Наща следующая цель — научиться находить расстояние между скрещивающимися прямыми. Прежде, чем выводить соответствующую формулу, надо сказать, что понимается под таким расстоянием. Для этого нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — скрещивающиеся прямые. *Общим перпендикуляром* к прямым ℓ_1 и ℓ_2 называется прямая, перпендикулярная к каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 и пересекающая каждую из них.

Ни из каких априорных соображений не вытекает, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым существует. Докажем, что это так.

Теорема об общем перпендикуляре

Для произвольных скрещивающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 существует общий перпендикуляр к этим прямым.

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3 (см. следующий слайд).

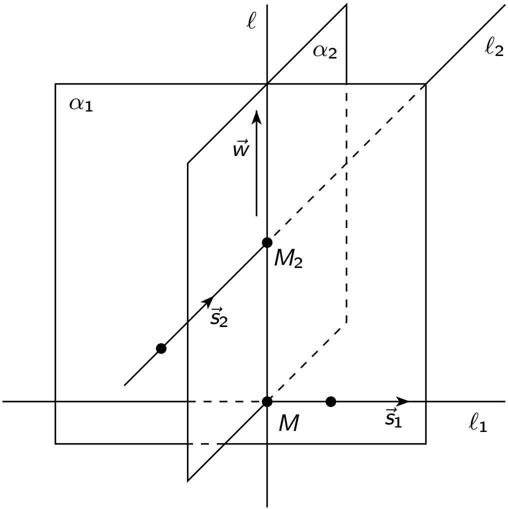

Рис. 3. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Обозначим направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 через $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ соответственно и положим $\vec{w} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$. Поскольку прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются, $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$. В силу 2-го критерия коллинеарности векторов (см. § 12) $\vec{w} \neq \vec{0}$. Обозначим через α_1 плоскость, проходящую через прямую ℓ_1 и коллинеарную вектору $\vec{w}$, а через α_2 — плоскость, проходящую через прямую ℓ_2 и коллинеарную вектору $\vec{w}$. Если бы эти две плоскости были параллельными или совпадающими, то векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\vec{w}$ были бы компланарными. Но это не так, поскольку $\vec{w}$ — ненулевой вектор, ортогональный неколлинеарным векторам $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Следовательно, плоскости α_1 и α_2 пересекаются по некоторой прямой. Обозначим эту прямую через ℓ. Поскольку $\vec{w}$ — ненулевой вектор, коллинеарный каждой из плоскостей α_1 и α_2, он коллинеарен и прямой ℓ. Таким образом, $\vec{w}$ — направляющий вектор прямой ℓ. Из построения вектора $\vec{w}$ теперь вытекает, что ℓ перпендикулярна каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2.

Осталось доказать, что ℓ пересекает и ℓ_1, и ℓ_2. Если бы прямая ℓ_1 была параллельна плоскости α_2 или лежала в этой плоскости, то векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\vec{w}$ были бы компланарными. Но это не так. Следовательно, ℓ_1 пересекает плоскость α_2 в некоторой точке. Обозначим эту точку через M_1. Ясно, что $M_1 \in \alpha_1$ (так как $M_1 \in \ell_1$ и $\ell_1 \subseteq \alpha_1$) и $M_1 \in \alpha_2$. Следовательно, M_1 лежит на прямой, по которой пересекаются плоскости α_1 и α_2, т. е. на прямой ℓ. Поскольку $M_1 \in \ell_1$, это означает что прямые ℓ и ℓ_1 пересекаются (в точке M_1). Аналогично проверяется, что прямая ℓ_2 пересекает плоскость α_1 в некоторой точке M_2 и эта точка является точкой пересечения прямых ℓ и ℓ_2. $\square$

Определение

Расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 и ℓ_2.

Такое определение расстояния между скрещивающимися прямыми естественно, поскольку, как несложно показать, расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, равно минимуму из длин всех отрезков вида A_1A_2, где $A_1 \in \ell_1$, а $A_2 \in \ell_2$.

Перейдем к вопросу о вычислении расстояния между скрещивающимися прямыми. Пусть даны уравнения скрещивающихся прямых

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = x_1 + a_1t, \\ y = y_1 + b_1t, \\ z = z_1 + c_1t \end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_2\colon \begin{cases} x = x_2 + a_2t, \\ y = y_2 + b_2t, \\ z = z_2 + c_2t. \end{cases}$$

В частности, $\vec{s}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{s}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ — направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, точка $P_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на ℓ_1, а точка $P_2(x_2, y_2, z_2)$ лежит на ℓ_2. Дальнейшие построения иллюстрирует рис. 4 (см. следующий слайд).

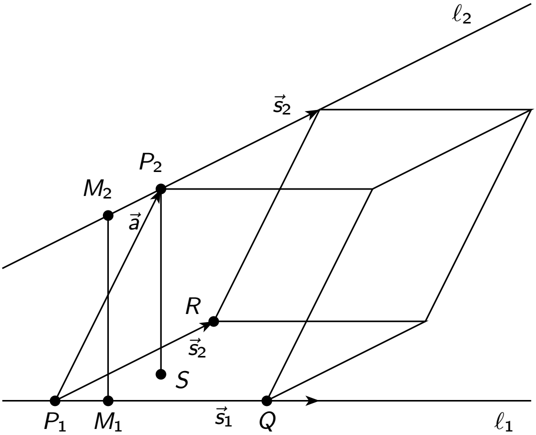

Рис. 4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Отложим векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ от точки P_1. Концы полученных направленных отрезков обозначим через Q и R соответственно. Построим параллелепипед на векторах $\overrightarrow{P_1Q}$, $\overrightarrow{P_1R}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$. Из вершины P_2 этого параллелепипеда опустим высоту на плоскость векторов $\overrightarrow{P_1Q}$ и $\overrightarrow{P_1R}$. Основание этой высоты обозначим через S. Прямая P_2S перпендикулярна к прямым ℓ_1 и ℓ_2 и потому параллельна общему перпендикуляру к этим прямым. Пусть точки M_1 и M_2 имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы об общем перпендикуляре. Нетрудно проверить, что если отложить вектор $\overrightarrow{P_2S}$ от точки M_2, то концом соответствующего направленного отрезка будет точка M_1. Следовательно, расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равно длине высоты P_2S. Ясно, что эта длина равна частному от деления объема нашего параллелепипеда на площадь его основания, т. е. параллелограмма, построенного на векторах $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Обозначим расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 через $d(\ell_1, \ell_2)$. Вспоминая геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов (см. § 12 и 13 соответственно), мы получаем, что

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\,\vec{a}\vec{s}_1\vec{s}_2\,|}{|\,\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\,|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния между скрещивающимися прямыми.

Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 12 и формулу (4) из § 13, можно в явном виде выразить $d(\ell_1, \ell_2)$ через координаты точек P_1 и P_2 и векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$:

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 + (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}}$$

(символом mod здесь, как и в формуле (6) из § 12, обозначен модуль определителя).