§ 22. Базис векторного пространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Базисом векторного пространства называется упорядоченная максимальная линейно независимая система векторов из этого пространства.

- Слово «упорядоченная» в определении базиса означает, что если две максимальных линейно независимых системы векторов состоят из одних и тех же векторов, записанных в разном порядке, то они являются *различными* базисами.
- Слова «максимальная линейно независимая система векторов» в определении базиса означают, что базис — это система векторов, максимальная (по включению) среди линейно независимых систем, т. е. линейно независимая система векторов, которая при добавлении к ней любого вектора становится линейно зависимой.

Определение

Система векторов из векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из V линейно выражается через какие-то векторы из этой системы.

Лемма о базисах и системах образующих

Конечная упорядоченная система векторов является базисом векторного пространства V тогда и только тогда, когда она является линейно независимой системой образующих этого пространства.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V и $\mathbf{b} \in V$. По определению базиса система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независима, а система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ линейно зависима. В силу леммы о добавлении вектора к линейно независимой системе векторов (см. § 21) вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — линейно независимая система образующих пространства V и $\mathbf{b} \in V$. По определению системы образующих $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. В силу критерия линейной зависимости (см. § 21) система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ линейно зависима. Таким образом, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — максимальная линейно независимая система.

Следующее наблюдение показывает, что в случаях плоскости и обычного трехмерного простарнства введенное в данном параграфе понятие базиса совпадает с теми понятиями базиса, которые были введены в этих случаях ранее (см. § 10).

Замечание о базисе плоскости и трехмерного пространства

а) *Базисом плоскости (в смысле данного выше определения) является произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости.*

б) *Базисом обычного трехмерного пространства (в смысле данного выше определения) является произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов этого пространства.*

Доказательство. а) Пара неколлинеарных векторов плоскости линейно независима в силу замечания о линейной зависимости на плоскости и в трехмерном пространстве (см. § 21) и является системой образующих плоскости в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (см. § 10). Остается сослаться на лемму о базисах и системах образующих.

б) Это утверждение доказывается вполне аналогично предыдущему. $\square$

Пример базиса в пространстве F_n

Приведем очень важный для дальнейшего пример базиса в пространстве F_n. В § 21 были введены в рассмотрение векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ из этого пространства.

3-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$

Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства F_n.

Доказательство. В силу 1-го и 2-го замечаний о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (см. § 21) векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ являются линейно независимой системой образующих пространства $\mathbb{R}_n$. Остается сослаться на лемму о базисах и системах образующих. $\square$

Определение

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ называется *стандартным базисом* пространства F_n.

- Как мы увидим в дальнейшем (см. § 37), стандартный базис играет в линейной алгебре такую же роль, какую в аналитической геометрии играл ортонормированный базис плоскости или (трехмерного) пространства.

Обсудим вкратце вопрос о базисах в других векторных пространствах, упоминавшихся в § 21.

Пространство многочленов и пространство функций. Легко проверить, что в качестве базиса пространства $F_n[x]$ можно взять многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$. А вот пространство $F[x]$, равно как и пространство функций, базиса не имеют. Убедимся в этом для пространства многочленов. Предположим, что многочлены $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ образуют базис пространства многочленов и обозначим через k максимум из степеней этих многочленов. Очевидно, что степень любой линейной комбинации многочленов $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ не превосходит k, и потому многочлен x^{k+1} не выражается линейно через $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$. В силу леммы о базисах и системах образующих это означает, что многочлены $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ не образуют базиса.

Пространство матриц. Пусть F — поле, m и n — натуральные числа, $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. Обозначим через E_{ij} матрицу, в которой в i-й строке и j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны 0. Такие матрицы называются *матричнымим единицами*. Легко проверяется, что совокупность всех матричных единиц размера $m \times n$ образует базис пространства $F^{m \times n}$.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Вопросу о том, как построить базис этого пространства будет целиком посвящен § 28. Здесь мы ограничимся только упоминанием о том, что если однородная система является неопределенной, то базис пространства ее решений существует, а если она имеет единственное решение — то не существует.

Нулевое пространство. Из следующего наблюдения вытекает, что это пространство базиса не имеет.

Замечание о нулевом векторе и базисе векторного пространства

Нулевой вектор векторного пространства не может входить ни в какой его базис.

Доказательство. В силу леммы о системе векторов, содержащей нулевой вектор (см. § 21), любая система векторов, в которую входит нулевой вектор, линейно зависима и потому не является базисом. □

Отметим, что в § 10 мы упомянали об аналогичном свойстве базисов плоскости и трехмерного пространства.

Определение

Ненулевое векторное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует базис. Нулевое пространство также по определению считается конечномерным.

Как мы видели выше, существуют ненулевые векторные пространства, не имеющие базиса (например, пространство многочленов или пространство функций). В действительности, в таких пространствах тоже можно ввести понятие базиса, Мы не будем давать соответствующего определения, поскольку далее оно нам не пригодится. Отметим только, что все базисы таких пространств состоят из бесконечного числа векторов.

- Пространства, базисы которых бесконечны, называются *бесконечномерными*. Изучение бесконечномерных пространств выходит за рамки линейной алгебры, им посвящен другой раздел математики, называемый функциональным анализом.

!! *На протяжении всего последующего курса мы будем рассматривать только конечномерные пространства. Слова «векторное пространство» всюду далее означают «конечномерное векторное пространство».*

Следующее утверждение является точным аналогом теорем о разложении вектора по базису на плоскости и в трехмерном пространстве, доказанных в § 10.

Теорема о разложениии вектора по базису

Пусть V — ненулевое векторное пространство, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис этого пространства и $\mathbf{x} \in V$. Тогда существуют, и притом единственные, скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_n$ такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n. \tag{1}$$

Доказательство. Существование коэффициентов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ с требуемым свойством вытекает из леммы о базисах и системах образующих. Осталось доказать единственность. Предположим, что наравне с равенством (1) выполнено равенство $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n$ для некоторых скаляров $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Вычтем последнее равенство из (1). Получим

$$(t_1 - s_1)\mathbf{a}_1 + (t_2 - s_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (t_n - s_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, получаем, что $t_i - s_i = 0$, т. е. $t_i = s_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Определение

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_n$ называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Тот факт, что вектор $\mathbf{x}$ имеет в некотором базисе координаты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ записывается так: $\mathbf{x} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Из 2-го замечания о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (см. § 21) вытекает

Замечание о компонентах вектора

Компоненты любого вектора из пространства F_n являются координатами этого вектора в стандартном базисе. $\square$

Следующее утверждение является аналогом замечания о координатах векторов $\vec{x}+\vec{y}$ и $t\vec{x}$ из § 10.

Замечание о координатах суммы векторов и произведения вектора на скаляр

Пусть V — векторное пространство, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, а t — произвольный скаляр. Если в некотором базисе вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, а вектор $\mathbf{y}$ — координаты $(y_1,y_2,\dots,y_n)$, то вектор $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$, а вектор $t\mathbf{x}$ — координаты $(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ — базис, в котором даны координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\dots+x_n\mathbf{a}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{y}=y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{y}_2+\dots+y_n\mathbf{a}_n.$$

Складывая эти два равенства, получаем, что

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\dots+x_n\mathbf{a}_n)+(y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{y}_2+\dots+y_n\mathbf{a}_n)=$$
$$=(x_1+y_1)\mathbf{a}_1+(x_2+y_2)\mathbf{a}_2+\dots+(x_n+y_n)\mathbf{a}_n,$$

а умножая первое из них на скаляр t — что

$$t\mathbf{x}=t(x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\dots+x_n\mathbf{a}_n)=tx_1\mathbf{a}_1+tx_2\mathbf{a}_2+\dots+tx_n\mathbf{a}_n.$$

Остается вспомнить определение координат вектора.

Рассмотрим вопрос о том, как найти координаты вектора из пространства F_n в каком-либо базисе этого пространства. Пусть $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$ — базис пространства F_n, а $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — вектор из этого пространства. Требуется найти скаляры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Расписав это равенство покомпонентно, получим следующий набор равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Мы получили крамеровскую систему линейных уравнений, в которой в основной матрице по столбцам записаны базисные векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, а в столбце свободных членов — вектор $\mathbf{b}$. Решить ее можно двумя способами — либо по формулам, которые входят в теорему Крамера, либо методом Гаусса (см. § 9 и 7 соответственно). Поскольку, в силу теоремы о разложении вектора по базису, эта система имеет единственное решение, мы можем применить для решения нашей системы алгоритм, указанный в конце § 7. Получаем алгоритм, сформулированный на следующем слайде.

Нахождение координат вектора (2)

Алгоритм нахождения координат вектора

Пусть V — векторное пространство, $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ — его базис, а $\mathbf{b} \in V$. Чтобы найти координаты вектора $\mathbf{b}$ в базисе A, надо составить расширенную матрицу системы линейных уравнений, записав в основную часть матрицы по столбцам координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ в некотором базисе, а в последнем столбце — координаты вектора $\mathbf{b}$ в том же базисе. После этого надо элементарными преобразованиями расширенной матрицы привести ее основную часть к единичному виду. В этот момент в последнем столбце полученной матрицы будут записаны искомые координаты.

Зная, что такое координаты вектора, мы можем сформулировать еще один алгоритм.

Алгоритм определения линейной зависимости или независимости системы векторов

Чтобы выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой, надо записать в матрицу по строкам координаты векторов этой системы в некотором фиксированном базисе и начать приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Если в процессе элементарных преобразований возникнет хотя бы одна нулевая строка, система линейно зависима. Если мы доведем матрицу до ступенчатого вида и нулевые строки в процессе преобразований не возникнут, система линейно независима.

Обоснование этого алгоритма будет дано в § 27.

Наша ближайшая цель — доказать, что любые два базиса векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов. Как мы увидим, этот факт легко вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма о большом наборе векторов

Если векторное пространство содержит базис из n векторов, то любой набор из более чем n векторов из этого пространства линейно зависим.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис векторного пространства V, $k > n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Разложим векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ по базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{b}_n, \\ \mathbf{a}_2 = a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{b}_n, \\ \dotfill \\ \mathbf{a}_k = a_{k1}\mathbf{b}_1 + a_{k2}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{b}_n. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные скаляры такие, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Умножим первое равенство из набора равенств (2) на t_1, второе — на t_2, $\ldots$, последнее — на t_k и сложим полученные равенства.

Получим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \\
&= t_1(a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 + \dots + a_{1n}\mathbf{b}_n) + \\
&+ t_2(a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + a_{2n}\mathbf{b}_n) + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ t_k(a_{k1}\mathbf{b}_1 + a_{k2}\mathbf{b}_2 + \dots + a_{kn}\mathbf{b}_n) = \\
&= (t_1a_{11} + t_2a_{21} + \dots + t_ka_{k1})\mathbf{b}_1 + \\
&+ (t_1a_{12} + t_2a_{22} + \dots + t_ka_{k2})\mathbf{b}_2 + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ (t_1a_{1n} + t_2a_{2n} + \dots + t_ka_{kn})\mathbf{b}_n.
\end{aligned}$$

Поскольку векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ линейно независимы, отсюда вытекает, что

$$\begin{cases}
a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{k1}t_k = 0, \\
a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{k2}t_k = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{kn}t_k = 0.
\end{cases} \tag{3}$$

Равномощность базисов (3)

Будем смотреть на равенства (3) как на однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Число уравнений в этой системе меньше, чем число неизвестных, так как $k > n$. В силу замечания о существовании ненулевого решения однородной системы (см. § 7) система (3) имеет ненулевое решение. Это означает, что можно найти скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_k$, по крайней мере один из которых не равен нулю, такие, что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Но это противоречит тому, что система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независима. □

Теперь мы можем легко доказать анонсированное выше утверждение.

Теорема о равномощности базисов

Любые два базиса векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базисы одного и того же векторного пространства. Поскольку обе эти системы векторов линейно независимы, из леммы о большом наборе векторов вытекает, что ни случай $k < n$, ни случай $n < k$ невозможны. Следовательно, $k = n$. □

Теорема о равномощности базисов делает корректным следующее

Определение

Число векторов в базисе ненулевого векторного пространства называется *размерностью* этого пространства. Размерность нулевого пространства по определению равна 0. Размерность векторного пространства V обозначается через $\dim V$. Если $\dim V = n$, то пространство V называется n-*мерным*.

Поскольку стандартный базис пространства F_n состоит из n векторов, справедливо

Замечание о размерности пространства F_n

Размерность пространства F_n равна n. □

Из приведенных выше примеров базисов в различных пространствах вытекает также, что $\dim F_n[x] = n + 1$, а $\dim F^{m \times n} = mn$.

Из леммы о большом наборе векторов вытекает

Замечание о базисах n-мерного пространства

Если $\dim V = n$, *то любой линейно независимый набор из* n *векторов пространства* V *является базисом в* V.

Доказательство. Если к линейно независимому набору из n векторов n-мерного пространства добавить любой вектор, то в силу леммы о большом наборе векторов полученный набор векторов будет линейно зависимым. Остается сослаться на определение базиса. $\square$

Теорема о дополнении до базиса

Любой линейно независимый набор векторов из конечномерного векторного пространства можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть V — n-мерное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — линейно независимый набор векторов из V. Из леммы о большом наборе векторов вытекает, что $k \leqslant n$. Если $k = n$, то в силу замечания о базисах n-мерного пространства $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства V. Пусть теперь $k < n$. В силу теоремы о равномощности базисов векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ не образуют базиса пространства V. Поскольку они линейно независимы, из определения базиса вытекает, что к ним можно добавить вектор $\mathbf{a}_{k+1}$ так, что набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ останется линейно независимым. Если $k + 1 = n$, то в силу замечания о базисах n-мерного пространства $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}$ — базис пространства V. В противном случае к нему вновь можно добавить один вектор так, чтобы получившийся набор остался линейно независимым. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов получим линейно независимый набор из n векторов. После этого останется только в очередной раз сослаться на замечание о базисах n-мерного пространства. $\square$

Из теоремы о дополнении до базиса вытекает следующее утверждение.

Следствие о существовании базиса

Любое ненулевое конечномерное векторное пространство имеет хотя бы один базис.

Доказательство. Пусть V — ненулевое конечномерное векторное пространство и $\mathbf{x}$ — ненулевой вектор из V. В силу леммы о равенстве $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (см. § 21) набор векторов, состоящий из вектора $\mathbf{x}$, линейно независим. Согласно теореме о дополнении до базиса, этот набор можно дополнить до базиса пространства V. $\square$

Поскольку, как отмечалось в § 21, векторные пространства являются универсальными алгебрами, к ним можно применять понятие изоморфизма (см. конец § 4). В оставшейся части параграфа мы установим, что всякое n-мерное векторное пространство над полем F изоморфно пространству F_n. Чтобы облегчить восприятие этого материала, укажем явно, какой вид принимает определение изоморфизма применительно к векторным пространствам.

Определение

Векторные пространства V_1 и V_2 над одним и тем же полем F называются *изоморфными*, если существует биекция f из V_1 на V_2 (называемая *изоморфизмом*) такая, что для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$ и любого $t \in F$ выполнены равенства

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad f(t\mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Теорема об изоморфизме векторных пространств

Любое n-мерное векторное пространство V над полем F изоморфно пространству F_n.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V, $\mathbf{b} \in V$, а $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — координаты вектора $\mathbf{b}$ в этом базисе. Определим отображение f из V в F_n правилом: $f(\mathbf{b}) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Из единственности разложения вектора по базису вытекает, что отображение f инъективно. Сюръективность этого отображения очевидна: если $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in F_n$, то $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n$. Наконец, выполнение равенств (4) вытекает из замечания о координатах суммы векторов и произведения вектора на скаляр. Таким образом, f — изоморфизм из V на F_n. □

Теорема об изоморфизме векторных пространств показывает, насколько важной характеристикой векторного пространства является его размерность. С точки зрения действия алгебраических операций размерность конечномерного векторного пространства однозначно определяет это пространство: для всякого n существует (с точностью до изоморфизма) лишь одно n-мерное векторное пространство над данным полем F — пространство F_n. Этим и объясняется упоминавшаяся в предыдущем параграфе особая роль пространства F_n в линейной алгебре.