§ 23. Подпространства и линейные многообразия

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Поскольку, как отмечалось в § 21, векторные пространства являются универсальными алгебрами, к ним можно применять понятие подалгебры (см. § 4). Для облегчения восприятия дальнейшего материала, укажем явно, какой вид принимает это понятие в случае векторных пространств.

Определение

Непустое подмножество M векторного пространства V над полем F называется *подпространством* пространства V, если выполняются следующие условия:

1) если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно сложения векторов*);
2) если $\mathbf{x} \in M$, а $t \in F$, то $t\mathbf{x} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно умножения вектора на скаляр*).

Приведем ряд примеров подпространств.

Пример 1. Пусть V — произвольное векторное пространство. Очевидно, что все пространство V и множество $M = \{\mathbf{0}\}$ являются подпространствами в V.

Очевидно, что множество всех подпространств векторного пространства с отношением включения является чумом. Подпространство V является наибольшим элементом этого чума, а подпространство $\{\mathbf{0}\}$ — наименьшим. Первое из этих двух утверждений очевидно, а второе вытекает из следующего замечания.

Замечание о нулевом векторе и подпространствах

Нулевой вектор содержится в любом подпространстве M пространства V.

Доказательство. Если $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из M, то, по условию 2) из определения подпространства, $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} \in M$. $\square$

Пример 2. Пусть V — обычное трехмерное пространство, а M — множество векторов из V, коллинеарных некоторой плоскости π. Ясно, что сумма двух векторов, коллинеарных π, и произведение вектора, коллинеарного π, на любое число коллинеарны π. Следовательно, M — подпространство в V. Аналогично доказывается, что подпространством в V является и множество векторов, коллинеарных некоторой прямой ℓ.

Пример 3. В силу теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6) общее решение произвольной однородной системы линейных уравнений с n неизвестными над полем F есть подпространство пространства F_n.

Пример 4. Пусть V — произвольное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Обозначим через M множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, т. е.

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k \text{ и } \mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$$

для некоторых скаляров $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Пусть, далее, t — произвольный скаляр. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k) + (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k) = \\ &= (s_1 + t_1)\mathbf{a}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (s_k + t_k)\mathbf{a}_k \quad \text{и} \\ t\mathbf{x} &= t(s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k) = (ts_1)\mathbf{a}_1 + (ts_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (ts_k)\mathbf{a}_k.\end{aligned}$$

Мы видим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} \in M$, т. е. M — подпространство пространства V. Оно называется *подпространством, порожденным векторами* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ или *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, и обозначается через $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$.

Примеры подпространств (3)

Ясно, что если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — система порождающих (в частности, базис) пространства V, то $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = V$. Таким образом,

- *любое подпространство конечномерного векторного пространства является подпространством, порожденным некоторым набором векторов (например, своим базисом).*

Замечание о подпространстве, порожденном набором векторов

Пусть V — векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Тогда $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ — наименьшее подпространство пространства V, содержащее векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. Пусть M — подпространство пространства V, содержащее векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Из определения подпространства вытекает, что любая линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ лежит в M. Следовательно, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle \subseteq M$. $\square$

Очевидно, что подпространство векторного пространства само является векторным пространством. Это позволяет говорить о размерности и базисе подпространства.

Предложение о размерности подпространства

Пусть M — подпространство векторного пространства V. Тогда $\dim M \leqslant \dim V$*, причем* $\dim M = \dim V$ *тогда и только тогда, когда* $M = V$.

Доказательство. Если M или V — нулевое пространство, то оба утверждения предложения выполняются тривиальным образом. Будем поэтому считать, что M и V — ненулевые пространства. Зафиксируем базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ подпространства M и базис $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell)$ пространства V. Если $k > \ell$, то в силу леммы о большом наборе векторов (см. § 22) система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. Но это противоречит определению базиса. Следовательно, $k \leqslant \ell$, т. е. $\dim M \leqslant \dim V$.

Размерность подпространства (2)

Пусть теперь $\dim M = \dim V$, т. е. $k = \ell$. Тогда система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ является максимальной линейно независимой. В самом деле, в противном случае существует вектор $\mathbf{a}$ такой, что система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ линейно независима. Но она содержит $k+1$ вектор, что противоречит лемме о большом наборе векторов (см. § 22). Таким образом, система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ является базисом пространства V. Следовательно, любой вектор из V является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Поскольку эти векторы лежат в M, а M — подпространство в V, это означает, что любой вектор из V лежит в M, т. е. $V \subseteq M$. Обратное включение выполнено по условию, и потому $M = V$. Итак, если $\dim M = \dim V$, то $M = V$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Укажем способ нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов.

Алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порожденного данным набором векторов

Запишем координаты данных векторов в некотором фиксированном базисе пространства в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности.

Обоснование этого алгоритма будет дано в § 27.

Определение

Пусть V — векторное пространство, $\mathbf{x}_0 \in V$, а M — подпространство в V. Множество всех векторов вида $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in M$, называется *линейным многообразием* в V и обозначается через $\mathbf{x}_0 + M$. Вектор $\mathbf{x}_0$ называется *вектором сдвига* многообразия $\mathbf{x}_0 + M$, а подпространство M — *направляющим подпространством* этого многообразия.

Приведем примеры линейных многообразий.

Пример 1. Если $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}_0 + M = M$. Таким образом, всякое подпространство пространства V является линейным многообразием в V.

Пример 2. Если $M = \{\mathbf{0}\}$, то $\mathbf{x}_0 + M = \{\mathbf{x}_0\}$. Таким образом, всякий вектор из V также является линейным многообразием в V.

Пример 3. Согласно теореме о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6), общее решение произвольной совместной системы линейных уравнений с n неизвестными над полем F является линейным многообразием в F_n, вектором сдвига которого является произвольное частное решение системы, а направляющим подпространством — общее решение соответствующей однородной системы.

Пример 4. Рассмотрим произвольную плоскость π. Зафиксируем на ней прямоугольную декартову систему координат и рассмотрим прямую ℓ на π. Будем отождествлять прямую ℓ с множеством всех направленных отрезков, начинающихся в начале координат и заканчивающихся на ℓ. Про такие направленные отрезки мы будем говорить, что они «принадлежат прямой». Если ℓ проходит через начало координат, то она, очевидно, является подпространством, а значит, и линейным многообразием (см. пример 1 на предыдущем слайде). Пусть теперь ℓ не проходит через начало координат. Выберем произвольным образом и зафиксируем направленный отрезок $\vec{x}_0$, принадлежащий ℓ. Обозначим через ℓ_1 прямую, параллельную ℓ и проходящую через начало координат. Тогда всякий направленный отрезок $\vec{x}$, принадлежащий ℓ, может быть представлен как сумма направленного отрезка $\vec{x}_0$ и некоторого направленного отрезка $\vec{y}$, принадлежащего ℓ_1 (см. рис. 1). Обратно, всякий направленный отрезок вида $\vec{x}_0 + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \ell_1$, принадлежит ℓ. Поскольку ℓ_1 — подпространство, получаем, что ℓ — линейное многообразие с вектором сдвига $\vec{x}_0$ и направляющим подпространством ℓ_1. Аналогично можно проверить, что любая плоскость (рассматриваемая как множество направленных отрезков, идущих из начала координат в точки плоскости) является линейным многообразием в трехмерном пространстве.

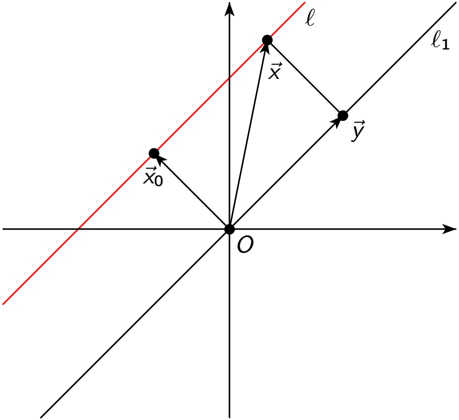

Рис. 1. Прямая как линейное многообразие

В примерах 3 и 4 в качестве вектора сдвига можно было взять произвольный вектор, принадлежащий данному линейному многообразию. Оказывается, что это не случайно: этот факт справедлив для любого линейного многообразия. Мы получим это утверждение как следствие из следующего результата.

Критерий равенства линейных многообразий

Пусть $P = \mathbf{x}_0 + M$ и $Q = \mathbf{y}_0 + N$ — линейные многообразия в векторном пространстве V. Равенство $P = Q$ имеет место тогда и только тогда, когда $M = N$ и $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $P = Q$. Докажем сначала, что $M = N$. Пусть $\mathbf{a} \in M$. Поскольку $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \in P$ и $P = Q$, получаем, что $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \in \mathbf{y}_0 + N$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{b} \in N$ такой, что $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}$. Далее,

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbf{y}_0 + N, \tag{1}$$

так как $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{0} \in P$ и $P = Q$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{c} \in N$ такой, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c}$. Имеем

$$\mathbf{y}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c} + \mathbf{a},$$

откуда $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c} \in N$. Итак, если $\mathbf{a} \in M$, то $\mathbf{a} \in N$. Следовательно, $M \subseteq N$. Аналогично проверяется, что $N \subseteq M$ и потому $M = N$.

Остается проверить, что $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$. В самом деле, из (1) и доказанного только что равенства $M = N$ вытекает, что $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{y}_0 + M$. Следовательно, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{a}$ для некоторого вектора $\mathbf{a} \in M$ и потому $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \mathbf{a} \in M$.

Достаточность. Пусть теперь $M = N$ и $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$. Требуется доказать, что $P = Q$. Пусть $\mathbf{a} \in P$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}$ для некоторого вектора $\mathbf{b} \in M$. По условию $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \mathbf{c}$ для некоторого вектора $\mathbf{c} \in M$. Следовательно, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{y}_0 + (\mathbf{c} + \mathbf{b})$. Поскольку $\mathbf{c} + \mathbf{b} \in M$ и $M = N$, имеем $\mathbf{a} \in Q$. Следовательно, $P \subseteq Q$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что $Q \subseteq P$ и потому $P = Q$. □

В частности, из доказанного критерия видно, что

- *направляющее подпространство данного линейного многообразия определено однозначно.*

Это позволяет определить *размерность* линейного многообразия $\mathbf{x}_0 + M$ как размерность подпространства M.

Докажем теперь обещанное выше следствие.

Следствие о векторе сдвига

Пусть $P = \mathbf{x}_0 + M$ *— линейное многообразие в векторном пространстве* V *и* $\mathbf{x}_1 \in P$. *Тогда* $P = \mathbf{x}_1 + M$.

Доказательство. По условию $\mathbf{x}_1 \in P$, т. е. $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{x}_0 + M$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{y} \in M$ такой, что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$. Но тогда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{y} \in M$. Из доказанной выше теоремы вытекает, что $P = \mathbf{x}_1 + M$. □

Таким образом,

- *в качестве вектора сдвига данного линейного многообразия можно взять произвольный принадлежащий ему вектор.*