§ 26. Обратная матрица

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение обратной матрицы

Определение

Пусть A — произвольная матрица. Матрица B называется *обратной к* A, если $AB = BA = E$, где E — единичная матрица. Если матрица, обратная к A, существует, то матрица A называется *обратимой*. Матрица, обратная к A, обозначается через A^{-1}.

В определении ничего не говорится о размерах матрицы A и обратной к ней матрицы. Но из замечания о произведениях матриц в разном порядке (см. § 25) вытекает

Замечание о квадратности обратимой матрицы

Если матрица A обратима, то она является квадратной матрицей, а обратная к ней матрица является квадратной матрицей того же порядка, что и A. $\square$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, первое утверждение которой называется *критерием обратимости матрицы*.

Теорема об обратной матрице

Пусть A — квадратная матрица.

1) *Матрица, обратная к A, существует тогда и только тогда, когда матрица A невырожденна.*
2) *Если матрица A невырожденна, то матрица, обратная к A, единственна и может быть вычислена по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^{\top}. \qquad (1)$$

Доказательство. Предположим, что $|A| = 0$ и существует матрица B, обратная к A. Тогда $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$ по теореме об определителе произведения матриц (см. § 25). С другой стороны, из определения обратной матрицы вытекает, что $|AB| = |E| = 1$. Полученное противоречие показывает, что если матрица, обратная к A, существует, то $|A| \neq 0$, т. е. матрица A невырожденна.

Предположим теперь, что A невырожденна, т. е. $|A| \neq 0$. Положим $B = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^{\top}$. Докажем, что матрица B, обратна к A. В самом деле, из замечания о присоединенной матрице (см. § 25) вытекает, что

$$AB = A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^{\top} \right) = \frac{1}{|A|} \cdot A \cdot (A^{\vee})^{\top} = \frac{1}{|A|} \cdot |A| \cdot E = E,$$

и, аналогично, $BA = E$. Итак, матрица B обратна к A. Тем самым мы, во-первых, завершили доказательство п. 1), так как установили, что матрица, обратная к невырожденной матрице, существует, а во-вторых доказали часть п. 2), не связанную с единственностью обратной матрицы. Осталось учесть, что единственность обратной матрицы в специальной проверке не нуждается, так как вытекает из общеалгебраических соображений, а именно, — из леммы об обратном элементе (см. § 4). □

Из сказанного выше вытекает, что

- совокупность всех невырожденных квадратных матриц порядка n над полем F с операцией умножения матриц образует группу. Нейтральным элементом этой группы является единичная матрица порядка n.

Матрица B, обратная к A, должна удовлетворять двум равенствам: $AB = E$ и $BA = E$. Следующее утверждение показывает, однако, что на практике достаточно проверять одно из них.

Лемма об определении обратной матрицы

Пусть A — квадратная матрица, а матрица B такова, что $AB = E$. Тогда матрица A обратима и $B = A^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы об определителе произведения матриц (см. § 25) $|A| \cdot |B| = |AB| = |E| = 1$. В частности, отсюда следует, что $|A| \neq 0$. Из теоремы об обратной матрице теперь вытекает, что матрица A обратима. Умножая обе части равенства $AB = E$ слева на A^{-1}, получим $A^{-1}(AB) = A^{-1}E$. Но $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$, а $A^{-1}E = A^{-1}$. Таким образом, $B = A^{-1}$. □

Свойства обратной матрицы

Если A и B — невырожденные квадратные матрицы одного и того же порядка над полем F, $t \in F$ и $t \neq 0$, то:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) $(tA)^{-1} = \frac{1}{t} \cdot A^{-1}$;
4) $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$;
5) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Свойства 1) и 2) являются частными случаями общих свойств обратных элементов (см. § 4). Свойство 3) вытекает из леммы об определении обратной матрицы и того, что

$$(tA) \cdot \left(\frac{1}{t} \cdot A^{-1}\right) = \left(t \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot (AA^{-1}) = 1 \cdot E = E.$$

Свойство 4) легко вытекает из формулы (1) и 1-го свойства определителей (см. § 8). Используя теорему об определителе произведения матриц из § 25, имеем $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$. Это доказывает свойство 5).

Один из способов вычисления обратной матрицы дает формула (1). Эту формулу удобно применять при $n = 2$: легко проверяется, что в этом случае она принимает следующий простой вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Но при больших n этот способ требует выполнения большого объема вычислений, который к тому же очень быстро (экспоненциально) растет с ростом порядка матрицы: если матрица A имеет порядок n, то необходимо сосчитать один определитель n-го порядка и n^2 определителей $(n-1)$-го порядка. На следующем слайде будет указан менее трудоемкий способ нахождения обратной матрицы. При этом способе не требуется вычислять ни одного определителя, а с ростом n объем необходимых вычислений растет медленно (линейно).

Матрица, обратная к матрице A, есть не что иное, как решение уравнения $AX = E$, где A — невырожденная квадратная матрица. Из приведенного в § 25 алгоритма решения матричного уравнения вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы A вытекает

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Пусть A — невырожденная квадратная матрица порядка n. Запишем матрицу $(A \mid E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних n столбцах) полученной матрицы будет записана матрица A^{-1}.

Рассмотрим матричное уравнение вида $AX = B$, где A — невырожденная квадратная матрица. Умножив обе его части слева на матрицу A^{-1} (существующую в силу критерия обратимости матрицы), получим слева $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, а справа — $A^{-1}B$. Таким образом, рассматриваемое уравнение решается по формуле $X = A^{-1}B$. Аналогично проверяется, что уравнение вида $XA = B$, где A — невырожденная квадратная матрица, решается по формуле $X = BA^{-1}$, а уравнение вида $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы — по формуле $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Особый интерес представляет первое из рассмотренных в предыдущем абзаце уравнений, т. е. уравнение $AX = B$, в случае, когда B (а значит и X) — матрица, состоящая из одного столбца. Как мы знаем, в этом случае $AX = B$ — это матричная запись системы линейных уравнений с основной матрицей A (см. § 25). Тот факт, что матрица A квадратна, означает, что эта система является крамеровской. Если $|A| \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение. В силу сказанного выше, это решение может быть найдено по формуле $X = A^{-1}B$.

Как уже отмечалось в § 25, для всякого поля F и всякого натурального числа n множество всех квадратных матриц порядка n над F с операциями сложения и умножения матриц является кольцом. Оказывается, что если $F = \mathbb{R}$, а $n \geqslant 2$, то это кольцо содержит в себе поле $\mathbb{C}$. Более точно, справедливо следующее

Предложение о матричном представлении комплексных чисел

Поле $\mathbb{C}$ изоморфно вложимо в кольцо всех квадратных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$.

Доказательство. Определим отображение φ из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}^{2\times 2}$ правилом:

$$\varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Покажем, что φ является изоморфным вложением.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$. Из определения суммы матриц немедленно вытекает, что

$$\varphi(z_1)+\varphi(z_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -b_1-b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} = \varphi(z_1+z_2).$$

Далее,

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_1a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \varphi\big((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i\big) = \varphi(z_1z_2).$$

Из определения отображения φ немедленно вытекает, что

$$\varphi(1) = \varphi(1 + 0 \cdot i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. φ переводит число 1 в нейтральный по умножению элемент кольца $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Осталось проверить, что если $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\varphi(z^{-1}) = \big(\varphi(z)\big)^{-1}$. Пусть $z = a + bi \neq 0$. Как проверено в § 5, $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i$. Учитывая формулу (2), имеем:

$$\varphi(z^{-1}) = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \big(\varphi(z)\big)^{-1}.$$

Предложение доказано. $\square$