§ 30. Образ и ядро линейного оператора

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. *Образом* оператора $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{y} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{x} \in V$. *Ядром* оператора $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{x} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Образ оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, а его ядро — через $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

- Образ линейного оператора — это аналог известного из школьного курса понятия области изменения функции.
- Каждое из множеств $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ непусто. Для первого из них это очевидно, а для второго вытекает из того, что $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (см. § 29).

Замечание об образе и ядре

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V. Образ и ядро оператора $\mathcal{A}$ являются подпространствами в V. Если $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, то подпространство $\operatorname{Im} A$ порождается векторами $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_2)$, $\ldots$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, а $t \in F$. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ такие, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. Следовательно,

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad t\mathbf{y}_1 = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1).$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x}_1 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — подпространство в V. Далее, пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, а t — вновь произвольный скаляр. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x}_1 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ — подпространство в V. Если $\mathbf{x} \in V$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots x_n\mathbf{p}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}_n(\mathbf{p}_n).$$

Следовательно, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A}(\mathbf{p}_1), \mathcal{A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) \rangle$. Обратное включение очевидно, поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \langle \mathcal{A}(\mathbf{p}_1), \mathcal{A}(\mathbf{p}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) \rangle$. $\square$

Замечание об образе и ядре позволяет говорить о размерности и базисе образа и ядра оператора $\mathcal{A}$.

Определение

Размерность образа линейного оператора $\mathcal{A}$ называется *рангом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $r(\mathcal{A})$, а размерность ядра оператора $\mathcal{A}$ называется *дефектом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $d(\mathcal{A})$.

Замечание о ранге линейного оператора

Пусть V — векторное пространство, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, а P — базис пространства V. Тогда ранг оператора $\mathcal{A}$ равен рангу матрицы A_P.

Доказательство. Из замечания об образе и ядре и определения матрицы линейного оператора в базисе вытекает, что пространство $\operatorname{Im} A$ порождается векторами-столбцами матрицы A_P. Следовательно, ранг оператора равен рангу этой матрицы по столбцам. $\square$

Теорема о ранге и дефекте

Пусть V — векторное пространство, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V. Тогда сумма ранга и дефекта оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства V.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in V$. Ясно, что $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $A_P[\mathbf{x}]_P = [\mathcal{A}(\mathbf{x})]_P = O$, где O — нулевой столбец. Иными словами, пространство $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ совпадает с пространством решений однородной системы линейных уравнений $A_P[\mathbf{x}]_P = O$. Положим $r = r(A_P)$. В силу теоремы о размерности пространства решений однородной системы (см. § 28) $d(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n - r$. Учитывая замечание о ранге линейного оператора, получаем, что $r(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}) = r + (n - r) = n$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, а A — матрица этого оператора в некотором базисе. Из замечания об образе и ядре и определения матрицы линейного оператора в базисе вытекает, что пространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ совпадает с пространством, порожденным векторами-столбцами матрицы A или, что то же самое, с пространством, порожденным векторами-строками матрицы $A^\top$. Учитывая алгоритм нахождения базиса подпространства, изложенный в § 23, мы получаем следующий

Алгоритм нахождения базиса и размерности образа линейного оператора

Пусть V — векторное пространство над полем F, $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе P. Чтобы найти базис подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, надо привести к ступенчатому виду матрицу $A^\top$. В ненулевых строках полученной матрицы будут записаны координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ в базисе P, а число этих строк равно размерности пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Из доказательства теоремы о ранге и дефекте вытекает, что базис ядра линейного оператора $\mathcal{A}$ — это фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть матрица этого оператора в некотором базисе. Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений указан в § 28. Поэтому нет необходимости в том, чтобы специально формулировать алгоритм нахождения базиса и размерности ядра линейного оператора.

Приведем еще один алгоритм нахождения базисов и размерностей образа и ядра оператора $\mathcal{A}$. Его преимуществом является то, что он позволяет найти базисы образа и ядра *одновременно*. Кроме того, этот алгоритм будет существенно использоваться в дальнейшем при решении более сложных задач. Алгоритм найден сравнительно недавно (в 1991 г.), его автором является новосибирский математик В. А. Чуркин.

Алгоритм Чуркина

Пусть V — векторное пространство над полем F, $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе P. Запишем матрицу $B = (E \mid A^\top)$ размера $n \times 2n$. Элементарными преобразованиями всей этой матрицы (без использования перестановки столбцов) приведем ее правую часть к ступенчатому виду. Полученную матрицу обозначим через $C = (C_1 \mid C_2)$, где C_2 — ступенчатая матрица, полученная на месте матрицы $A^\top$. Тогда:

(i) ненулевые строки матрицы C_2 содержат координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ в базисе P;

(ii) строки матрицы C_1, продолжениями которых в матрице C_2 являются нулевые строки, содержат координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ в базисе P.

Утверждение (i) немедленно вытекает из описанного ранее алгоритма нахождения базиса образа и того факта, что в процессе преобразований левая и правая части матрицы не «перемешиваются». Обоснуем утверждение (ii). Для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ вектор $\mathbf{p}_i$ имеет в базисе P координаты $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте. Поэтому можно считать, что единичная матрица, стоящая в левой части матрицы B, есть матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в базисе P. Вспоминая определение матрицы линейного оператора, получаем, что в правой части i-й строки матрицы B стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе P. Итак, i-ю строку матрицы B можно записать в виде $\left([\mathbf{p}_i]_P^\top \,\middle|\, \left[\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)\right]_P^\top\right)$, т. е. в виде

$$\left([\mathbf{v}]_P^\top \,\middle|\, \left[\mathcal{A}(\mathbf{v})\right]_P^\top\right), \qquad (1)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}_i$. При элементарных преобразованиях матрицы мы будем получать строки вида

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j [\mathbf{p}_j]_P^\top \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\mathcal{A}(\mathbf{p}_j)\right]_P^\top\right).$$

Преобразуем левую и правую части строки такого вида:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j [\mathbf{p}_j]_P^\top = \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{p}_j\right]_P^\top,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[\mathcal{A}(\mathbf{p}_j)\right]_P^\top = \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j \mathcal{A}(\mathbf{p}_j)\right]_P^\top =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\mathcal{A}(\lambda_j \mathbf{p}_j)\right]_P^\top = \mathcal{A}\Bigl(\sum_{j=1}^{n} \bigl(\left[\lambda_j \mathbf{p}_j\right]_P^\top\bigr)\Bigr).$$

Сравнивая полученные выражения, мы видим, что после элементарных преобразований мы вновь получаем строки вида (1). Поэтому строки матрицы C_1, продолжения которых в C_2 являются нулевыми, суть строки координат векторов из пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ в базисе P. Эти строки получены с помощью элементарных преобразований из строк единичной матрицы. Поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, ранг матрицы, составленной из этих строк, равен рангу единичной матрицы, т. е. равен числу этих строк. Следовательно, эти строки линейно независимы. Их число равно $n - r(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. В силу замечания о базисах n-мерного пространства (см. § 22) они образуют базис пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Это завершает обоснование алгоритма Чуркина.

Из определения сюръективного отображения из одного множества в другое вытекает

Замечание о сюръективности линейного оператора

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V сюръективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V$. $\square$

Замечание о инъективности линейного оператора

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$.

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ инъективен, то $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in V$, и потому $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. Обратно, пусть $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, и потому $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Это означает, что оператор $\mathcal{A}$ инъективен. $\square$

Лемма об инъективности и линейной независимости

Если линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V инъективен, а система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ из V линейно независима, то система векторов $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1), \mathcal{A}(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{v}_k)$ также линейно независима.

Доказательство. Если $\lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) + \cdots + \lambda_k\mathcal{A}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, то $\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$. Из инъективности $\mathcal{A}$ и равенства $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ теперь вытекает, что $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Поскольку система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ линейно независима, получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Следовательно, система $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1), \mathcal{A}(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{v}_k)$ линейно независима. $\square$

Из определения изоморфизма векторных пространств вытекает, что отображение $\mathcal{A}$ из V в себя является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — биективный линейный оператор.

Критерий изоморфности на языке линейных операторов

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. Следующие условия эквивалентны:

1) *$\mathcal{A}$ — изоморфизм V на себя;*

2) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$;

2') $r(\mathcal{A}) = \dim V$;

3) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$;

3') $d(\mathcal{A}) = 0$.

Доказательство. Эквивалентность условий 2) и 2') немедленно вытекает из определения ранга оператора, а эквивалентность условий 3) и 3') — из определения дефекта оператора. Утверждения 2') и 3') эквивалентны в силу теоремы о ранге и дефекте. Мы доказали эквивалентность условий 2), 2'), 3) и 3'). Из замечаний о сюръективности и об инъективности линейного оператора вытекает, что условие 1) эквивалентно одновременному выполнению условий 2) и 3).

А из сказанного выше вытекает, что одновременное выполнение условий 2) и 3) эквивалентно любому из этих двух условий. Таким образом, условие 1) эквивалентно остальным четырем условиям. $\square$

Следствие об изоморфизме и матрице линейного оператора

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V является изоморфизмом V на себя тогда и только тогда, когда матрица оператора $\mathcal{A}$ в произвольном базисе невырождена.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{A}$ — изоморфизм V на себя, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. В силу критерия изоморфности на языке линейных операторов $r(\mathcal{A}) = \dim V$, а согласно замечанию о ранге линейного оператора $r(\mathcal{A}) = r(A)$. Итак, $r(A) = \dim V$, т. е. ранг матрицы A совпадает с ее порядком. В частности, ранг A по минорам равен порядку матрицы A. Следовательно, $|A| \neq 0$, т. е. матрица A невырожденна.

Достаточность получается повторением тех же рассуждений в обратном порядке. $\square$