§ 31. Действия над линейными операторами

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в V. *Суммой* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{S}$ в V, задаваемый правилом $\mathcal{S}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Сумма операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначается через $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Множество всех линейных операторов в V обозначим через $\mathrm{Hom}(V)$.

Предложение о свойствах суммы операторов

Сумма линейных операторов является линейным оператором. Множество $\mathrm{Hom}(V)$ *с операцией сложения операторов является абелевой группой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t \in F$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{y}) = \\ &= \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) + \big(\mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{y})\big) = \mathcal{S}(\mathbf{x}) + \mathcal{S}(\mathbf{y}) \quad \text{и} \\ \mathcal{S}(t\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(t\mathbf{x}) + \mathcal{B}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = t\mathcal{S}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\mathcal{S}$ линеен.

Далее, если $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{Hom}(V)$, то

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\mathbf{x}) \quad \text{и}$$
$$\begin{aligned}((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C})(\mathbf{x}) &= (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})+\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})\big)+\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x})+\big(\mathcal{B}(\mathbf{x})+\mathcal{C}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+(\mathcal{B}+\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \\ &= \big(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})\big)(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

откуда $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$. Нейтральным элементом по сложению является нулевой оператор $\mathcal{O}$, поскольку

$$(\mathcal{A}+\mathcal{O})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

Обратным по сложению элементом к оператору $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$ является оператор $-\mathcal{A}$, определяемый правилом $(-\mathcal{A})(\mathbf{x}) = -\mathcal{A}(\mathbf{x})$, поскольку

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}+(-\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x})+(-\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+\big(-\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \mathcal{O}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, а $t \in F$. *Произведением оператора* $\mathcal{A}$ *на скаляр* t называется оператор $\mathcal{B}$ в V, задаваемый правилом $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x})$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Произведение оператора $\mathcal{A}$ на скаляр t обозначается через $t\mathcal{A}$.

Предложение о пространстве линейных операторов

Произведение линейного оператора на скаляр является линейным оператором. Множество $\mathrm{Hom}(V)$ *с операциями сложения операторов и умножения оператора на скаляр является векторным пространством.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t, s \in F$. Тогда:

$$(t\mathcal{A})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = t(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y})) = t\mathcal{A}(\mathbf{x})+t\mathcal{A}(\mathbf{y}) =$$
$$= (t\mathcal{A})(\mathbf{x})+(t\mathcal{A})(\mathbf{y}) \text{ и}$$
$$(t\mathcal{A})(s\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(s\mathbf{x})\big) = t\big(s\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big(t\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big((t\mathcal{A})(\mathbf{x})\big).$$

Следовательно, $t\mathcal{A}$ — линейный оператор.

Далее,

$$\big(t(\mathcal{A}+\mathcal{B})\big)(\mathbf{x}) = t\big((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})\big) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = \\ = t\mathcal{A}(\mathbf{x})+t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A})(\mathbf{x})+(t\mathcal{B})(\mathbf{x}),$$

т. е. $t(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = t\mathcal{A}+t\mathcal{B}$;

$$\big((t+s)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}) = (t+s)\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x})+s\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \\ = (t\mathcal{A})(\mathbf{x})+(s\mathcal{A})(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A}+s\mathcal{A})(\mathbf{x}),$$

т. е. $t\mathcal{A}+s\mathcal{A} = (t+s)\mathcal{A}$;

$$\big(t(s\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) = t\big((s\mathcal{A})(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \big((ts)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}),$$

т. е. $t(s\mathcal{A}) = (ts)\mathcal{A}$; наконец,

$$(1\cdot\mathcal{A})(\mathbf{x}) = 1\cdot\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x}),$$

т. е. $1\cdot\mathcal{A} = \mathcal{A}$. С учетом предложения о свойствах суммы операторов, мы получаем, что в $\mathrm{Hom}(V)$ выполнены все аксиомы векторного пространства. $\square$

Теорема о пространствах линейных операторов и матриц

Если V — векторное пространство над полем F и $\dim V = n$*, то векторные пространства* $Hom(V)$ *и* $F^{n\times n}$ *изоморфны.*

Доказательство. Зафиксируем в V базис $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$. Определим отображение φ из пространства $\mathrm{Hom}(V)$ в пространство $F^{n\times n}$ правилом: если $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, то $\varphi(\mathcal{A})$ — матрица оператора A в базисе P. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $t \in F$. Надо проверить, что отображение φ биективно и выполнены равенства

$$\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}) \text{ и } \varphi(t\mathcal{A}) = t\varphi(\mathcal{A}). \tag{1}$$

В матрице $\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ по столбцам записаны координаты векторов вида $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ в базисе P, а в матрицах $\varphi(\mathcal{A})$ и $\varphi(\mathcal{B})$ — координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$ соответственно в том же базисе ($i = 1, 2, \ldots, n$). Поскольку $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{p}_i) = \mathcal{A}(\mathbf{p}_i) + \mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$, координаты вектора $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ равны сумме координат векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$. Первое из равенств (1) доказано. Второе из них проверяется вполне аналогично.

Проверим, что отображение φ биективно. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $\varphi(\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{B})$, то из определения матрицы линейного оператора вытекает, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинаково действуют на базисных векторах пространства V. Но тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, так как линейный оператор однозначно определяется своим действием на базисных векторах. Следовательно, отображение φ инъективно. Далее, из теоремы существования и единственности линейного оператора и определения матрицы линейного оператора вытекает, что если A — произвольная квадратная матрица порядка n, то $A = A_P$ для некоторого оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$. Следовательно, отображение φ сюръективно. $\square$

Как отмечалось в § 22, размерность пространства матриц размера $m \times n$ равна mn. Поэтому из доказанной теоремы вытекает

Следствие о размерности пространства линейных операторов

Если V — векторное пространство и $\dim V = n$, то $\dim \mathrm{Hom}(V) = n^2$. $\square$

Линейный оператор, действующий в векторном пространстве V, является отображением из V в себя. В соответствии с общим понятием произведения отображений (см. § 1), можно говорить о произведении линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующих в V. Таким образом, произведение операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — это оператор $\mathcal{C}$ в V, задаваемый правилом $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big)$ для всякого $\mathbf{x} \in V$. Произведение операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначается через $\mathcal{AB}$.

Предложение о матрице произведения линейных операторов

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные операторы в векторном пространстве V над полем F, $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$, а P — базис пространства V. Оператор $\mathcal{C}$ является линейным. Если A, B и C — матрицы операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в базисе P соответственно, то $C = BA$.

Доказательство. Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t \in F$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = \\ &= \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) + \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = \mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}(\mathbf{y}) \quad \text{и} \\ \mathcal{C}(t\mathbf{x}) &= \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(t\mathbf{x})\big) = \mathcal{B}\big(t\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = t\big(\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = t\mathcal{C}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{C}$ — линейный оператор.

Осталось проверить равенство $C = BA$. Пусть $\mathbf{x} \in V$. Используя формулу (2) из § 29, получаем, что, с одной стороны, $\big[\mathcal{C}(\mathbf{x})\big]_P = C \cdot [\mathbf{x}]_P$, а с другой, $\big[\mathcal{C}(\mathbf{x})\big]_P = \big[(\mathcal{AB})(\mathbf{x})\big]_P = \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\big]_P = B \cdot \big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_P = BA \cdot [\mathbf{x}]_P$. Таким образом, $C \cdot [\mathbf{x}]_P = BA \cdot [\mathbf{x}]_P$. Поскольку это равенство выполнено для любого вектора $\mathbf{x} \in V$, в качестве столбца $[\mathbf{x}]_P$ может выступать произвольная матрица размера $n \times 1$ над полем F, где $n = \dim V$. В силу ослабленного закона сокращения для матриц (см. § 25), имеем $C = BA$. $\square$

Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$ и любого натурального n определим по индукции оператор $\mathcal{A}^n$: $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$, а если $n > 1$, то $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{n-1}$. Кроме того, положим $\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$. Это позволяет определить значение многочлена от линейного оператора подобно тому, как это было сделано в § 25 для квадратных матриц: если $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in F[x]$, то, по определению,

$$f(\mathcal{A}) = a_n \mathcal{A}^n + a_{n-1} \mathcal{A}^{n-1} + \dots + a_0 \mathcal{E}.$$

Из предложения о матрице произведения линейных операторов вытекает следующее утверждение.

Предложение о матрице оператора $f(\mathcal{A})$

Если оператор $\mathcal{A}$ имеет в некотором базисе матрицу A, то оператор $f(\mathcal{A})$ имеет в том же базисе матрицу $f(A)$. □

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V над полем F. Говорят, что многочлен f *аннулирует* оператор $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Предложение о многочленах, аннулирующих линейный оператор

Для многочлена $f(x)$ следующие условия эквивалентны:

а) *$f(x)$ аннулирует линейный оператор $\mathcal{A}$;*

б) *$f(x)$ аннулирует матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе;*

в) *$f(x)$ аннулирует матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе.*

Доказательство. Эквивалентность условий а) и в) вытекает из предложения о матрице оператора $f(\mathcal{A})$, а импликация в) $\Longrightarrow$ б) очевидна. Осталось доказать импликацию б) $\Longrightarrow$ в). Матрицы оператора в двух разных базисах подобны. Поэтому достаточно убедиться в том, что если матрицы A и B подобны и $f(A) = O$, то $f(B) = O$. В самом деле, пусть матрицы A и B подобны, т. е. $B = T^{-1}AT$ для некоторой невырожденной квадратной матрицы T, и $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

Тогда

$$B^k = \underbrace{(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)}_{k\text{ скобок}} =$$

$$= T^{-1}A(TT^{-1})A\cdots(TT^{-1})AT = T^{-1}A^kT,$$

для всякого натурального k, и потому

$$\begin{aligned} f(B) &= a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} + \cdots + a_0E = \\ &= a_nT^{-1}A^nT + a_{n-1}T^{-1}A^{n-1}T + \cdots + a_0T^{-1}ET = \\ &= T^{-1}(a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0E)T = T^{-1}f(A)T. \end{aligned}$$

В частности, если $f(A) = O$, то $f(B) = O$. $\square$

В процессе доказательства последнего предложения проверен следующий факт, который пригодится нам в дальнейшем.

Замечание о степенях подобных матриц

Если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка и $B = T^{-1}AT$ для некоторой невырожденной квадратной матрицы T, а k — натуральное число, то $B^k = T^{-1}A^kT$. $\square$

Предложение о характеристических многочленах подобных матриц

Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Доказательство. В самом деле, пусть $B = T^{-1}AT$. Используя свойства произведения матриц и свойства определителей, имеем

$$\chi_B(x) = |B - xE| = |T^{-1}AT - xT^{-1}ET| = |T^{-1}AT - T^{-1}(xE)T| =$$
$$= |T^{-1}(A - xE)T| = |T^{-1}| \cdot |A - xE| \cdot |T| =$$
$$= \frac{1}{|T|} \cdot |A - xE| \cdot |T| = |A - xE| = \chi_A(x).$$

Предложение доказано. □

Это предложение показывает, что если A и B — матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах, то $\chi_A(x) = \chi_B(x)$. Это делает корректным следующее

Определение

Характеристическим многочленом линейного оператора называется характеристический многочлен его матрицы в любом базисе. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\chi_{\mathcal{A}}(x)$.

Из теоремы Гамильтона–Кэли (см. § 25) непосредственно вытекает ее «операторная версия».

Теорема Гамильтона–Кэли для линейных операторов

Характеристический многочлен произвольного линейного оператора аннулирует этот оператор. $\square$