§ 33. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V. Вектор $\mathbf{x} \in V$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и существует скаляр $t \in F$ такой, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}. \tag{1}$$

Скаляр $t \in F$ называется *собственным значением* или *собственным числом* оператора $\mathcal{A}$, если существует вектор $\mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и выполнено равенство (1). При наличии равенства (1) мы будем называть $\mathbf{x}$ собственным вектором, *относящимся к собственному значению* t, а t — собственным значением, *относящимся к собственному вектору* $\mathbf{x}$.

Свойство собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению

Теорема о собственных векторах, относящихся к одному и тому же собственному значению

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образует подпространство.

Доказательство. Обозначим через M_0 множество всех собственных векторов, относящихся к собственному значению t_0 и положим $M = M_0 \cup \{\mathbf{0}\}$. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$. Если $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M$. Пусть теперь $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Поскольку

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = t_0\mathbf{x}_1 + t_0\mathbf{x}_2 = t_0(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

получаем, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M_0 \subseteq M$. Аналогично, для любого скаляра t имеем: если $t\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то $t\mathbf{x}_1 \in M$, а если $t\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, то

$$\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t(t_0\mathbf{x}_1) = t_0(t\mathbf{x}_1),$$

откуда $t\mathbf{x}_1 \in M_0 \subseteq M$. $\square$

Теорема о собственных векторах, относящихся к различным собственным значениям

Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ являются собственными и относятся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответственно, то векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы.

Доказательство будем вести индукцией по числу векторов.

База индукции. Пусть $k = 1$ и $\mathbf{x}_1$ — собственный вектор. По определению собственного вектора, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Поэтому если $t_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то $t_1 = 0$. Следовательно, система, состоящая из вектора $\mathbf{x}_1$, линейно независима.

Шаг индукции. Пусть теперь $k > 1$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Предположим, что

$$s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \qquad (2)$$

для некоторых скаляров $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k \in F$.

Свойство собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям (2)

Используя замечание о свойствах линейного оператора (см. § 29), имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{0}) &= \mathcal{A}(s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + s_2\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) + \dots + s_{k-1}\mathcal{A}(\mathbf{x}_{k-1}) + s_k\mathcal{A}(\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1 t_1\mathbf{x}_1 + s_2 t_2\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1} t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

Итак,

$$s_1 t_1\mathbf{x}_1 + s_2 t_2\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1} t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (2) на t_k, получаем, что

$$s_1 t_k\mathbf{x}_1 + s_2 t_k\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1} t_k\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \qquad (4)$$

Вычитая равенство (4) из (3), получаем, что

$$s_1(t_1 - t_k)\mathbf{x}_1 + s_2(t_2 - t_k)\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1}(t_{k-1} - t_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ линейно независимы. Следовательно, $s_1(t_1 - t_k) = s_2(t_2 - t_k) = \dots = s_{k-1}(t_{k-1} - t_k) = 0$. Поскольку скаляры $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k$ попарно различны, получаем, что $s_1 = s_2 = \dots = s_{k-1} = 0$. Из (2) вытекает теперь, что $s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Учитывая, что $\mathbf{x}_k \ne \mathbf{0}$ (поскольку вектор $\mathbf{x}_k$ — собственный), получаем, что $s_k = 0$. Итак, если выполнено равенство (2), то $s_1 = s_2 = \dots = s_{k-1} = s_k = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ линейно независимы. $\square$

Свойство собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям (3)

В дальнейшем нам понадобится следующее обобщение теоремы о собственных векторах, относящихся к различным собственным значениям.

Следствие о собственных векторах, относящихся к различным собственным значениям

Если $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — линейно независимые наборы собственных векторов, относящихся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответственно, то набор векторов $\bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$ линейно независим.

Доказательство. Пусть $M_i = \{\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i}\}$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$. Предположим, что набор векторов M линейно зависим, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{s_i} t_{ij}\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{0}$, причем хотя бы один из коэффициентов вида t_{ij} отличен от нуля. Положим $\mathbf{q}_i = \sum\limits_{j=1}^{s_i} t_{ij}\mathbf{p}_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \cdots + \mathbf{q}_k = \mathbf{0}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_\ell \ne \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}_{\ell+1} = \cdots = \mathbf{q}_k = \mathbf{0}$ для некоторого $0 \leqslant \ell \leqslant k$. Предположим, что $\ell > 0$. Тогда $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \cdots + \mathbf{q}_\ell = \mathbf{0}$. Это означает, что векторы $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_\ell$ линейно зависимы.

В то же время, из теоремы о собственных векторах, относящихся к одному и тому же собственному значению и того факта, что $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_\ell \neq \mathbf{0}$, вытекает, что, для всякого $i = 1, \dots, \ell$, вектор $\mathbf{q}_i$ является собственным вектором, относящимся к собственному значению t_i. Мы получили противоречие с теоремой о собственных векторах, относящихся к различным собственным значениям.

Таким образом, $\ell = 0$, т. е. $\mathbf{q}_1 = \dots = \mathbf{q}_k = \mathbf{0}$. Пусть $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. В силу сказанного, $t_{i1}\mathbf{p}_{i1} + \dots + t_{is_i}\mathbf{p}_{is_i} = \mathbf{0}$. Но по условию набор векторов $M_i = \{\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{is_i}\}$ линейно независим. Следовательно, $t_{i1} = \dots = t_{is_i} = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$, т. е. $t_{ij} = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $j = 1, \dots, s_i$. Но, как отмечалось выше, хотя бы один из коэффициентов вида t_{ij} отличен от нуля. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в векторном пространстве V над полем F. Зафиксируем некоторый базис пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Для произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ обозначим через X столбец его координат в выбранном базисе. В силу леммы о замене координат вектора (см. § 29) равенство (1) равносильно матричному равенству $AX = tX$. Последнее равенство можно переписать в виде $AX = tEX$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A. Следовательно, $AX - tEX = O$, где O — нулевой столбец. Последнее равенство можно переписать в виде

$$(A - tE)X = O. \tag{5}$$

Мы получили матричную запись системы линейных уравнений, основная матрица которой содержит параметр t. Эта система крамеровская (так как ее основная матрица — квадратная) и однородная. Очевидно, что

- *собственными векторами оператора $\mathcal{A}$ являются ненулевые решения системы* (5) *и только они*;
- *собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ являются те значения параметра t, при которых система* (5) *имеет ненулевые решения, и только они.*

Используя признак существования ненулевого решения крамеровской системы (см. § 9), получаем, что справедливо следующее

Предложение о характеристическом уравнении

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V.

а) *Скаляр t является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $t \in F$ и*

$$|A - tE| = 0. \tag{6}$$

б) *Собственными векторами линейного оператора $\mathcal{A}$, относящимися к его собственному значению t_0, являются ненулевые решения системы линейных уравнений $(A - t_0E)X = 0$ и только они.* □

В левой части равенства (6) стоит характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ (или матрицы A).

Определение

Уравнение (6) называется *характеристическим уравнением* оператора $\mathcal{A}$ и матрицы A.

В оставшейся части параграфа изучаются операторы, матрица которых в некотором базисе устроена очень просто.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве V, называется *приводимым к диагональному виду* или *оператором простой структуры*, если существует базис пространства V, в котором матрица этого оператора диагональна.

Критерий приводимости оператора к диагональному виду

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V над полем F приводим к диагональному виду тогда и только тогда, когда в V существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ является диагональной, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, по определению матрицы оператора в базисе, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = t_1\mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = t_2\mathbf{y}_2$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = t_n\mathbf{y}_n$. В силу замечания о нулевом векторе и базисе векторного пространства (см. § 22) векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ — ненулевые. Следовательно, базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Достаточность. Предположим теперь, что базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ пространства V состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = s_1\mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = s_2\mathbf{y}_2$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = s_n\mathbf{y}_n$ для некоторых скаляров $s_1, s_2, \dots, s_n \in F$. Тогда по определению матрицы оператора в базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду. □

Из доказательства критерия приводимости оператора к диагональному виду непосредственно извлекается следующая информация, полезная при решении задач.

- *Если пространство имеет базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ именно в этом базисе диагональна и на ее диагонали стоят собственные значения, причем каждое собственное значение стоит столько раз, сколько имеется относящихся к нему линейно независимых собственных векторов. Если матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе диагональна, то именно этот базис состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.*

Достаточное условие приводимости оператора к диагональному виду

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем F, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в этом пространстве, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Если уравнение $|A - tE| = 0$ имеет n различных корней, лежащих в поле F, то оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n \in F$ — различные корни уравнения $|A - tE| = 0$. Они являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}$. Для каждого собственного значения t_i зафиксируем собственный вектор $\mathbf{y}_i$ относящийся к $\mathbf{t}_i$. По теореме о собственных векторах, относящихся к различным собственным значениям, векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ линейно независимы. В силу замечания о базисах n-мерного пространства (см. § 22) они образуют базис пространства V. Для завершения доказательства остается сослаться на критерий приводимости оператора к диагональному виду. $\square$