§ 34. Нильпотентные операторы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Во многих приложениях линейной алгебры важно найти базис, в котором матрица данного оператора выглядит как можно более просто. Естественно считать, что диагональные матрицы устроены очень просто. Но, как мы видели в конце предыдущего параграфа, далеко не для всякого оператора можно подобрать базис, в котором его матрица диагональна. В данном параграфе будут введены в рассмотрение достаточно просто устроенные матрицы, называемые матрицами, имеющими *жорданову нормальную форму*. В их число входят, в частности, все диагональные матрицы. Как мы увидим в следующем параграфе, для всякого линейного оператора, удовлетворяющего некоторому не слишком обременительному дополнительному ограничению, существует базис (называемый *жордановым базисом* для данного оператора), в котором матрица этого оператора имеет жорданову нормальную форму. А в некоторых важных частных случаях (например, для операторов в векторных пространствах над полем $\mathbb{C}$) такой базис существует для произвольного линейного оператора.

Данный параграф является подготовительным. В нем будет доказано существование жорданова базиса для некоторого весьма частного, но важного класса линейных операторов — так называемых *нильпотентных* операторов. И сам этот факт, и информация, полученная в ходе его доказательства, будут весьма полезны в следующем параграфе.

Определение

Квадратная матрица A называется *клеточно-диагональной*, если существуют квадратные матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ такие, что

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & A_m \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ называются *диагональными клетками* или просто *клетками* матрицы A.

- Порядки клеток $A_1, A_2, \ldots, A_m$ могут быть любыми.
- Всякая диагональная матрица является клеточно-диагональной матрицей, в которой все клетки имеют порядок 1.
- Всякая квадратная матрица A является клеточно-диагональной матрицей с одной клеткой $A_1 = A$. Поэтому интерес представляют те клеточно-диагональные матрицы, у которых число клеток как можно больше и/или сами клетки устроены как можно проще.
- Всякая клеточно-диагональная матрица с более чем одной диагональной клеткой является полураспавшейся.

Определение

Квадратная матрица над полем F называется *клеткой Жордана*, если она имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in F$. Говорят, что квадратная матрица A имеет *жорданову нормальную форму*, если A — клеточно-диагональная матрица, в которой все диагональные клетки являются клетками Жордана.

- Всякая клетка Жордана и всякая матрица, имеющая жорданову нормальную форму, являются нижнетреугольными матрицами.
- Числа, стоящие на главных диагоналях различных клеток Жордана матрицы, имеющей жорданову нормальную форму, могут быть любыми (в том числе совпадающими у разных клеток).

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V называется *нильпотентным*, если существует натуральное число m такое, что $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называется *ступенью нильпотентности* оператора $\mathcal{A}$.

Например, оператор дифференцирования в пространстве $F_n[x]$ нильпотентен ступени $n+1$, так как, очевидно, $(n+1)$-я производная любого многочлена степени $\leqslant n$ равна 0, причем $n+1$ — наименьшее число с таким свойством.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Основная теорема о нильпотентных операторах

Пусть $\mathcal{A}$ — нильпотентный линейный оператор в векторном пространстве V. Тогда:

1) *существует базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет жорданову нормальную форму;*
2) *во всех диагональных клетках этой матрицы на главной диагонали стоит* 0*;*
3) *жорданова нормальная форма матрицы оператора $\mathcal{A}$ определена однозначно с точностью до порядка следования клеток Жордана на главной диагонали.*

Доказательству этой теоремы посвящены следующие 19 слайдов.

Зафиксируем векторное пространство V над полем F и нильпотентный ступени m линейный оператор $\mathcal{A}$ в V. Ключевую роль в доказательстве основной теоремы о нильпотентных операторах играет следующее понятие.

Определение

Упорядоченный набор векторов $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ называется *нильслоем*, если $\mathcal{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{i+1}$ для всякого $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ и $\mathcal{A}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$. *Длиной нильслоя* называется число векторов в нем.

Начиная с произвольного ненулевого вектора $\mathbf{v}$, можно построить нильслой, полагая $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1 = \mathcal{A}(\mathbf{v}_0)$, ..., $\mathbf{v}_i = \mathcal{A}(\mathbf{v}_{i-1}) = \mathcal{A}^i(\mathbf{v})$, ... — до первого появления нулевого вектора. Поскольку $\mathcal{A}^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{v} \in V$, нулевой вектор при этом обязательно появится. Этот процесс построения нильслоя мы будем иногда называть *вытягиванием нильслоя* из данного вектора.

Из равенства $\mathcal{A}^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ вытекает, что

- *длина любого нильслоя не превосходит m.*

Схема доказательства пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах (1)

Доказательство пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах основывается на следующих трех утверждениях.

Лемма о нильпотентном операторе и инвариантности

Подпространство пространства V, порожденное некоторым нильслоем, инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Лемма о нильпотентном операторе и жордановой клетке

Если U — подпространство пространства V, порожденное некоторым нильслоем, то существует базис пространства U, в котором матрица ограничения оператора $\mathcal{A}$ на U является жордановой клеткой с 0 на главной диагонали.

Лемма о нильпотентном операторе и прямой сумме

Пространство V является прямой суммой конечного числа своих подпространств, каждое из которых порождено некоторым нильслоем.

Схема доказательства пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах (2)

Покажем, как из этих трех лемм вытекают пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах. В силу леммы о нильпотентном операторе и прямой сумме, пространство V является прямой суммой подпространств, каждое из которых порождено некоторым нильслоем. Согласно лемме о нильпотентном операторе и жордановой клетке, каждое из этих подпространств имеет базис, в котором матрица ограничения оператора $\mathcal{A}$ на это подпространство является жордановой клеткой с 0 на главной диагонали. Требуемые утверждения вытекают теперь из теоремы о прямой сумме инвариантных подпространств (см. § 32) и леммы о нильпотентном операторе и инвариантности.

Доказательство леммы о нильпотентном операторе и инвариантности. Пусть U — подпространство пространства V, порожденное нильслоем $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, и $\mathbf{x} \in U$. Тогда $\mathbf{x} = t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + t_k\mathbf{v}_k$ для некоторых скаляров $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + t_k\mathbf{v}_k) = \\ &= t_0\mathcal{A}(\mathbf{v}_0) + t_1\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \cdots + t_{k-1}\mathcal{A}(\mathbf{v}_{k-1}) + t_k\mathcal{A}(\mathbf{v}_k) = \\ &= t_0\mathbf{v}_1 + t_1\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{k-1}\mathbf{v}_k + \mathbf{0} \in U.\end{aligned}$$

Следовательно, подпространство U инвариантно относительно $\mathcal{A}$. $\square$

Для доказательства леммы о нильпотентном операторе и жордановой клетке, а также в следующем параграфе, нам пригодится следующая

Лемма о линейной независимости нильслоя

Всякий нильслой линейно независим.

Доказательство. Предположим, что

$$t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

для некоторых $t_0, t_1, \ldots, t_k \in F$, причем $t_i \neq 0$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant k$. Будем считать, что i — наименьший индекс с таким свойством. Подействуем на обе части равенства (1) оператором $\mathcal{A}^{k-i}$. Поскольку $t_j = 0$ при любом $0 \leqslant j < i$ и $\mathcal{A}^{k+m}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}$ при любом натуральном m, мы получим $t_i\mathcal{A}^k(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}$. Но это не так, поскольку $t_i \neq 0$ и $\mathcal{A}^k(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$. Следовательно, векторы $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ линейно независимы. $\square$

Доказательство леммы о нильпотентном операторе и жордановой клетке. Пусть U — подпространство пространства V, порожденное нильслоем $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. В силу леммы о линейной независимости нильслоя, этот нильслой линейно независим. Таким образом, набор векторов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ является линейно независимой системой образующих, т. е. базисом пространства U. Поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, k-1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, мы получаем, что оператор $\mathcal{A}|_U$ имеет в базисе $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма о нильпотентном операторе и жордановой клетке доказана. □

- Как видно из доказательства леммы о нильпотентном операторе и жордановой клетке, базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}|_U$ является жордановой клеткой, есть не что иное, как нильслой, порождающий подпространство U.

Для доказательства леммы о нильпотентном операторе и прямой сумме нам понадобится ряд новых понятий и результатов.

Определение

Система векторов называется *жордановой*, если она состоит из нильслоев, следующих один за другим. *Жордановой таблицей* называется такая запись жордановой системы, в которой нильслои записаны друг под другом и выровнены по правому краю.

В качестве примера рассмотрим оператор в $\mathbb{R}_3$, заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что $A^2 \neq O$ и $A^3 = O$, и потому наш оператор нильпотентен ступени 3. Рассмотрим три вектора из $\mathbb{R}_3$: $\mathbf{v}_{11} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_{21} = (0, 3, 1)$ и $\mathbf{v}_{31} = (0, 0, -1)$. Вытянув из каждого из них нильслой, получим три нильслоя: первый состоит из векторов $\mathbf{v}_{11}$, $\mathbf{v}_{12} = (0, 2, 2)$ и $\mathbf{v}_{13} = (0, 0, 2)$, второй — из векторов $\mathbf{v}_{21}$ и $\mathbf{v}_{22} = (0, 0, 3)$, а третий — из вектора $\mathbf{v}_{31}$. Система $(\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{13}, \mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \mathbf{v}_{31})$ является жордановой системой векторов, а соответствующая ему жорданова таблица имеет вид

$$\begin{bmatrix} (1, 2, 1) & (0, 2, 2) & (0, 0, 2) \\ & (0, 3, 1) & (0, 0, 3) \\ & & (0, 0, -1) \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Определение

Элементарными преобразованиями жордановой таблицы называются следующие действия:

1) прибавление («повекторное») ко всем векторам одной строки соответствующих векторов другой, не менее длинной, строки;
2) умножение всех векторов одной строки на ненулевой элемент из F;
3) перестановка строк.

При этом, если в результате выполнения преобразования 1) в некоторой строке появляются нулевые векторы, то **обязательно** выполняются следующие действия:

- если появляется строка, состоящая из нулевых векторов, то она вычеркивается из таблицы;
- если появляется строка, в которой есть как ненулевые, так и нулевые векторы, то из нее вычеркиваются все нулевые векторы, стоящие после последнего ненулевого вектора, после чего строка выравнивается с другими по правому краю, т. е. сдвигается вправо так, чтобы ее последний вектор оказался в последнем столбце таблицы.

Если в результате наших действий в строке появится нулевой вектор, то и все идущие за ним в этой строке векторы будут нулевыми. В самом деле, в исходной жордановой таблице в каждой строке каждый следующий вектор получается применением оператора $\mathcal{A}$ к предыдущему. Элементарные преобразования таблицы сохраняют это свойство. Остается учесть, что $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Поэтому применение преобразования 1) (с указанными на предыдущем слайде дополнительными действиями) всегда приводит к удалению из таблицы всех нулевых векторов, если они возникают. Следовательно, справедливо

Замечание об элементарных преобразованиях жордановой таблицы

После применения к жордановой таблице элементарных преобразований получается снова жорданова таблица. □

В качестве примера рассмотрим таблицу (2). Из второй строки этой таблицы, умноженной на 2, вычтем первую, умноженную на 3, а к третьей строке, умноженной на 2, прибавим первую. Получим таблицу

$$\begin{bmatrix} (1,2,1) & (0,2,2) & (0,0,2) \\ & (0,0,-4) & (0,0,0) \\ & & (0,0,0) \end{bmatrix},$$

которая содержит нулевые векторы и потому не является жордановой. Вычеркнув третью строку и удалив из второй строки последний вектор, сдвинув ее после этого вправо, получим жорданову таблицу

$$\begin{bmatrix} (1,2,1) & (0,2,2) & (0,0,2) \\ & & (0,0,-4) \end{bmatrix}.$$

Процесс преобразований можно продолжить: прибавив ко второй строке последней таблицы первую, умноженную на 2, и вычеркнув полученную при этом строку, состоящую из нулевого вектора, получим жорданову таблицу

$$\begin{bmatrix} (1,2,1) & (0,2,2) & (0,0,2) \end{bmatrix},$$

дальнейшие преобразования которой уже невозможны.

Критерий линейной независимости жордановой системы векторов

Жорданова система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система, состоящая из векторов последнего столбца соответствующей жордановой таблицы.

Доказательство. Необходимость вытекает из того факта, что подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима (см. § 21). Проверим *достаточность*. Пусть жорданова система состоит из нильслоев $(\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \ldots, \mathbf{v}_{1s_1})$, $(\mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \ldots, \mathbf{v}_{2s_2})$, ..., $(\mathbf{v}_{\ell 1}, \mathbf{v}_{\ell 2}, \ldots, \mathbf{v}_{\ell s_\ell})$ и линейно зависима, а система $\mathbf{v}_{1s_1}, \mathbf{v}_{2s_2}, \ldots, \mathbf{v}_{\ell s_\ell}$ линейно независима. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{s_k} \lambda_{kj} \mathbf{v}_{kj} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

причем хотя бы один из коэффициентов λ_{kj} отличен от 0. Выберем наименьшее j такое, что $\lambda_{kj} \neq 0$ при некотором $1 \leqslant k \leqslant \ell$. Подействуем на обе части равенства (3) оператором $\mathcal{A}^{s_k - j}$. Поскольку $\mathcal{A}^{s_k - j}(\mathbf{v}_{kj}) = \mathbf{v}_{ks_k}$ и $\mathcal{A}^{s_k - j}(\mathbf{v}_{kt}) = \mathbf{0}$ при $j < t \leqslant s_k$, из (3) вытекает, что $\sum\limits_{m} \lambda_{mj} \mathbf{v}_{ms_m} = \mathbf{0}$, где суммирование ведется по всем m таким, что $s_m \geqslant s_k$. Таким образом, в последнем столбце жордановой таблицы нашлась линейно зависимая подсистема. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — нильпотентный линейный оператор в векторном пространстве V. *Жордановым базисом* пространства V *относительно оператора* $\mathcal{A}$ называется базис V, являющийся жордановой системой для $\mathcal{A}$.

Теорема о жордановом базисе для нильпотентного оператора

Если V — ненулевое векторное пространство, а $\mathcal{A}$ — нильпотентный оператор в V, то в V существует жорданов базис относительно $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — произвольный базис пространства V. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ вытянем из вектора $\mathbf{p}_i$ нильслой $\mathbf{p}_{i1} = \mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_{i2} = \mathcal{A}(\mathbf{p}_{i1})$, ..., $\mathbf{p}_{is_i} = \mathcal{A}(\mathbf{p}_{is_{i-1}})$. По определению нильслоя $\mathbf{p}_{is_i} \neq \mathbf{0}$, но $\mathcal{A}(\mathbf{p}_{is_i}) = \mathbf{0}$. Жорданова система, состоящая из всех полученных нильслоев, порождает V, так как содержит в качестве подсистемы базис P. Если эта жорданова система линейно независима, то она является жордановым базисом. В противном случае запишем ее в виде жордановой таблицы. В силу критерия линейной независимости жордановой системы векторов последний столбец этой жордановой таблицы линейно зависим. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{p}_{ks_k} = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in F$, не все из которых равны 0.

Выберем индекс k так, чтобы λ_k было отлично от 0 и s_k было минимальным для всех k с таким свойством (иными словами, k — это номер самого короткого нильслоя из тех, для которых $\lambda_k \neq 0$). Положим $\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq k$. Тогда $\mathbf{p}_{ks_k} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \mu_i \mathbf{p}_{is_i}$. Для всякого $i \neq k$ прибавим к k-й строке жордановой таблицы все соответствующие векторы i-й строки, умноженные на $-\mu_i$ (это соответствует трем элементарным преобразованиям: умножению i-й строки на $-\mu_i$, прибавлению к k-й строке всех соответствующих векторов i-й строки и делению i-й строки на $-\mu_i$). Последний вектор k-й строки обратится в $\mathbf{0}$. Сдвинем эту строку вправо, удалив из нее все нулевые векторы (а если она вся станет нулевой, вычеркнем ее). Получим жорданову таблицу, содержащую меньше векторов, чем исходная.

Исходная жорданова система была системой образующих для пространства V. Получение нулевого вектора в результате описанных выше действий означает, что тот вектор, который ранее стоял на месте полученного нулевого вектора, является линейной комбинацией других векторов жордановой системы, которые располагались в других строках жордановой таблицы, и потому не были из нее вычеркнуты.

Ясно, что если из системы образующих векторного пространства вычеркнуть векторы, являющиеся линейными комбинациями оставшихся в этой системе векторов, то полученная система вновь будет системой образующих нашего пространства. Таким образом, жорданова система, полученная в результате действий, описанных в предыдущем абзаце, по-прежнему будет системой образующих пространства V.

Если полученная нами система векторов линейно независима, то мы получили жорданов базис в V. В противном случае повторим описанные выше действия применительно к новой жордановой таблице. Поскольку число векторов в исходной таблице конечно, рано или поздно этот процесс оборвется и мы найдем жорданов базис в V. □

- Из доказательства теоремы о жордановом базисе для нильпотентного оператора видно, что исходная жорданова таблица, которую мы перестраиваем в жорданов базис, состоит из всевозможных ненулевых векторов вида $\mathcal{A}^s(\mathbf{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — произвольный базис пространства.

Доказательство леммы о нильпотентном операторе и прямой сумме. Пусть $P = \{\mathbf{p}_{11}, \mathbf{p}_{12}, \ldots, \mathbf{p}_{1s_1}, \mathbf{p}_{21}, \mathbf{p}_{22}, \ldots, \mathbf{p}_{2s_2}, \ldots, \mathbf{p}_{k1}, \mathbf{p}_{k2}, \ldots, \mathbf{p}_{ks_k}\}$ — жорданов базис с нильслоями вида $(\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i})$, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ положим $V_i = \langle \mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i} \rangle$. Ясно, что $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} V_i$. $\square$

Мы завершили доказательство пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах.

Для того, чтобы доказать п. 3) основной теоремы о нильпотентных операторах, нам понадобятся некоторые новые обозначения и результаты. Для данного жорданова базиса P пространства V и для всякого натурального i обозначим через q_i число нильслоев длины i в базисе P. Оказывается, что числа вида q_i не зависят от выбора базиса P, а однозначно определяются оператором $\mathcal{A}$. А именно, справедливо следующее

Предложение о числе нильслоев данной длины

Пусть $\mathcal{A}$ — нильпотентный ступени m линейный оператор в векторном пространстве V над полем F, $r_0 = \dim V$ и $r_i = r(\mathcal{A}^i)$ для любого натурального i. Тогда для любого жорданова базиса и любого $i = 1, 2, \ldots, m$ выполнено равенство $q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$.

Доказательство. Зафиксируем жорданов базис в P. Поскольку длина любого нильслоя не превосходит m, имеем $\dim V = q_1 + 2q_2 + \cdots + mq_m$. Если $(\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i})$ — нильслой из P и $s_i > 1$, то под действием оператора $\mathcal{A}$ этот нильслой перейдет в нильслой $(\mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i})$. Следовательно, $\mathcal{A}(\langle \mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i} \rangle) = \langle \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i} \rangle$.

Поскольку подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ порождается множеством векторов вида $\{\mathcal{A}(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in P\}$, получаем, что $r_1 = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = q_2 + 2q_3 + \cdots + (m-1)q_m$. Аналогично проверяется, что $r_i = q_{i+1} + 2q_{i+2} + \cdots + (m-i)q_m$ для всякого натурального i. Следовательно,

$$\begin{aligned} r_i - r_{i+1} &= (q_{i+1} + 2q_{i+2} + \cdots + (m-i)q_m) - \\ &- (q_{i+2} + 2q_{i+3} + \cdots + (m-i-1)q_m) = \\ &= q_{i+1} + q_{i+2} + \cdots + q_m \end{aligned}$$

для $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Итак, $r_i - r_{i+1} = q_{i+1} + q_{i+2} + \cdots + q_m$ и $r_{i-1} - r_i = q_i + q_{i+1} + \cdots + q_m$, откуда

$$q_i = (r_{i-1} - r_i) - (r_i - r_{i+1}) = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}.$$

Предложение доказано. $\square$

Из доказательства пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах видно, что порядки клеток Жордана в жордановой нормальной форме нильпотентного оператора — это длины нильслоев, из которых состоит жорданов базис пространства. Предложение о числе нильслоев данной длины показывает, что эти числа не зависят от выбора жорданова базиса, а определяются самим оператором $\mathcal{A}$. Это доказывает п. 3) основной теоремы о нильпотентных операторах. Тем самым, мы завершили доказательство этой теоремы. $\square$

Из основной теоремы о нильпотентных операторах видно, что матрица A нильпотентного оператора $\mathcal{A}$ в жордановом базисе нижнетреугольна, и все элементы на ее главной диагонали равны 0. Следовательно, $A - xE$ — нижнетреугольная матрица, все элементы главной диагонали которой равны $-x$. Отсюда автоматически вытекает

Предложение о характеристическом многочлене нильпотентного оператора

Если $\mathcal{A}$ — нильпотентный оператор в n-мерном векторном пространстве, то $\chi_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^n x^n$. □

Из этого предложения немедленно вытекает

Следствие о собственном значении нильпотентного оператора

Единственным собственным значением нильпотентного оператора является число 0. □

- Предложение о характеристическом многочлене нильпотентного оператора показывает, что этот многочлен разложим в произведение линейных множителей. Как мы увидим в следующем параграфе, именно при выполнении этого свойства матрица линейного оператора приводима к жордановой нормальной форме.

Алгоритм нахождения жорданова базиса относительно нильпотентного оператора (часть 1)

Пусть A — матрица нильпотентного оператора в некотором базисе. Записываем матрицу $(E \mid A^{\top})$, и с помощью элементарных преобразований приводим ее к виду $(B_{1,1} \mid B_{1,2})$, где $B_{1,2}$ — ступенчатая матрица. Если $B_{1,2}A^{\top} \neq O$, записываем матрицу $(B_{1,1} \mid B_{1,2} \mid B_{1,2}A^{\top})$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее к виду $(B_{2,1} \mid B_{2,2} \mid B_{2,3})$, где $B_{2,3}$ — ступенчатая матрица. Продолжаем описанный процесс до тех пор, пока при каком-то k не станет верным равенство $B_{k-1,k}A^{\top} = O$. Строки полученной матрицы вида $(B_{k-1,1} \mid B_{k-1,2} \mid \cdots \mid B_{k-1,k})$ состоят из k блоков, находящихся внутри матриц $B_{k-1,1}, B_{k-1,2}, \ldots, B_{k-1,k}$. В каждой строке вычеркиваем блоки, состоящие из нулей, и выравниваем полученные строки по правому краю. Получилась жорданова таблица.

Алгоритм нахождения жорданова базиса относительно нильпотентного оператора (часть 2)

Перестраиваем полученную жорданову таблицу в жорданов базис так, как это описано в доказательстве теоремы о жордановом базисе для нильпотентного оператора. А именно, берем в этой жордановой таблице самую короткую строку. Представляем ее последний элемент как линейную комбинацию остальных элементов последнего столбца таблицы и обнуляем его, прибавляя к этой строке фрагменты других строк, умноженные на подходящие скаляры. Сдвигаем строку вправо, убирая из нее нулевые векторы (или вычеркиваем строку, если в ней все векторы — нулевые). Повторяем эти действия до тех пор, пока в жордановой таблице не останется n векторов. Полученная жорданова система и есть жорданов базис оператора $\mathcal{A}$.

Алгоритм нахождения жорданова базиса относительно нильпотентного оператора, как и алгоритм нахождения базисов образа и ядра, указанный в § 30, найден В. А. Чуркиным в 1991 г. Приведем обоснование этого алгоритма. Строки единичной матрицы, стоящей в левой части исходной матрицы, — это координаты векторов исходного базиса (в нем самом). К ним на первом шаге приписываются (по строкам) координаты их образов при данном операторе (матрица $A^\top$). Далее находится базис подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ (ненулевые строки в $B_{1,2}$) — см. алгоритм Чуркина. После этого приписываются (опять по строкам) координаты образов векторов этого найденного базиса при действии оператора $\mathcal{A}$ (матрица $B_{1,2}A^\top$) — см. формулу (3) в § 29. Затем находится базис подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}^2$ (ненулевые строки в $B_{2,3}$). Продолжая этот процесс, мы вытягиваем нильслои из векторов исходного базиса. Этот процесс оборвется, так как в силу нильпотентности оператора на некотором шаге (номер которого не превосходит степени нильпотентности оператора) очередное произведение вида $B_{k-1,k}A^\top$ окажется нулевой матрицей. Итак, в результате выполнения первой части алгоритма, получается жорданова таблица, которая состоит из всевозможных ненулевых векторов вида $\mathcal{A}^s(\mathbf{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — исходный базис пространства. Во второй части алгоритма эта жорданова таблица перестраивается в жорданов базис так, как это описано в доказательстве основной теоремы о нильпотентных операторах.

Время и место, необходимые для записи изложенного выше алгоритма нахождения жорданова базиса, можно сэкономить, если использовать следующие соображения.

- Предположим, что на каком-то шаге выполнения первой части алгоритма получена матрица вида $(B_{k-1,1} \mid B_{k-1,2} \mid \cdots \mid B_{k-1,k})$, где $B_{k-1,k}$ — ступенчатая матрица. Если эта матрица содержит нулевые строки (и ими являются, скажем, последние s из n строк этой матрицы), то на следующем шаге выполнения алгоритма эти нулевые строки приведут к нулевым строкам в матрице $B_{k-1,k}A^\top$, которые никакого реального участия в приведении этой матрицы к ступенчатому виду принимать не будут. Поэтому на матрицу $A^\top$ можно умножать не всю матрицу $B_{k-1,k}$, а только матрицу, состоящую из ее первых $n-s$ строк. После этого элементарные преобразования можно производить, опять-таки, не со всей матрицей вида $(B_{k-1,1} \mid B_{k-1,2} \mid \cdots \mid B_{k-1,k} \mid B_{k-1,k}A^\top)$, а только с матрицей, состоящей из ее первых $n-s$ строк. При этом те последние s (ненулевых) строк матрицы $(B_{k-1,1} \mid B_{k-1,2} \mid \cdots \mid B_{k-1,k-1})$, которые имеют нулевые продолжения в матрице $B_{k-1,k}$, следует запомнить и включить в ту жорданову таблицу, которая при выполнении второй части алгоритма будет перестраиваться в жорданов базис.