§ 37. Ортогональность

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Из определения угла между векторами вытекает, в частности, что $(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{xy} = 0$ (точный аналог критерия ортогональности векторов в обычном пространстве из § 11). Это делает естественным следующее

Определение

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $\mathbf{xy} = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1. Тот факт, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, будем записывать в виде $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Отметим, что в силу равенства (2) из § 36 справедливо следующее

Замечание о нулевом векторе и ортогональности

Нулевой вектор ортогонален любому вектору. □

Укажем одно важное свойство ортогональных наборов векторов.

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Ясно, что матрица Грама G_A этого набора диагональна, причем на ее диагонали стоят ненулевые скаляры. Следовательно, эта матрица невырожденна. Остается учесть критерий линейной независимости на языке матрицы Грама (см. § 36). $\square$

Из этой теоремы немедленно вытекает

Следствие об ортонормированности и линейной независимости

Любой ортонормированный набор векторов линейно независим. $\square$

Определение

Ортогональный [ортонормированный] набор векторов, который является базисом, называется *ортогональным* [соответственно *ортонормированным*] *базисом*.

Примером ортонормированного базиса является стандартный базис пространства $\mathbb{R}_n$ (если скалярное произведение в $\mathbb{R}_n$ определить как сумму произведений одноименных компонент).

Очевидно, что матрицей Грама ортонормированного базиса является единичная матрица. Из предложения о матрице Грама и скалярном произведении (см. § 36) немедленно вытекает

Теорема о скалярном произведении в ортонормированном базисе

Пусть V — пространство со скалярным произведением, а P — ортонормированный базис в V. Тогда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} \qquad (1)$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. $\square$

Перепишем равенство (1) на языке координат векторов. Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют в ортонормированном базисе координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответственно, то, в силу, (1), имеем

$$\mathbf{xy} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$

В евклидовом пространстве эта формула принимает совсем простой вид:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Из определений длины вектора, угла между векторами и расстояния между векторами немедленно вытекает, что в евклидовом пространстве справедливы также формулы

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}};$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Отметим, что четыре последние формулы являются точными аналогами соответствующих формул из векторной алгебры (см. § 11 и 14).

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Ответ на него содержится в следующем утверждении. В доказательстве этого утверждения указан способ нахождения ортонормированного базиса, который называется *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Теорема о существовании ортонормированного базиса

Любое ненулевое пространство со скалярным произведением V имеет ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V. Построим ортогональный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ пространства V. Векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ будем находить последовательно — сначала $\mathbf{b}_1$, затем $\mathbf{b}_2$ и т. д.

Положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Пусть $2 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что мы уже построили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_{i-1}$. Положим

$$\mathbf{b}_i = -\frac{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1}\cdot\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2}\cdot\mathbf{b}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{b}_{i-1}\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_{i-1}\mathbf{b}_{i-1}}\cdot\mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{a}_i. \qquad (2)$$

Умножая скалярно обе части равенства (2) на $\mathbf{b}_1$ слева и учитывая, что вектор $\mathbf{b}_1$ ортогонален к векторам $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$, получаем, что

$$\mathbf{b}_1\mathbf{b}_i = -\frac{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_i}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} \cdot \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_i = -\mathbf{b}_1\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_1\mathbf{a}_i = 0.$$

Аналогично проверяется, что $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_i = \cdots = \mathbf{b}_{i-1}\mathbf{b}_i = 0$. Следовательно, набор векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_i$ ортогонален. Напомним, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_{i-1}$. Отсюда и из равенства (2) непосредственно вытекает, что вектор $\mathbf{b}_i$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$. Далее, из указанного свойства векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_{i-1}$ вытекает, что правую часть равенства (2) можно записать в виде $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i$, где $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}$ — некоторые числа. Иными словами, вектор $\mathbf{b}_i$ равен некоторой нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$. Поскольку эти векторы входят в базис пространства V, они линейно независимы. Следовательно, $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$. Итак, мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_i$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_i$.

Повторив указанные выше построения нужное число раз, мы в конце концов получим ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, принадлежащих V. По теореме об ортогональности и линейной независимости этот набор векторов линейно независим. Поскольку число векторов в нем совпадает с размерностью V, он является базисом этого подпространства. В силу замечания об орте вектора из § 36 для того, чтобы получить ортонормированный базис подпространства V, достаточно разделить каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ на его длину. $\square$

Теорема о дополнении до ортогонального базиса

Любую ортогональную систему ненулевых векторов пространства со скалярным произведением V можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — ортогональный набор ненулевых векторов пространства V. Обозначим размерность пространства V через n. Нам достаточно найти ортогональный набор из n ненулевых векторов пространства V, содержащий векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. В самом деле, в силу теоремы об ортогональности и линейной независимости такой набор векторов будет линейно независимым, А поскольку число векторов в нем равно размерности пространства V, он будет базисом этого пространства.

Если $k = n$, то, в силу сказанного выше, уже сам набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ является ортогональным базисом пространства V. Поэтому далее можно считать, что $k < n$. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — ортонормированный базис пространства V, существующий в силу теоремы о существовании ортонормированного базиса. Пусть вектор $\mathbf{a}_i$ имеет в этом базисе координаты $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$).

Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Поскольку $k < n$, эта система имеет по крайней мере одно ненулевое решение (см. замечание о существовании ненулевого решения однородной системы в § 7). Обозначим его через $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и положим $\mathbf{a}_{k+1} = \overline{c_1}\,\mathbf{b}_1 + \overline{c_2}\,\mathbf{b}_2 + \dots + \overline{c_n}\,\mathbf{b}_n$. Учитывая теорему о скалярном произведении в ортонормированном базисе, имеем:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{k+1} = a_{i1}\,\overline{\overline{c_1}} + a_{i2}\,\overline{\overline{c_2}} + \dots + a_{in}\,\overline{\overline{c_n}} = a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n = 0$$

для всякого $i = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Если $k + 1 = n$, то он является ортогональным базисом пространства V. В противном случае, рассуждая так же, как выше, при построении вектора $\mathbf{a}_{k+1}$, мы дополним набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+1}$ еще одним вектором $\mathbf{a}_{k+2}$ так, что набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+2}$ будет ортогональным набором ненулевых векторов. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов построим ортогональный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ пространства V, являющийся расширением исходного набора векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. $\square$

Из теоремы о дополнении до ортогонального базиса вытекает

Следствие о дополнении до ортонормированного базиса

Любую ортонормированную систему векторов пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.

Доказательство. Все векторы ортонормированной системы — ненулевые (поскольку их длины равны 1). В силу теоремы о дополнении до ортогонального базиса нашу ортонормированную систему можно дополнить до ортогонального базиса. Разделим каждый из найденных при этом новых векторов на его длину. В силу замечания об орте вектора из § 36 мы получим ортонормированный базис. $\square$

Определение

Пусть S — подпространство в V. Множество всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S, называется *ортогональным дополнением* подпространства S. Ортогональное дополнение подпространства S обозначается через $S^{\perp}$.

Предложение об ортогональном дополнении

Пусть S — подпространство пространства со скалярным произведением V, а $S^{\perp}$ — ортогональное дополнение S. Тогда:

1) *$S^{\perp}$ — подпространство пространства V;*
2) *если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис V, то $\mathbf{x} \in S^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}_2\mathbf{x} = \cdots = \mathbf{a}_k\mathbf{x} = 0$.*

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{\perp}$, $\mathbf{a} \in S$, а $t \in F$ — произвольное число, то $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{a} = \mathbf{x}\mathbf{a} + \mathbf{y}\mathbf{a} = 0 + 0 = 0$ и $(t\mathbf{x})\mathbf{a} = t(\mathbf{x}\mathbf{a}) = t \cdot 0 = 0$.

2) Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис S, а $\mathbf{x} \in S^{\perp}$, то вектор $\mathbf{x}$ ортогонален к векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, поскольку он ортогонален ко всем векторам из S. Предположим теперь, что $\mathbf{x}$ ортогонален к векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{a} \in S$. Тогда $\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Используя формулу (2) из § 36, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\mathbf{a} &= \mathbf{x}(t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k) = \overline{t_1}(\mathbf{x}\mathbf{a}_1) + \overline{t_2}(\mathbf{x}\mathbf{a}_2) + \dots + \overline{t_k}(\mathbf{x}\mathbf{a}_k) = \\ &= \overline{t_1} \cdot 0 + \overline{t_2} \cdot 0 + \dots + \overline{t_k} \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

и потому $\mathbf{x} \in S^{\perp}$. $\square$

Теорема об ортогональном разложении

Если V — пространство со скалярным произведением, а S — подпространство в V, то $V = S \oplus S^{\perp}$.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \in S \cap S^{\perp}$, то $\mathbf{xx} = 0$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. В силу теоремы о прямой сумме подпространств (см. § 24) осталось проверить, что $\dim S + \dim S^{\perp} = \dim V$.

Положим $\dim V = n$ и $\dim S = k$. Зафиксируем ортонормированный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ пространства V и произвольный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства S. Пусть вектор $\mathbf{a}_1$ имеет в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ координаты $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, вектор $\mathbf{a}_2$ — координаты $(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, вектор $\mathbf{a}_k$ — координаты $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$. По предложению об ортогональном дополнении $\mathbf{x} \in S^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}_2\mathbf{x} = \cdots = \mathbf{a}_k\mathbf{x} = 0$. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, то, в силу теоремы о скалярном произведении в ортонормированном базисе, имеем:

$$\begin{cases} a_{11}\overline{x_1} + a_{12}\overline{x_2} + \cdots + a_{1n}\overline{x_n} = 0, \\ a_{21}\overline{x_1} + a_{22}\overline{x_2} + \cdots + a_{2n}\overline{x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\overline{x_1} + a_{k2}\overline{x_2} + \cdots + a_{kn}\overline{x_n} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Этот набор равенств можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений с неизвестными $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$. Пространство $S^\perp$ совпадает с пространством решений системы (4). Размерность этого пространства равна $n - r$, где r — ранг матрицы системы (4) (см. теорему о размерности пространства решений однородной системы в § 28). Строки этой матрицы — координаты базисных векторов пространства S. Следовательно, $r = k$. Итак, $\dim S^\perp = n - k$, и потому

$$\dim S + \dim S^\perp = k + (n - k) = n = \dim V.$$

Теорема доказана. $\square$

Алгоритм нахождения базиса ортогонального дополнения

Пусть V — пространство со скалярным произведением, а $\mathbf{x}$ — вектор из V, имеющий в некотором базисе P пространства V координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $\overline{\mathbf{x}}$ вектор, имеющий в базисе P координаты $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$. Очевидно, что если пространство V евклидово, то $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

Из доказательства теоремы об ортогональном разложении вытекает следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения базиса ортогонального дополнения к подпространству

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис подпространства S пространства V. Составим однородную систему линейных уравнений, матрица которой — это матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ в некотором ортонормированном базисе пространства V. Пользуясь алгоритмом, указанным в § 28, найдем фундаментальную систему решений этой однородной системы. Предположим, что она состоит из векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r$. Тогда векторы $\overline{\mathbf{f}_1}, \overline{\mathbf{f}_2}, \ldots, \overline{\mathbf{f}_r}$ образуют базис пространства $S^\perp$; если пространство V евклидово, то базис $S^\perp$ состоит из векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r$ (поскольку в этом случае $\overline{\mathbf{f}_i} = \mathbf{f}_i$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, r$).

Определения

Пусть V — пространство со скалярным произведением, S — его подпространство и $\mathbf{x} \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ такие, что $\mathbf{y} \in S$, $\mathbf{z} \in S^{\perp}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Вектор $\mathbf{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на подпространство S и обозначается через $\mathbf{x}_{\perp}$, а вектор $\mathbf{z}$ называется *ортогональной составляющей* $\mathbf{x}$ относительно S и обозначается через $\mathbf{x}^{\perp}$. Длина ортогональной составляющей вектора $\mathbf{x}$ относительно S называется *расстоянием от* $\mathbf{x}$ *до* S. Предположим теперь, что V — евклидово пространство. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то *углом между* $\mathbf{x}$ *и* S называется угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S по определению считается равным $\frac{\pi}{2}$ (это естественно, так как в данном случае $\mathbf{x} = \mathbf{z} \in S^{\perp}$). Наконец, если $S = \{\mathbf{0}\}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S не определен. Расстояние от $\mathbf{x}$ до S обозначается через $\rho(\mathbf{x}, S)$, а угол между $\mathbf{x}$ и S — через $(\widehat{\mathbf{x}, S})$.

- В унитарном пространстве угол между вектором и подпространством не определен, поскольку в нем не определен угол между векторами.

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая. Расстояние и угол между вектором и подпространством (иллюстрация)

Все введенные только что понятия полностью аналогичны одноименным понятиям в обычном пространстве с обычным скалярным произведением. В самом деле, возьмем в этом пространстве в качестве подпространства S плоскость Oxy. Ясно, что ортогональным дополнением $S^{\perp}$ будет ось Oz. Отложим вектор $\vec{x}$ от начала координат. Тогда ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на S — это его проекция на плоскость Oxy в обычном смысле, расстояние от $\vec{x}$ до S — обычное расстояние от конца вектора $\vec{x}$ до плоскости Oxy, угол между $\vec{x}$ и S — обычный угол между этим вектором и Oxy (см. рис. 1).

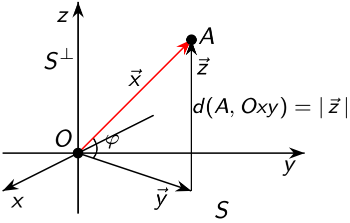

Рис. 1. Расстояние от вектора до подпространства
и угол между вектором и подпространством

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V — пространство со скалярным произведением, а S, S_1 и S_2 — его подпространства. Тогда:

1) $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, *а* $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$;
2) $(S^{\perp})^{\perp} = S$;
3) *если* $S_1 \subseteq S_2$, *то* $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$;
4) $(S_1 + S_2)^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$, *а* $(S_1 \cap S_2)^{\perp} = S_1^{\perp} + S_2^{\perp}$;
5) *если* $V = S_1 \oplus S_2$, *то* $V = S_1^{\perp} \oplus S_2^{\perp}$.

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x} \in V^{\perp}$, то $\mathbf{xy} = 0$ для любого вектора $\mathbf{y} \in V$. В частности, $\mathbf{xx} = 0$. В силу аксиомы 4) имеем $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно, $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. А равенство $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$ вытекает из замечания о нулевом векторе и ортогональности.

2) Из определения ортогонального дополнения вытекает, что если $\mathbf{x} \in S$, то $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из $S^{\perp}$. Следовательно, $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$. Пусть $\dim S = k$ и $\dim V = n$. В силу теоремы об ортогональном разложении $\dim(S^{\perp})^{\perp} = n - \dim S^{\perp} = n - (n - k) = k = \dim S$. Итак, S — подпространство в $(S^{\perp})^{\perp}$ и $\dim S = \dim(S^{\perp})^{\perp}$. Следовательно, $S = (S^{\perp})^{\perp}$.

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $\mathbf{x} \in S_2^\perp$. Тогда $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из S_2, а значит, в частности, и к любому вектору из S_1. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^\perp$, и потому $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

4) Пусть $\mathbf{x} \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$ и $\mathbf{y} \in S_1 + S_2$. Тогда $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ для некоторых векторов $\mathbf{y}_1 \in S_1$ и $\mathbf{y}_2 \in S_2$. В силу выбора $\mathbf{x}$ имеем $\mathbf{x}\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}\mathbf{y}_2 = 0$, откуда

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}\mathbf{y}_2 = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^\perp$, и потому $S_1^\perp \cap S_2^\perp \subseteq (S_1 + S_2)^\perp$. Докажем обратное включение. Пусть $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^\perp$. Поскольку $S_1 \subseteq S_1 + S_2$ и $S_2 \subseteq S_1 + S_2$, из свойства 3) вытекает, что $\mathbf{x} \in S_1^\perp$ и $\mathbf{x} \in S_2^\perp$. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$, и потому $(S_1 + S_2)^\perp \subseteq S_1^\perp \cap S_2^\perp$. Следовательно, $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$. Используя свойство 2), имеем

$$S_1^\perp + S_2^\perp = \left((S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp\right)^\perp = \left((S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp\right)^\perp = (S_1 \cap S_2)^\perp.$$

5) По условию $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. Используя свойства 1) и 4), имеем $S_1^\perp + S_2^\perp = (S_1 \cap S_2)^\perp = \{\mathbf{0}\}^\perp = V$. Далее, положим $\dim V = n$, $\dim S_1 = k_1$ и $\dim S_2 = k_2$. В силу теоремы о прямой сумме подпространств (см. § 24) $n = k_1 + k_2$. В силу той же теоремы достаточно показать, что $\dim S_1^\perp + \dim S_2^\perp = n$. Используя теорему об ортогональном разложении, имеем

$$\dim S_1^\perp + \dim S_2^\perp = (n - k_1) + (n - k_2) = 2n - (k_1 + k_2) = 2n - n = n. \qquad \square$$

Нахождение базиса пересечения подпространств с помощью ортогонального дополнения

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств. В самом деле, если S_1 и S_2 — подпространства пространства со скалярным произведением, то

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^{\perp})^{\perp} \cap (S_2^{\perp})^{\perp} = (S_1^{\perp} + S_2^{\perp})^{\perp}.$$

Поскольку мы знаем, как находить базисы суммы подпространств и ортогонального дополнения к подпространству, это позволяет легко найти базис пересечения подпространств.