§ 38. Самосопряженные операторы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V называется *самосопряженным*, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y})$.

- Термин «самосопряженный» объясняется следующим образом. Можно доказать, что для произвольного линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V существует, и притом единственный, линейный оператор $\mathcal{B}$ в V такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{B}(\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Оператор $\mathcal{B}$ называется *сопряженным к* $\mathcal{A}$. Таким образом, самосопряженный оператор — это оператор, сопряженный сам к себе. Рассмотрение сопряженных операторов яввляется важной и содержательной частью линейной алгебры, которая не входит в наш курс по причине нехватки времени.

Приведем пример самосопряженного оператора. Пусть S — подпространство пространства со скалярным произведением V. В силу теоремы об ортогональном разложении (см. § 37) $V = S \oplus S^{\perp}$. Следовательно, мы можем рассмотреть оператор проектирования на S параллельно $S^{\perp}$ (см. пример 3 в § 29). Он называется *оператором ортогонального проектирования на подпространство* S и обозначается через $\mathcal{P}_S$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp}$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{y}^{\perp}$, $\mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}^{\perp} = \mathbf{x}^{\perp}\mathbf{y}_{\perp} = 0$, $\mathcal{P}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\perp}$ и $\mathcal{P}_S(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_{\perp}$. Следовательно, с одной стороны,

$$\mathcal{P}_S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_{\perp}(\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{y}^{\perp}) = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}^{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + 0 = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp},$$

а с другой —

$$\mathbf{x} \cdot \mathcal{P}_S(\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp})\mathbf{y}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + \mathbf{x}^{\perp}\mathbf{y}_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp} + 0 = \mathbf{x}_{\perp}\mathbf{y}_{\perp}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_S(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{P}_S(\mathbf{y})$, т. е. $\mathcal{P}_S$ — самосопряженный оператор.

Матрица самосопряженного оператора (1)

Для произвольной матрицы $A = (a_{ij})$ над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ положим $\overline{A} = (\,\overline{a_{ij}}\,)$. Ясно, что если A — матрица над $\mathbb{R}$, то $\overline{A} = A$.

Определение

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ называется *эрмитовой*, если $A = \overline{A}^{\top}$. Матрица $\overline{A}^{\top}$ обозначается через A^*. Ясно, что если A — матрица над $\mathbb{R}$, то $A^* = A^{\top}$.

Предложение о матрице самосопряженного оператора

Для произвольного линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве со скалярным произведением V следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор;*

б) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе пространства V эрмитова;*

в) *существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ эрмитова.*

Доказательство. Достаточно доказать импликации а) $\Longrightarrow$ б) и в) $\Longrightarrow$ а), поскольку импликация б) $\Longrightarrow$ в) очевидна.

а) $\Longrightarrow$ б) Пусть P — ортонормированный базис пространства V, а $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе P обозначим через A_P. Используя теорему о скалярном произведении в ортонормированном базисе (см. § 37) и формулу (1) из § 29, имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \left[\mathcal{A}(\mathbf{x})\right]_P^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} = \left[A_P \cdot [\mathbf{x}]_P\right]^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} = [\mathbf{x}]_P^\top \cdot A_P^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P},$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{[\mathcal{A}(\mathbf{y})]_P} = [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{A_P \cdot [\mathbf{y}]_P} = [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{A_P} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда

$$[\mathbf{x}]_P^\top \cdot A_P^\top \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P} = [\mathbf{x}]_P^\top \cdot \overline{A_P} \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P}. \qquad (1)$$

Поскольку в качестве $[\mathbf{x}]_P^\top$ и $\overline{[\mathbf{y}]_P}$ могут выступать, соответственно, любая строка длины $n = \dim V$ и любой столбец той же длины, мы можем дважды применить ослабленный закон сокращения для матриц (см. § 25) и сделать вывод, что равенство (1) эквивалентно равенству $A_P^\top = \overline{A_P}$. А это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $A_P = \overline{\overline{A_P}} = \overline{A_P^\top} = A_P^*$.

в) $\Longrightarrow$ а) Пусть P — тот ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ эрмитова. Обозначим эту матрицу через A_P. Повторяя в обратном порядке рассуждения, проведенные при доказательстве импликации а) $\Longrightarrow$ б), получаем, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен. $\square$

Определение

Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A = A^\top$.

Очевидно, что квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$ эрмитова тогда и только тогда, когда она является симметрической матрицей. Поэтому из предложения о матрице самосопряженного оператора немедленно вытекает

Следствие о матрице самосопряженного оператора в евклидовом пространстве

Для произвольного линейного оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор;*

б) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе пространства V симметрична;*

в) *существует ортонормированный базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ симметрична.* $\square$

Основная теорема о самосопряженном операторе

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве V со скалярным произведением является самосопряженным тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна, причем все числа на ее главной диагонали являются действительными.

Доказательство. Достаточность. Очевидно, что диагональная матрица, в которой все числа на главной диагонали действительны, эрмитова. Поэтому достаточность непосредственно вытекает из предложения о матрице самосопряженного оператора.

Основная теорема о самосопряженном операторе: схема доказательства необходимости (1)

Необходимость. Доказательство необходимости основывается на следующих трех утверждениях.

Лемма о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора

Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ являются действительными числами.

Лемма о собственных векторах самосопряженного оператора

Собственные векторы самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к его различным собственным значениям, ортогональны.

Лемма о корневых подпространствах самосопряженного оператора

Если N — корневое подпространство пространства V относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то всякий ненулевой вектор из N является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, причем собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие различным корневым подпространствам пространства V относительно оператора $\mathcal{A}$, относятся к различным собственным значениям оператора $\mathcal{A}$.

Основная теорема о самосопряженном операторе: схема доказательства необходимости (2)

Покажем, как из этих трех лемм вытекает требуемое нам утверждение. Основным полем пространства V является одно из полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. В силу леммы о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора, все корни этого уравнения лежат в основном поле. Это означает, что многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ разложим на линейные множители. Пусть $N_1, N_2, \ldots, N_m$ — всевозможные корневые подпространства пространства V относительно оператора $\mathcal{A}$. По теореме о корневом разложении (см. § 35) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} N_i$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ обозначим через P_i ортонормированный базис пространства N_i и положим $P = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$. В силу замечания о базисе прямой суммы подпространств (см. §24), P — базис в V. Согласно лемме о корневых подпространствах самосопряженного оператора, P состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. В силу критерия приводимости оператора к диагональному виду (см. § 33), матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе P диагональна, а из доказательства этого критерия вытекает, что на ее главной диагонали стоят собственые значения оператора $\mathcal{A}$. Лемма о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора гарантирует, что эти собственные значения являются действительными числами.

Основная теорема о самосопряженном операторе: схема доказательства необходимости (3)

Осталось понять, что базис P ортонормирован. В силу ортонормированности базисов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, достаточно убедиться в том, что если $1 \leqslant i, j \leqslant m$ и $i \neq j$, то векторы из P_i ортогональны к векторам из P_j. Пусть $\mathbf{x} \in P_i$ и $\mathbf{y} \in P_j$. Поскольку эти векторы входят в базисы подпространств P_i и P_j, они являются ненулевыми. Из леммы о корневых подпространствах самосопряженного оператора вытекает, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к его различным собственным значениям. Ортогональность векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вытекает теперь из леммы о собственных векторах самосопряженного оператора.

Доказательство леммы о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора. Пусть λ — корень характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$. Зафиксируем некоторый базис P пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда выполнено равенство $|A - \lambda E| = 0$. В силу признака существования ненулевого решения крамеровской системы (см. § 9), система линейных уравнений $(A - \lambda E)X = O$ имеет ненулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $\mathbf{x}$ вектор с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе P. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{xx} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{x}) = \overline{\lambda} \cdot \mathbf{xx}.$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x})$, и потому $\lambda(\mathbf{xx}) = \overline{\lambda}(\mathbf{xx})$, т. е. $(\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \mathbf{xx} = 0$. Но $\mathbf{xx} \neq 0$, поскольку $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $\lambda = \overline{\lambda}$, т. е. $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Доказательство леммы о собственных векторах самосопряженного оператора. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к его различным собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно. Учитывая, что, в силу леммы о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора, λ_2 — действительное число, имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = (\lambda_1\mathbf{x})\mathbf{y} = \lambda_1(\mathbf{xy}) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\lambda_2\mathbf{y}) = \overline{\lambda_2}\,(\mathbf{xy}) = \lambda_2(\mathbf{xy}).$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, $\mathcal{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathcal{A}(\mathbf{y})$. Следовательно, $\lambda_1(\mathbf{xy}) = \lambda_2(\mathbf{xy})$, т. е. $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{xy}) = 0$. Поскольку $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, мы получаем, что $\mathbf{xy} = 0$. $\square$

Доказательство леммы о корневых подпространствах самосопряженного оператора. По определению корневого подпространства, $N = \mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^s\big)$, где λ — некоторое собственное значение оператора $\mathcal{A}$, а s — минимальное натуральное число с тем свойством, что $\mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^s\big) = \mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{s+1}\big)$. Для того, чтобы доказать, что все ненулевые векторы из N являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, достаточно показать, что $s = 1$, т. е. что $N = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. В самом деле, в этом случае для любого вектора $\mathbf{x} \in N$ выполнено равенство $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

Проверим сначала, что $\mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \cap \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \{\mathbf{0}\}$. Поскольку $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \cap \big(\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\big)^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, достаточно доказать, что $\mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \subseteq \big(\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\big)^{\perp}$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ и $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Из последнего включения вытекает, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$. Требуется доказать, что $\mathbf{xy} = 0$. Существует вектор $\mathbf{z}$ такой, что $\mathbf{x} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{z}) - \lambda\mathbf{z}$. Используя, что оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, а $\lambda = \overline{\lambda}$ (в силу предложения леммы о корнях характеристического уравнения самосопряженного оператора), имеем

$$\mathbf{xy} = \big(\mathcal{A}(\mathbf{z}) - \lambda\mathbf{z}\big)\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} - (\lambda\mathbf{z})\mathbf{y} = \mathbf{z} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{y}) - \lambda(\mathbf{zy}) =$$
$$= \mathbf{z}(\lambda\mathbf{y}) - \lambda(\mathbf{zy}) = \overline{\lambda}(\mathbf{zy}) - \lambda(\mathbf{zy}) = \lambda(\mathbf{zy}) - \lambda(\mathbf{zy}) = 0.$$

Доказательство леммы о корневых подпространствах самосопряженного оператора (2)

Перейдем к непосредственному доказательству равенства $s = 1$. Требуется доказать, что $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2\big)$. Включение $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2\big)$ очевидно, так как $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{B}^2$ для любого линейного оператора $\mathcal{B}$. Осталось проверить, что $\mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2\big) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2\big)$. Положим $\mathbf{y} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x})$. Ясно, что $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. С другой стороны, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{y}) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, и потому $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Таким образом, $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \cap \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Учитывая сказанное на предыдущем слайде, получаем, что $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{y} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{x})$, это означает, что $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Включение $\mathrm{Ker}\big((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2\big) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ доказано.

Осталось доказать, что ненулевые векторы из различных корневых подпространств относятся к различным собственным значениям оператора $\mathcal{A}$. Из сказанного выше вытекает, что если N_1 и N_2 — различные корневые подпространства пространства V относительно $\mathcal{A}$, то $N_1 = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})$ и $N_2 = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E})$, где λ_1 и λ_2 — различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$. При этом все ненулевые векторы из N_i являются собственными векторами, относящимися к λ_i, где $i = 1, 2$. $\square$

Тем самым, мы завершили доказательство основной теоремы о самосопряженных операторах.

Определение

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ называется *унитарной*, если $AA^* = A^*A = E$.

Ясно, что если матрица A унитарна, то она обратима и $A^{-1} = A^*$.

Предложение о матрицах перехода в унитарном пространстве

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в унитарном пространстве является унитарной.

Доказательство. Пусть V — унитарное пространство, $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ и $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n\}$ — его ортонормированные базисы и $T = (t_{ij})$ — матрица перехода от C к D. По определению матрицы перехода произведение i-й строки матрицы $T^\top$ на j-й столбец матрицы $\overline{T}$ равно скалярному произведению векторов $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}_j$. Поскольку базис D ортонормирован, это означает, что $T^\top \cdot \overline{T} = E$. Следовательно, $E = \overline{E} = \overline{T^\top \cdot \overline{T}} = \overline{T^\top} \cdot \overline{\overline{T}} = \overline{T^\top} \cdot T = T^*T$. Аналогично проверяется, что $TT^* = E$. $\square$

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому в евклидовом пространстве

Определение

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{R}$ называется *ортогональной*, если $A^\top A = E$.

Ясно, что если матрица A ортогональна, то она обратима и $A^{-1} = A^\top$.

Если A — квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$, то $A^* = A^\top$. Следовательно, всякая унитарная матрица над полем $\mathbb{R}$ ортогональна. Поэтому из предложения о матрицах перехода в унитарном пространстве вытекает

Следствие о матрицах перехода в евклидовом пространстве

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в евклидовом пространстве является ортогональной. $\square$

Из основной теоремы о самосопряженном операторе, предложения о матрице самосопряженного оператора и предложения о матрицах перехода в унитарном пространстве вытекает

Следствие об эрмитовых матрицах

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ эрмитова тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица T и диагональная матрица D с действительными числами на главной диагонали такие, что $D = T^* A T$. □

А из основной теоремы о самосопряженном операторе, следствия о матрице самосопряженного оператора в евклидовом пространстве и следствия о матрицах перехода в евклидовом пространстве вытекает

Следствие о симметрических матрицах

Квадратная матрица A над полем $\mathbb{R}$ является симметрической тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D такие, что $D = T^{\top} A T$. □