Глава XI. Квадрики на плоскости

§ 41. Эллипс

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В гл. IV (§ 15–17) мы рассмотрели прямые и плоскости, т. е. кривые и поверхности, задаваемые уравнениями 1-го порядка. В оставшейся части курса изучаются кривые и поверхности, задаваемые уравнениями 2-го порядка. Они называются *квадриками* на плоскости и в пространстве. В этом и двух следующих параграфах мы рассмотрим три конкретные квадрики на плоскости, а в § 44 приведем их полную классификацию. После этого в гл. XII (§ 45–48) будут рассмотрены квадрики в пространстве.

!! *В этом и всех последующих параграфах предполагается, что все системы координат на плоскости и в пространстве, в которых будут записываться уравнения кривых и поверхностей, являются прямоугольными декартовыми.*

Определение

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $a, b > 0$ и $a \geqslant b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипса.

- Каноническое уравнение эллипса является его общим уравнением в смысле понятия общего уравнения кривой на плоскости, введенного в начале § 15.
- Параметрические уравнения эллипса будут указаны ниже, после того, как мы выясним «внешний вид» эллипса, т. е. его расположение на плоскости.

Вершины, фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет и директрисы эллипса

Введем ряд понятий, играющих важную роль в изучении эллипса. Пусть эллипс задан уравнением (1). Ясно, что $a^2 - b^2 \geqslant 0$. Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ясно, что $0 \leqslant c < a$.

Определения

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(b, 0)$ и $(-b, 0)$ называются *вершинами* эллипса, величина a — *большой полуосью* эллипса, а величина b — его *малой полуосью*. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* эллипса, причем фокус F_1 называется *правым*, а фокус F_2 — *левым*. Если точка M принадлежит эллипсу, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* и обозначаются соответственно через r_1 и r_2. Величина $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса (при $e = 0$ директрис эллипса не существует).

«Физический смысл» введенных сейчас понятий станет ясен позднее, после того, как мы изучим форму эллипса. Пока отметим только, что из определения эксцентриситета непосредственно вытекает следующий факт:

- *для любого эллипса выполнены неравенства* $0 \leqslant e < 1$.

Изучим «внешний вид» эллипса. Предположим, что точка $M(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда $x^2 = a^2(1 - \frac{y^2}{b^2})$, откуда $|x| = a \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \leqslant a$. Аналогично проверяется, что $|y| \leqslant b$. Это означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ координатной плоскости. Далее, очевидно, что эллипс симметричен относительно обеих осей координат, и потому достаточно понять, как он выглядит в первой четверти. Поэтому далее будем считать, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

Вычислив первую и вторую производные этой функции, получим:

$$y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

В частности, $y' < 0$ и $y'' < 0$ при любом $x > 0$. Следовательно, в первой четверти эллипс убывает и является вогнутым (т. е. выпуклым вверх). Кроме того, из (2) легко выводится, что в первой четверти эллипс пересекает ось абсцисс в точке $(a, 0)$ и ось ординат в точке $(0, b)$. Отразив полученную кривую симметрично сначала в четвертую четверть, а затем в левую полуплоскость, получим кривую, изображенную на рис. 1 на следующем слайде (чтобы выделить эллипс среди вспомогательных линий, он изображен красным цветом).

Расположение эллипса на плоскости (рисунок)

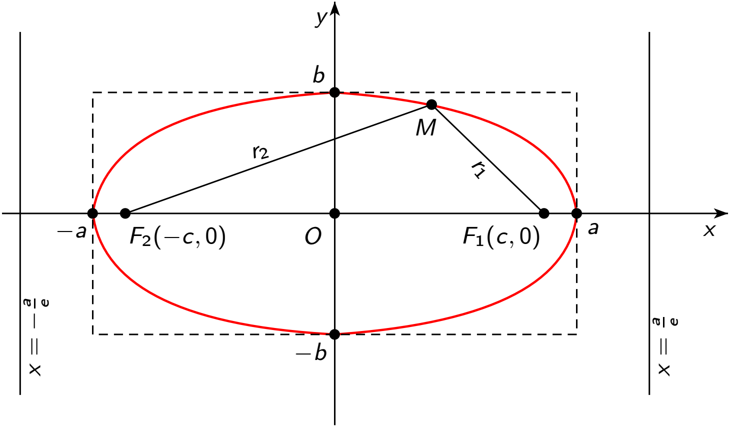

Рис. 1. Эллипс

Выведем параметрические уравнения эллипса. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1). Для удобства будем считать, что точка M лежит в I четверти (в остальных случаях рассуждения аналогичны). Построим окружности радиусов a и b с центром в начале координат. Первую из них для краткости будем называть большой, а вторую — малой. Проведем через точку M прямую, параллельную оси Oy, и обозначим через A точку ее пересечения с большой окружностью. Далее, проведем через точку M прямую, параллельную оси Ox, и обозначим через B точку ее пересечения с малой окружностью. Проекции точек A и B на ось Ox обозначим через A' и B' соответственно. Поскольку большая окружность имеет уравнение $x^2 + y^2 = a^2$, а малая — уравнение $x^2 + y^2 = b^2$, получаем, что точка A имеет координаты $(x_0, \sqrt{a^2 - x_0^2})$, а точка B — координаты $(\sqrt{b^2 - y_0^2}, y_0)$. Точка M лежит на эллипсе. Следовательно, имеет место равенство $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Умножая обе его части на $a^2 b^2$, имеем $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$. Отсюда $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}$, и значит $b^2 - y_0^2 = \frac{b^2 x_0^2}{a^2}$. Аналогично проверяется, что $a^2 - x_0^2 = \frac{a^2 y_0^2}{b^2}$.

Следовательно, точка A имеет координаты $\left(x_0, \frac{ay_0}{b}\right)$, а точка B — координаты $\left(\frac{bx_0}{a}, y_0\right)$. Но тогда $\overrightarrow{OA} = \left(x_0, \frac{ay_0}{b}\right)$ и $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{bx_0}{a}, y_0\right)$. Ясно, что $\overrightarrow{OA} = \frac{a}{b} \cdot \overrightarrow{OB}$. В силу критерия коллинеарности векторов, имеем $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$. Следовательно, точки O, A и B расположены на одной прямой. Обозначим угол между вектором $\overrightarrow{OA}$ и осью Ox через t. Тогда

$$x_0 = |OA'| = |OA| \cdot \cos t = a\cos t \quad \text{и}$$
$$y_0 = |A'M| = |BB'| = |OB| \cdot \sin t = b\sin t.$$

Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \tag{4}$$

Обратно, если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнениям (4), то эта точка лежит на исходном эллипсе, поскольку из уравнений (4) очевидным образом выводится равенство (1). Таким образом, уравнения (4) являются параметрическими уравнениями эллипса.

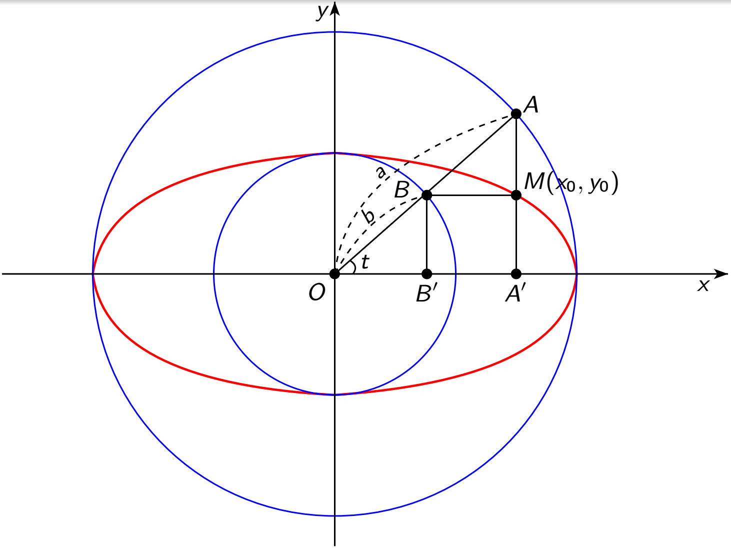

Рис. 2. Параметризация эллипса

Как показывает рис. 1, эллипс выглядит как вытянутая (вдоль оси абсцисс) или сжатая (вдоль оси ординат) окружность. Это не случайно. При $a = b$ уравнение (1) можно переписать в виде $x^2 + y^2 = a^2$, а последнее есть не что иное, как уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат[1]. Далее, ясно, что если $a = b$, то $c = 0$, а значит и $e = 0$. Таким образом, имеют место следующие факты.

- *Окружность является частным случаем эллипса. Обе полуоси окружности совпадают с ее радиусом, фокусы окружности совпадают между собой и расположены в центре окружности. Эксцентриситет окружности равен* 0. *Окружность не имеет директрис.*

Эксцентриситет является мерой вытянутости эллипса, его «удаленности» от окружности.

- Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше похож на окружность, а чем он ближе к единице, тем более эллипс вытянут вдоль оси абсцисс.

[1] Параметрические уравнения эллипса при $a = b$ также совпадают с параметрическими уравнениями окружности — ср. уравнения (4) данного параграфа с уравнениями (2) в § 15.

Укажем одно «физическое свойство» эллипса.

- Эллипс — это та кривая, по которой одно тело движется вокруг другого по действием силы притяжения (например, Земля вокруг Солнца или Луна вокруг Земли). При этом тело, вокруг которого происходит движение, всегда находится в одном из фокусов эллипса.

Отметим, что эксцентриситеты орбит, по которым «обычные» планеты движутся вокруг Солнца, как правило, весьма малы. Например, эксцентриситет орбиты Земли равен 0,0167. А у орбит, по которым движутся кометы, эксцентриситет, напротив, весьма близок к единице (например, у кометы Галлея он равен 0,967). Именно поэтому кометы так редко появляются вблизи Солнца.

Основная цель данного параграфа — доказать два утверждения, характеризующих эллипс как геометрическое место точек с некоторыми свойствами. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма о фокальных радиусах эллипса

Если точка $M(x, y)$ *принадлежит эллипсу, заданному уравнением* (1), *то* $r_1 = a - ex$ *и* $r_2 = a + ex$.

Доказательство. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$. Следовательно,

$$r_1 = |F_1 M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Поскольку

$$c^2 + b^2 = a^2, \;\; 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2 \;\text{ и }\; ea = c,$$

имеем

$$r_1 = \sqrt{e^2 x^2 - 2eax + a^2} = \sqrt{(ex - a)^2} = |\,ex - a|.$$

Так как $0 \leqslant e < 1$ и $x \leqslant a$, то $ex - a \leqslant 0$. Это означает, что $r_1 = |\,ex - a| = a - ex$. Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. $\square$

Следующее утверждение дает характеризацию эллипса, которую нередко принимают за его определение.

Фокальное свойство эллипса

Точка M принадлежит эллипсу, заданному уравнением (1), тогда и только тогда, когда сумма расстояний от M до фокусов равна $2a$.

Доказательство. Необходимость. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то, в силу леммы о фокальных радиусах эллипса,

$$|F_1M| + |F_2M| = r_1 + r_2 = (a - ex) + (a + ex) = 2a.$$

Достаточность. Предположим, что $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой выполнено равенство $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

и возведем обе части полученного равенства в квадрат.

Получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

что после очевидных преобразований дает

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a^2 - c^2 = b^2$, последнее равенство можно переписать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив это равенство на a^2b^2, получим уравнение (1). □

Следующее утверждение дает еще одну характеризацию эллипса.

Директориальное свойство эллипса

Точка M принадлежит эллипсу (не являющемуся окружностью) тогда и только тогда, когда отношение расстояния от M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

Докажем сформулированное утверждение для правого фокуса и правой директрисы. Для левого фокуса и левой директрисы доказательство абсолютно аналогично.

Доказательство. Необходимость. Обозначим через ℓ директрису с уравнением $x = \frac{a}{e}$. Очевидно (и вытекает из формулы (14) в § 15), что расстояние от точки $M(x, y)$ до ℓ равно $\frac{a}{e} - x = \frac{a-ex}{e}$. Используя лемму о фокальных радиусах эллипса, получаем, что если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то

$$\frac{|F_1M|}{d(M,\ell)} = \frac{r_1}{(a-ex)/e} = \frac{a-ex}{a-ex} \cdot e = e.$$

Достаточность. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, для которой выполнено равенство $\frac{|F_1M|}{d(M,\ell)} = e$ или $|F_1M| = e \cdot d(M, \ell)$. Ясно, что $|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Используя формулу (14) из § 15, получаем, что $d(M, \ell) = |x - \frac{a}{e}|$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e \cdot \left|x - \frac{a}{e}\right|.$$

Возводя это равенство в квадрат, имеем

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2.$$

Поскольку $ea = c$, последнее равенство можно переписать в виде

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Учитывая, что

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{и} \quad 1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

имеем

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Разделив это равенство на b^2, получим уравнение (1). $\square$

Эллипс обладает следующим *оптическим свойством*:

Оптическое свойство эллипса

Свет от источника, находящегося в одном из фокусов эллипса, отражается эллипсом так, что отраженные лучи пересекаются во втором фокусе.

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3. Пусть луч света, выпущенный из фокуса F_1, отражается от эллипса в точке $M(x_0, y_0)$. Требуется проверить, что луч MF_2 является отражением луча FM_1 от эллипса. Через ℓ обозначим касательную к эллипсу в точке M. Поскольку угол падения равен углу отражения, требуется доказать, что углы, образуемые лучами F_1M и MF_2 с касательной, равны. Обозначим первый из этих углов через φ, а второй — через ψ (см. рис. 3). Будем считать, что точка M расположена в I четверти (в остальных случаях доказательство вполне аналогично).

Найдем уравнение прямой ℓ. Как известно из математического анализа, уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через точку с координатами (x_0, y_0), лежащую на этом графике, имеет вид $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Продифференцируем по x обе части канонического уравнения эллипса (считая y функцией от x и используя при дифференцировании левой части правило дифференцирования сложной функции).

Получим
$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0,$$
откуда $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$. Следовательно, уравнение прямой ℓ имеет вид
$$y = y_0 - \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot (x - x_0) \quad \text{или} \quad \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot x + y = y_0 + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}.$$
Умножая обе части последнего равенства на a^2y_0, имеем $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2y_0^2 + b^2x_0^2$. Учитывая, что точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, получаем, что $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Следовательно, $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$. Объединяя сказанное, имеем $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$. Разделив обе части последнего равенства на a^2b^2, окончательно получаем, что прямая ℓ имеет уравнение
$$\frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y - 1 = 0.$$

Найдем расстояния от фокусов до прямой ℓ. Положим $N = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$. Используя формулу для расстояния от точки до прямой на плоскости (формула (14) в § 15), имеем:

$$d_1 = d(F_1, \ell) = \frac{1}{N} \cdot \left| \frac{cx_0}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{Na} \cdot \left| \frac{cx_0}{a} - a \right| = \\ = \frac{1}{Na} \cdot |ex_0 - a| = \frac{1}{Na} \cdot (a - ex_0)$$

(последнее равенство вытекает из того, что $0 \leqslant e < 1$, $0 \leqslant x_0 \leqslant a$ и $a > 0$, откуда $ex_0 - a < 0$). Учитывая лемму о фокальных радиусах, получаем, что $d_1 = \frac{r_1}{Na}$. Следовательно, $\sin \varphi = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{Na}$. Аналогично,

$$d_2 = d(F_2, \ell) = \frac{1}{N} \cdot \left| \frac{-cx_0}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{Na} \cdot \left| -\frac{cx_0}{a} - a \right| = \\ = \frac{1}{Na} \cdot |-ex_0 - a| = \frac{1}{Na} \cdot (ex_0 + a)$$

(последнее равенство объясняется тем, что $e \geqslant 0$, $x_0 \geqslant 0$ и $a > 0$, откуда $-ex_0 - a < 0$). В силу леммы о фокальных радиусах $d_2 = \frac{r_2}{Na}$, и потому $\sin \psi = \frac{d_2}{r_2} = \frac{1}{Na}$. Таким образом, $\sin \varphi = \sin \psi$, т. е. $\varphi = \psi$. □

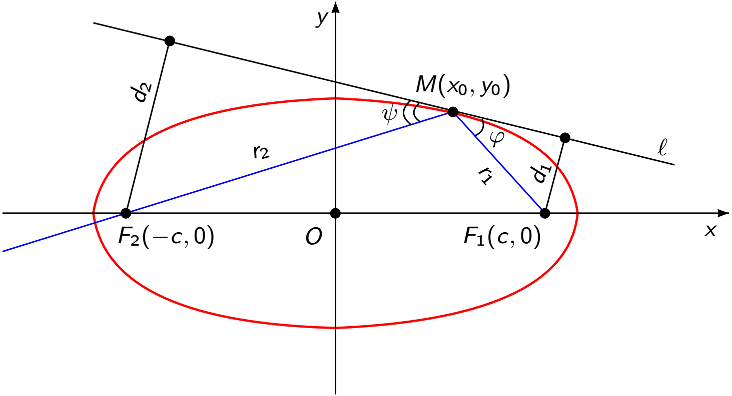

Рис. 3. К доказательству оптического свойства эллипса