

§ 46. Эллипсоиды, гиперboloиды, параболоиды

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В этой лекции рассматриваются еще пять квадрик в пространстве: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды и эллиптический и гиперболический параболоиды.

Определение

Эллипсоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипсоида.

Отметим, что при $a = b = c$ приведенное только что уравнение равносильно уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, которое, как известно из школьного курса, задает сферу радиуса a с центром в начале координат. Таким образом,

- сфера является частным случаем эллипсоида (подобно тому, как окружность есть частный случай эллипса).

Исследуем форму эллипсоида, применив так называемый *метод сечений*. Суть этого метода состоит в следующем.

Метод сечений

Рассмотрим сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям (эти плоскости имеют уравнения вида $x = h$, $y = h$ и $z = h$, где h — некоторая константа). В сечениях получаются кривые, вид которых мы распознаем. Проведя достаточно много таких сечений, мы в итоге получим представление о форме поверхности.

Прежде чем начинать исследование формы эллипсоида методом сечений, договоримся о следующем. На протяжении всего этого параграфа мы будем рассматривать кривые, получающиеся в сечении той или иной поверхности плоскостями с уравнениями вида $w = h$, где w — одна из букв x , y и z . Для экономии места мы вместо записи общего уравнения полученной кривой вида

$$\begin{cases} F(u, v) = 0, \\ w = h, \end{cases}$$

где u и v — буквы такие, что $\{u, v, w\} = \{x, y, z\}$, будем писать только уравнение $F(u, v) = 0$ и называть его уравнением полученной кривой внутри плоскости $w = h$ (или просто «плоскостным» уравнением этой кривой).

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостями вида $z = h$. Получим кривую, которая внутри этой плоскости задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

При $|h| > c$ эта кривая является пустым множеством, при $|h| = c$ — точкой, а при $|h| < c$ — эллипсом с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{h^2}{c^2})} = 1.$$

При $h = 0$ полуоси этого эллипса имеют наибольшие значения (равные a и b), с ростом $|h|$ они уменьшаются и стремятся к 0 при $|h| \rightarrow c$. Абсолютно аналогично устроены сечения эллипсоида плоскостями вида $x = h$ и $y = h$ (надо только соответствующим образом заменить неизвестные и параметры a, b, c в уравнении получающегося эллипса). Окончательно представление о форме эллипсоида дает рис. 1 на следующем слайде.

Таким образом, можно сказать, что эллипсоид — это «вытянутая» (или, наоборот, «сплюснутая» — смотря вдоль какой оси смотреть) сфера. Говоря нематическим языком, можно сказать, что эллипсоид имеет форму яйца.

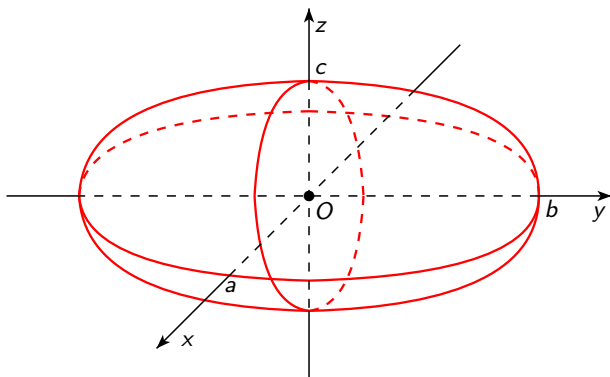


Рис. 1. Эллипсоид

Определение

Однополостным гиперboloидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* однополостного гиперboloида.

Изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью $z = h$ получается эллипс с полуосями $a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$. Значения полуосей минимальны при $h = 0$ и возрастают с ростом $|h|$.

Однополостный гиперboloид (2)

В сечении плоскостью $x = h$ получается:

- при $|h| < a$ — гипербола, задаваемая внутри этой плоскости уравнением

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{h^2}{a^2})} - \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{h^2}{a^2})} = 1;$$

действительной и мнимой осями гиперболы являются проекции осей Oy и Oz соответственно на плоскость $x = h$, полуоси гиперболы максимальны при $h = 0$ и убывают с ростом h ;

- при $h = \pm a$ — пара пересекающихся прямых, задаваемых внутри плоскости $x = h$ уравнениями $y = \frac{b}{c} \cdot z$ и $y = -\frac{b}{c} \cdot z$;
- при $|h| > a$ — гипербола, задаваемая «плоскостным» уравнением

$$\frac{z^2}{c^2(\frac{h^2}{a^2} - 1)} - \frac{y^2}{b^2(\frac{h^2}{a^2} - 1)} = 1;$$

действительной и мнимой осями гиперболы являются проекции осей Oz и Oy соответственно на плоскость $x = h$; полуоси гиперболы возрастают с ростом h .

Наконец, сечения плоскостями вида $y = h$ устроены аналогично сечениям плоскостями вида $x = h$. В целом однополостный гиперboloид выглядит так, как показано на рис. 2 на следующем слайде.

Однополостный гиперболоид (рисунок)

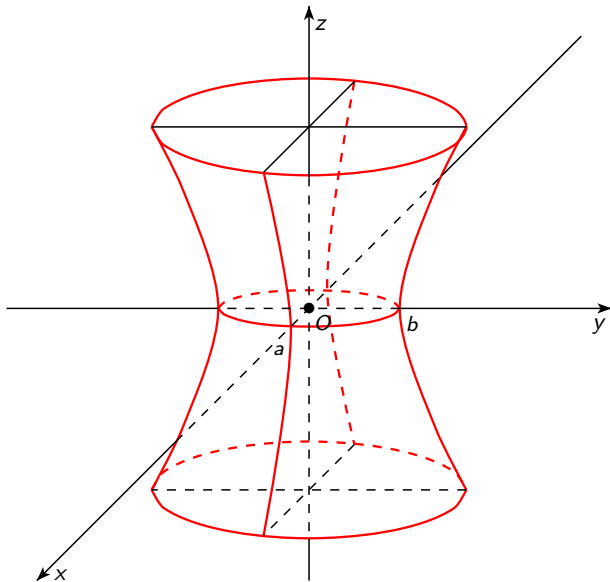


Рис. 2. Однополостный гиперболоид

Определение

Двуполостным гиперboloидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* двуполостного гиперboloида.

Как и предыдущих случаях, изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью $z = h$ получается кривая, которая внутри этой плоскости задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}$. Если $|h| < c$, то эта кривая представляет собой пустое множество; если $|h| = c$, то наша кривая является точкой; если же $|h| > c$, то эта кривая является эллипсом с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{a^2(-1 + \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(-1 + \frac{h^2}{c^2})} = 1,$$

полуоси которого растут с ростом $|h|$.

В сечении плоскостями $x = h$ и $y = h$ получаются гиперболы с «плоскостными» уравнениями

$$\frac{z^2}{c^2\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)} = 1$$

и

$$\frac{z^2}{c^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1$$

соответственно, полуоси которых минимальны при $h = 0$ (т. е. при сечении координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$) и растут с ростом h .

В результате получается поверхность, изображенная на рис. 3 на следующем слайде. Отметим, что эта поверхность состоит из двух частей, что и объясняет слово «двуполостный» в ее названии (аналогичное происхождение имеет слово «однополостный» в названии предыдущей поверхности).

Двуполостный гиперboloид (рисунок)

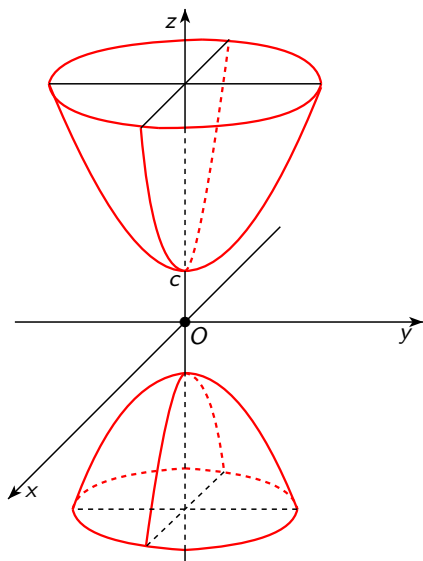


Рис. 3. Двуполостный гиперboloид

Определение

Эллиптическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a, b > 0$ и $a \geq b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллиптического параболоида.

В сечении этой поверхности плоскостью $z = h$ получается:

- при $h < 0$ — пустое множество;
- при $h = 0$ — точка (начало координат);
- при $h > 0$ — эллипс с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1,$$

полуоси которого растут с ростом h .

В сечении плоскостью $y = h$ получается кривая с «плоскостным» уравнением

$$x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{h^2}{2b^2} \right)$$

Это парабола с параметром a^2 , ветви которой направлены вверх, т. е. в положительном направлении оси Oz . При $h = 0$ ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением $|h|$ она поднимается вдоль оси Oz .

Аналогичным образом устроено сечение плоскостью $x = h$: это парабола с «плоскостным» уравнением

$$y^2 = 2b^2 \left(z - \frac{h^2}{2a^2} \right),$$

параметр которой равен b^2 , а вершина совпадает с началом координат при $h = 0$ и поднимается вдоль оси Oz с ростом $|h|$.

Получающаяся поверхность изображена на рис. 4 на следующем слайде.

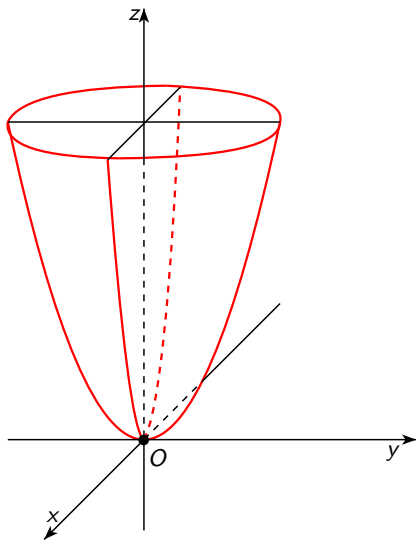


Рис. 4. Эллиптический параболоид

В § 43 мы упоминали об оптическом свойстве параболы. Аналогичное свойство имеет и эллиптический параболоид.

Оптическое свойство эллиптического параболоида

Как мы уже говорили, сечения эллиптического параболоида плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются парабололами. Пучок лучей, параллельных оси любой из этих парабол, отражаясь от параболоида, собирается в фокусе этой параболы; и наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе одной из парабол, отражается параболоидом в пучок лучей, параллельных оси этой параболы.

Это свойство лежит в основе действия параболических антенн, телескопов-рефлекторов, прожекторов, автомобильных фар и т. д.

- На том же свойстве основано и действие прибора, описанного в романе А.Н.Толстого «Гиперболоид инженера Гарина». Так что на самом деле этот роман должен был называться «Параболоид инженера Гарина».

Определение

Гиперболическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболического параболоида.

Рассмотрим сечение этой поверхности плоскостью $z = h$. Получим кривую, которая внутри этой плоскости имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h$. При $h = 0$ в сечении получается пара пересекающихся прямых, которые в плоскости Oxy задаются уравнениями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. При $h > 0$ наше сечение является гиперболой с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{2a^2h} - \frac{y^2}{2b^2h} = 1,$$

у которой ортогональные проекции осей Ox и Oy на плоскость $z = h$ являются действительной и мнимой осью соответственно, а полуоси гиперболы растут с ростом h .

При $h < 0$ также получается гипербола, только здесь полуоси гиперболы «меняются ролями» (по сравнению со случаем $h > 0$), а ее полуоси растут с убыванием h .

Рассмотрим теперь сечение гиперболического параболоида плоскостью $y = h$. Получим кривую, задаваемую внутри плоскости уравнением

$$x^2 = 2a^2 \left(z + \frac{h^2}{2b^2} \right).$$

Это парабола с параметром a^2 , ветви которой направлены вверх, т. е. в положительном направлении оси Oz . При $h = 0$ ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением $|h|$ она поднимается вдоль оси Oz .

Аналогичная картина получается при сечении плоскостью $x = h$: вновь возникает парабола, которая теперь имеет «плоскостное» уравнение

$$y^2 = -2b^2 \left(z - \frac{h^2}{2a^2} \right).$$

Ее параметр равен b^2 , ветви параболы направлены вниз (в отрицательном направлении оси Oz). При $h = 0$ вершина параболы совпадает с началом координат, а с увеличением $|h|$ она опускается вдоль оси Oz .

В результате получается поверхность, изображенная на рис. 5 на следующем слайде. Используя нематематическую терминологию, можно сказать, что она имеет форму седла.

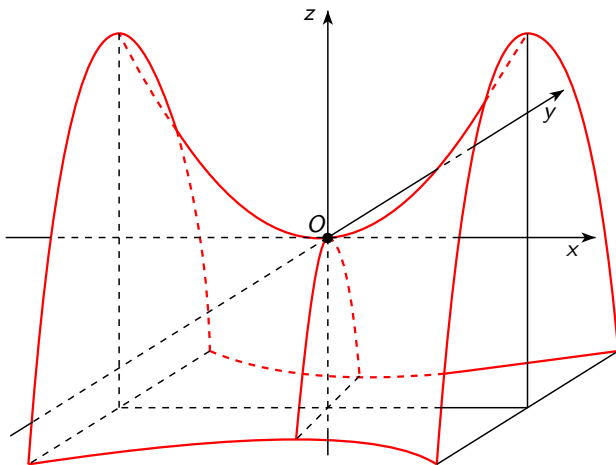


Рис. 5. Гиперболический параболоид