§ 48. Прямолинейные образующие квадрик в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение прямолинейной образующей

Определение

Прямая, целиком лежащая на поверхности, называется *прямолинейной образующей* этой поверхности.

Прямолинейные образующие по определению имеют цилиндрические и конические поверхности, в частности, эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры и конус (см. § 45). В § 46 фактически отмечалось (без использования введенного только что термина), что прямолинейные образующие есть у однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. Несложно проверяется (см. следующий слайд), что все остальные «невырожденные» квадрики в пространстве, т. е. эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид, прямолинейных образующих не имеют. Основная цель этого параграфа — указать некоторые свойства и способ нахождения уравнений прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Рассмотрим эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид, которые заданы своими каноническими уравнениями. Эллипсоид не имеет прямолинейных образующих, потому что он целиком расположен внутри параллелипипеда, задаваемого неравенствами $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ и $|z| \leqslant c$. Перейдем к двуполостному гиперболоиду. Если прямая параллельна плоскости xOy, то она лежит в плоскости, задаваемой уравнением $z = h$ для некоторого h. Но, как мы видели в § 46, сечение двуполостного гиперболоида плоскостью вида $z = h$, является либо эллипсом, либо точкой, либо пустым множеством. В любом случае это сечение не содержит никакой прямой. Если же прямая либо пересекает плоскость xOy, либо лежит в ней, то она не может лежать на нашем гиперболоиде, так как он не пересекает указанную плоскость. Аналогично проверяется отсутствие прямолинейных образующих у эллиптического параболоида (надо только вместо плоскости xOy рассмотреть плоскость, заданную уравнением $z = -1$).

1-я теорема о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно две прямолинейных образующих.

Доказательство. Напомним, что однополостный гиперболоид задается в подходящей системе координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит однополостному гиперболоиду, заданному уравнением (1), а прямая ℓ, проходящая через эту точку, является прямолинейной образующей этого гиперболоида. Запишем параметрические уравнения прямой ℓ:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt. \end{cases} \tag{2}$$

Положим

$$X = \tfrac{x}{a},\ Y = \tfrac{y}{b},\ Z = \tfrac{z}{c},\ X_0 = \tfrac{x_0}{a},\ Y_0 = \tfrac{y_0}{b},\ Z_0 = \tfrac{z_0}{c},$$
$$P = \tfrac{p}{a},\ Q = \tfrac{q}{b},\ R = \tfrac{r}{c}. \tag{3}$$

В этих обозначениях уравнение гиперболоида принимает вид

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1, \tag{4}$$

а уравнения прямой ℓ — вид

$$\begin{cases} X = X_0 + Pt, \\ Y = Y_0 + Qt, \\ Z = Z_0 + Rt. \end{cases} \tag{5}$$

Напомним, что вектор $\vec{a} = (p, q, r)$ является направляющим вектором прямой ℓ. Если $r \neq 0$, то R также отлично от 0, и разделив вектор $\vec{a}$ на R, мы получим направляющий вектор прямой ℓ, третья координата которого равна c. Поскольку нам не важно, координаты какого именно из направляющих векторов прямой ℓ стоят в правых частях уравнений (2), в дальнейшем можно считать, что либо $r = 0$, либо $r = c$, т. е. либо $R = 0$, либо $R = 1$.

Число прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, проходящих через данную точку (3)

Подставим правые части уравнений (5) в уравнение (4). Получим

$$(X_0 + Pt)^2 + (Y_0 + Qt)^2 - (Z_0 + Rt)^2 = 1. \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2 = 1, \qquad (7)$$

поскольку точка M_0 лежит на гиперболоиде. Вычтем равенство (7) из равенства (6). После очевидных преобразований, получим

$$(P^2 + Q^2 - R^2)t^2 + 2(X_0 P + Y_0 Q - Z_0 R)t = 0.$$

Поскольку все точки прямой ℓ лежат на гиперболоиде, последнее равенство должно выполняться для любого t. Это возможно лишь в случае, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} P^2 + Q^2 - R^2 = 0, \\ X_0 P + Y_0 Q - Z_0 R = 0. \end{cases}$$

Первое из этих равенств показывает, что если $R = 0$, то $P = Q = 0$, и потому $p = q = r = 0$. Но это невозможно, поскольку вектор $\vec{a}$, будучи направляющим вектором прямой, не может быть нулевым. В силу сказанного выше, можно считать, что $R = 1$.

Следовательно,

$$\begin{cases} P^2+Q^2 = 1, \\ X_0P+Y_0Q = Z_0. \end{cases} \tag{8}$$

Из уравнения (7) видно, что случай, когда $X_0 = Y_0 = 0$, невозможен. Следовательно, либо $X_0 \neq 0$, либо $Y_0 \neq 0$. Будем далее считать, что $Y_0 \neq 0$ (случай, когда $X_0 \neq 0$, разбирается вполне аналогично и приводит к тем же самым результатам). Из второго из уравнений (8) имеем $Q = \frac{Z_0 - X_0P}{Y_0}$. Подставив правую часть последнего равенства вместо Q в первое из уравнений (8), мы после очевидных преобразований получим следующее квадратное уравнение относительно P:

$$\left(1+\frac{X_0^2}{Y_0^2}\right)P^2 - \frac{2X_0Z_0}{Y_0^2}\cdot P + \frac{Z_0^2}{Y_0^2} - 1 = 0.$$

Умножив обе части уравнения на Y_0^2, получим:

$$(X_0^2+Y_0^2)P^2 - 2X_0Z_0P + Z_0^2 - Y_0^2 = 0. \tag{9}$$

Подсчитаем дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части этого уравнения.

Используя равенство (7), получим:

$$\begin{aligned} D &= 4X_0^2Z_0^2 - 4(X_0^2 + Y_0^2)(Z_0^2 - Y_0^2) = \\ &= 4(X_0^2Z_0^2 - X_0^2Z_0^2 + X_0^2Y_0^2 - Y_0^2Z_0^2 + Y_0^4) = \\ &= 4(X_0^2 + Y_0^2 - Z_0^2)Y_0^2 = \\ &= 4Y_0^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (9) имеет два различных решения. Это означает, что направляющий вектор прямой ℓ можно выбрать двумя способами, т. е. через точку M_0 проходит ровно две прямолинейных образующих нашего гиперболоида. $\square$

Продолжим рассуждения, начатые в доказательстве 1-й теоремы о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, для того, чтобы вывести уравнения этих прямолинейных образующих. Решим уравнение (9), используя формулу для корней квадратного уравнения с четным коэффициентом при первой степени неизвестного:

$$P = \frac{X_0 Z_0 \pm Y_0}{X_0^2 + Y_0^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q &= \frac{Z_0 - X_0 P}{Y_0} = \frac{Z_0 - \frac{(X_0 Z_0 \pm Y_0) X_0}{X_0^2 + Y_0^2}}{Y_0} = \\ &= \frac{X_0^2 Z_0 + Y_0^2 Z_0 - X_0^2 Z_0 \mp X_0 Y_0}{Y_0 (X_0^2 + Y_0^2)} = \\ &= \frac{Y_0 Z_0 \mp X_0}{X_0^2 + Y_0^2}. \end{aligned}$$

Напомним, что $R = 1$.

Параметрические уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (2)

Используя формулы (3), получаем, что параметрические уравнения прямой ℓ имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\frac{x_0 z_0}{ac} + \varepsilon \cdot \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} \cdot at, \\ y = y_0 + \dfrac{\frac{y_0 z_0}{bc} - \varepsilon \cdot \frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} \cdot bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \qquad (10)$$

где $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Для того, чтобы упростить эти уравнения, нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Эллипс, получающийся при сечении однополостного гиперболоида, заданного уравнением (1), плоскостью xOy, называется *горловым эллипсом* этого гиперболоида.

Если в уравнениях (10) положить $t = -\frac{z_0}{c}$, то мы получим $z = 0$. Таким образом, точка прямой ℓ, соответствующая указанному значению параметра t, лежит в плоскости xOy. Поскольку прямая ℓ лежит на гиперболоиде, эта точка принадлежит горловому эллипсу.

Мы видим, что справедливо следующее

Замечание о горловом эллипсе

Всякая прямолинейная образующая однополостного гиперболоида пересекает его горловой эллипс. □

Возьмем точку прямой ℓ, принадежащую горловому эллипсу, в качестве точки M_0. Тогда $z_0 = 0$. Поскольку точка M_0 принадлежит гиперболоиду, отсюда вытекает, что

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Учитывая уравнения (10), мы получаем, что уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку M_0, имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{ay_0}{b} t, \\ y = y_0 - \frac{bx_0}{a} t, \\ z = ct \end{cases} \tag{12}$$

и

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{ay_0}{b} t, \\ y = y_0 + \frac{bx_0}{a} t, \\ z = ct. \end{cases} \tag{13}$$

Поскольку горловой эллипс содержит бесконечно много точек, уравнения вида (12) и (13) задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Из доказательства 1-й теоремы о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида вытекает

Замечание о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямолинейной образующей из каждого семейства. $\square$

2-я теорема о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

Любые две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида из одного семейства скрещиваются. Две прямолинейные образующие из разных семейств параллельны, если они проходят через диаметрально противоположные точки горлового эллипса[1]*, и пересекаются в противном случае.*

Доказательство. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — различные прямолинейные образующие из одного семейства, проходящие через точки горлового эллипса $M_1(x_1, y_1, 0)$ и $M_2(x_2, y_2, 0)$ соответственно. Для определенности будем считать, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 принадлежат семейству, задаваемому уравнениями вида (12) (для семейства, задаваемого уравнениями вида (13) доказательство аналогично). Уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 можно записать так:

$$\ell_1\colon \quad \frac{x - x_1}{ay_1/b} = \frac{y - y_1}{-bx_1/a} = \frac{z}{c}, \qquad \ell_2\colon \quad \frac{x - x_2}{ay_2/b} = \frac{y - y_2}{-bx_2/a} = \frac{z}{c}.$$

[1] Две точки, лежащие на эллипсе, называются *диаметрально противоположными*, если прямая, их соединяющая, проходит через центр эллипса.

Поскольку точки M_1 и M_2 различны, по крайней мере одно из чисел $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ отлично от нуля. С учетом этого, имеем

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ \frac{ay_2}{b} & -\frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & 1 \\ \frac{ay_2}{b} & -\frac{bx_2}{a} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= c\left((x_2 - x_1)\left(-\frac{bx_1}{a} + \frac{bx_2}{a}\right) - (y_2 - y_1)\left(\frac{ay_1}{b} - \frac{ay_2}{b}\right)\right) =$$

$$= \frac{bc}{a}(x_2 - x_1)^2 + \frac{ac}{b}(y_2 - y_1)^2 \neq 0.$$

В силу теоремы о взаимном расположении прямых в пространстве (см. § 17) это означает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются.

Пусть теперь ℓ_1 и ℓ_2 — прямолинейные образующие из разных семейств, проходящие через лежащие на горловом эллипсе точки $M_1(x_1, y_1, 0)$ и $M_2(x_2, y_2, 0)$ соответственно. С учетом (12) и (13), их уравнения можно записать так:

$$\ell_1\colon \quad \frac{x - x_1}{ay_1/b} = \frac{y - y_1}{-bx_1/a} = \frac{z}{c}, \quad \ell_2\colon \quad \frac{x - x_2}{-ay_2/b} = \frac{y - y_2}{bx_2/a} = \frac{z}{c}.$$

Учитывая, что точки M_1 и M_2 лежат на гиперболоиде, получаем, что $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$. С учетом этого, имеем

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ -\frac{ay_2}{b} & \frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = c\cdot\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & 1 \\ -\frac{ay_2}{b} & \frac{bx_2}{a} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= c\left((x_2-x_1)\left(-\frac{bx_1}{a}-\frac{bx_2}{a}\right)-(y_2-y_1)\left(\frac{ay_1}{b}+\frac{ay_2}{b}\right)\right) =$$

$$= c\left(\frac{b}{a}(x_1^2-x_2^2)+\frac{a}{b}(y_1^2-y_2^2)\right) =$$

$$= abc\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)-abc\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right) =$$

$$= abc-abc=0.$$

В силу теоремы о взаимном расположении прямых в пространстве (см. § 17) это означает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости. Ясно, что они параллельны, если их направляющие векторы пропорциональны, и пересекаются в противном случае. Направляющими векторами прямых ℓ_1 и ℓ_2 являются векторы $\vec{s}_1=\left(\frac{ay_1}{b},-\frac{bx_1}{a},c\right)$ и $\vec{s}_2=\left(\frac{-ay_2}{b},\frac{bx_2}{a},c\right)$.

Взаимное расположение прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (4)

Следовательно, эти векторы пропорциональны тогда и только тогда, когда $-\frac{y_1}{y_2} = -\frac{x_1}{x_2} = 1$, т. е. когда $x_2 = -x_1$ и $y_2 = -y_1$. Поскольку прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекают горловой эллипс в точках $M_1(x_1, y_1, 0)$ и $M_2(x_2, y_2, 0)$ соответственно, получаем, что ℓ_1 и ℓ_2 параллельны, если точки M_1 и M_2 диаметрально противоположны, и пересекаются в противном случае. $\square$

Перейдем к прямолинейным образующим гиперболического параболоида. Их свойства во многом аналогичны свойствам прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Напомним, что гиперболический параболоид задается уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{14}$$

1-я теорема о прямолинейных образующих гиперболического параболоида

Через каждую точку гиперболического параболоида проходит ровно две прямолинейных образующих.

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит гиперболическому параболоиду, заданному уравнением (14), а прямая ℓ, проходящая через точку M_0, является прямолинейной образующей этого параболоида. Пусть параметрические уравнения прямой ℓ имеют вид (2). Положим

$$X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}, Z = z, X_0 = \frac{x_0}{a}, Y_0 = \frac{y_0}{b}, Z_0 = z_0, P = \frac{p}{a}, Q = \frac{q}{b} \text{ и } R = r.$$

В этих обозначениях уравнение параболоида принимает вид

$$X^2 - Y^2 = 2Z, \tag{15}$$

а уравнения прямой ℓ — вид (5). Если $q \neq 0$, то, разделив вектор $\vec{a} = (p, q, r)$ на Q, мы получим направляющий вектор прямой ℓ, вторая координата которого равна b. Поскольку нам не важно, координаты какого именно из направляющих векторов прямой ℓ стоят в правых частях уравнений (2), в дальнейшем можно считать, что либо $q = 0$, либо $q = b$, т. е. либо $Q = 0$, либо $Q = 1$. Подставим правые части уравнений (5) в уравнение (15). Получим

$$(X_0 + Pt)^2 - (Y_0 + Qt)^2 = 2(Z_0 + Rt). \tag{16}$$

С другой стороны,

$$X_0^2 - Y_0^2 = 2Z_0, \tag{17}$$

поскольку точка M_0 лежит на параболоиде. Вычтем равенство (17) из равенства (16). После очевидных преобразований, получим

$$(P^2 - Q^2)t^2 + 2(X_0P - Y_0Q - R)t = 0.$$

Поскольку все точки прямой ℓ лежат на параболоиде, последнее равенство должно выполняться для любого t.

Это возможно лишь в случае, когда

$$\begin{cases} P^2 - Q^2 = 0, \\ X_0 P - Y_0 Q - R = 0. \end{cases}$$

Если $Q = 0$, то первое из этих равенств показывает, что $P = 0$, но тогда и $R = 0$ в силу второго равенства. В этом случае $p = q = r = 0$. Но это невозможно, поскольку $\vec{a} \neq \vec{0}$. В силу сказанного выше, можно считать, что $Q = 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} P^2 = 1, \\ X_0 P - Y_0 = R. \end{cases} \tag{18}$$

Первое из этих уравнений показывает, что $P = \pm 1$. Из второго уравнения системы (18) вытекает теперь, что $R = \pm X_0 - Y_0$. Следовательно, $p = \pm a$, $q = b$ и $r = \pm\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$. Таким образом, направляющий вектор прямой ℓ может быть выбран двумя способами: $\vec{a}_1 = (a, b, \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b})$ и $\vec{a}_2 = (-a, b, -\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b})$. Следовательно, через точку M_0 проходят ровно две прямолинейных образующих. $\square$

Параметрические уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида

Прежде чем формулировать еще одну теорему о свойствах прямолинейных образующих гиперболического параболоида, заметим, что, в силу сказанного выше, уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку M_0, имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)t \end{cases} \qquad (19)$$

и

$$\begin{cases} x = x_0 - at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + \left(-\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)t. \end{cases} \qquad (20)$$

Уравнения вида (19) и (20) задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Из доказательства 1-й теоремы о прямолинейных образующих гиперболического параболоида вытекает

Замечание о прямолинейных образующих гиперболического параболоида

Через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной прямолинейной образующей из каждого семейства. □

Взаимное расположение прямолинейных образующих гиперболического параболоида (1)

2-я теорема о прямолинейных образующих гиперболического параболоида

Любые две прямолинейные образующие гиперболического параболоида из разных семейств пересекаются. Любые две прямолинейные образующие из одного семейства скрещиваются.

Доказательство. Рассмотрим прямые

$$\ell_1 : \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \quad \frac{x - x_2}{-a} = \frac{y - y_2}{b} = \frac{z - z_2}{-\frac{x_2}{a} - \frac{y_2}{b}}$$

из различных семейств прямолинейных образующих. Направляющие векторы этих прямых не коллинеарны, так как $\frac{a}{-a} \neq \frac{b}{b}$. Поэтому для того, чтобы проверить, что они пересекаются, достаточно убедиться в том, что они лежат в одной плоскости.

Взаимное расположение прямолинейных образующих гиперболического параболоида (2)

В самом деле, учитывая, что точки с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) лежат на параболоиде, и потому $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 2z_1$ и $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 2z_2$, имеем

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} \\ -a & b & -\frac{x_2}{a} - \frac{y_2}{b} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\Big(-\frac{b}{a} \cdot x_2 - y_2 - \frac{b}{a} \cdot x_1 + y_1\Big) -$$

$$- (y_2 - y_1)\Big(-x_2 - \frac{a}{b} \cdot y_2 + x_1 - \frac{a}{b} \cdot y_1\Big) + (z_2 - z_1) \cdot 2ab =$$

$$= \frac{b}{a}(x_1^2 - x_2^2) - x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1 -$$

$$- \frac{a}{b}(y_1^2 - y_2^2) + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_1 + 2ab(z_2 - z_1) =$$

$$= ab\Big(\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} + 2z_2 - 2z_1\Big) =$$

$$= ab\Big(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 2z_1\Big) - ab\Big(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 2z_2\Big) =$$

$$= ab \cdot 0 - ab \cdot 0 = 0 - 0 = 0.$$

В силу теоремы о взаимном расположении прямых в пространстве (см. § 17) прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости.

Взаимное расположение прямолинейных образующих гиперболического параболоида (3)

Пусть теперь ℓ_1 и ℓ_2 — различные прямолинейные образующие из одного семейства. Предположим, что они лежат в одной плоскости. Обозначим эту плоскость через π. Пусть M — произвольная точка, лежащая на нашем параболоиде. В силу замечания о прямолинейных образующих гиперболического параболоида через точку M проходит по одной прямолинейной образующей из каждого семейства. Пусть ℓ — прямолинейная образующая, проходящая через M и входящая не в то семейство, к которому принадлежат прямые ℓ_1 и ℓ_2. Как мы уже доказали, любые две прямолинейные образующие из разных семейств пересекаются. Следовательно, прямая ℓ пересекает каждую из прямых ℓ_1 и ℓ_2, а значит, лежит в плоскости π. В частности, $M \in \pi$. Поскольку M — произвольная точка, лежащая на параболоиде, мы получаем что весь параболоид лежит в плоскости π, что, очевидно, неверно. Следовательно, прямые ℓ_1 и ℓ_2 не лежат в одной плоскости, т. е. скрещиваются. $\square$

Общие уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (1)

Выше мы уже получили параметрические уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. Но для того, чтобы их написать, надо знать координаты хотя бы одной точки, лежащей на этой поверхности. Покажем, как можно найти общие уравнения прямолинейных образующих, не имея этой информации. Начнем с однополостного гиперболоида.

Уравнение (1) можно переписать в виде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$ или

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right). \qquad (21)$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad (22)$$

где α и β — действительные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля. Каждое из уравнений этой системы задает плоскость. Главные векторы этих плоскостей равны $\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, -\frac{\alpha}{c}\right)$ и $\left(\frac{\beta}{a}, -\frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c}\right)$ соответственно. Если эти векторы пропорциональны, то $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$, откуда $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ вопреки выбору чисел α и β. Это значит, что плоскости пересекаются (см. теорему о взаимном расположении плоскостей в § 16). Следовательно, геометрический образ системы (22) — прямая.

Если $\alpha, \beta \neq 0$, то, почленно перемножив уравнения системы (22) и сократив на $\alpha\beta$, получим уравнение (21). Если $\beta = 0$, а $\alpha \neq 0$, то система (22) равносильна совокупности уравнений $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$, $y = -b$. Очевидно, что если координаты точки удовлетворяют этим двум уравнениям, то они удовлетворяют и уравнениям (21). Легко проверить, что то же верно и в случае, когда $\beta \neq 0$, а $\alpha = 0$. Таким образом, в любом случае прямая, задаваемая уравнениями (22), лежит на однополостном гиперболоиде, т. е. является его прямолинейной образующей.

Аналогично проверяется, что система уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{23}$$

где α и β — действительные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля, также задает прямолинейную образующую однополостного гиперболоида.

Системы (22) и (23) задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. При этом семейство прямолинейных образующих, задаваемое системой (22), совпадает с семейством, задаваемым уравнениями (12), а семейство, задаваемое системой (23), — с семейством, задаваемым уравнениями (13). Мы проверим это утверждение на примере систем (22) и (12), для другой пары систем оно проверяется аналогично.

Пусть ℓ — прямая, заданная уравнениями (22), где $\beta \neq 0$ (случай, когда $\beta = 0$, разбирается вполне аналогично, при этом все выкладлки существенно упрощаются). Разделим обе части каждого из уравнений (22) на β. Получим систему

$$\begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \gamma\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{24}$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$. В силу замечания о горловом эллипсе прямая ℓ содержит точку $M_0(x_0, y_0, 0)$, лежащую на этом эллипсе. Подставим координаты точки M_0 в первое из уравнений системы (24). Получим $\frac{\gamma x_0}{a} = 1 + \frac{y_0}{b} = \frac{b+y_0}{b}$, откуда $\gamma = \frac{a(b+y_0)}{bx_0}$. Подставим это значение γ в уравнения (24).

Полученные уравнения можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{b+y_0}{bx_0}\cdot x - \frac{1}{b}\cdot y - \frac{a(b+y_0)}{bcx_0}\cdot z - 1 = 0, \\ \frac{1}{a}\cdot x + \frac{a(b+y_0)}{b^2x_0}\cdot y + \frac{1}{c}\cdot z - \frac{a(b+y_0)}{bx_0} = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Проверим, что вектор $\vec{s} = \left(\frac{ay_0}{b}, -\frac{bx_0}{a}, c\right)$ является направляющим вектором прямой, задаваемой уравнениями (25). Этого достаточно для наших целей, поскольку именно такой направляющий вектор имеет прямая, задаваемая уравнениями (12). Каждое из уравнений системы (25) задает плоскость. Обозначим плоскости, задаваемые первым и вторым из уравнений этой системы через π_1 и π_2 соответственно, а нормальные векторы этих плоскостей — через $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ соответственно. Чтобы доказать нужный нам факт, достаточно установить, что вектор $\vec{s}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ (так как это будет означать, что он коллинеарен каждой из плоскостей π_1 и π_2, а значит и прямой, по которой эти плоскости пересекаются). В самом деле, ясно, что

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{b+y_0}{bx_0}, -\frac{1}{b}, -\frac{a(b+y_0)}{bcx_0}\right) \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = \left(\frac{1}{a}, \frac{a(b+y_0)}{b^2x_0}, \frac{1}{c}\right).$$

Учитывая, что координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям (11), имеем:

$$\vec{s}\vec{n}_1 = \frac{ay_0(b+y_0)}{b^2x_0} + \frac{bx_0}{ab} - \frac{ac(b+y_0)}{bcx_0} = \frac{ay_0}{bx_0} + \frac{ay_0^2}{b^2x_0} + \frac{x_0}{a} - \frac{a}{x_0} - \frac{ay_0}{bx_0} =$$
$$= \frac{a}{x_0}\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} - 1\right) = \frac{a}{x_0} \cdot 0 = 0$$

и

$$\vec{s}\vec{n}_2 = \frac{ay_0}{ab} - \frac{ab(b+y_0)x_0}{ab^2x_0} + \frac{c}{c} = \frac{y_0}{b} - \frac{b+y_0}{b} + 1 = \frac{y_0}{b} - 1 - \frac{y_0}{b} + 1 = 0.$$

Требуемое утверждение доказано.

Общие уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида (1)

Перейдем к гиперболическому параболоиду. Пусть гиперболический параболоид задан уравнением (14). Легко проверяется, что системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2\beta, \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = \alpha z, \end{cases} \tag{26}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq 0$, и

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = \beta z, \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2\alpha, \end{cases} \tag{27}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\beta \neq 0$, задают прямые, лежащих на нашем параболоиде.

Системы (26) и (27) при указанных ограничениях на α и β задают два бесконечных семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида. При этом семейство прямолинейных образующих, задаваемое системой (26), совпадает с семейством, задаваемым уравнениями (19), а семейство, задаваемое системой (27), — с семейством, задаваемым уравнениями (20). Мы проверим это утверждение на примере систем (26) и (19), для другой пары систем оно проверяется аналогично.

Общие уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида (2)

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — та точка, лежащая на нашем параболоиде, координаты которой входят в уравнения (26), ℓ — прямолинейная образующая, проходящая через точку M_0, $\vec{s} = \left(a, b, \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)$ — ее направляющий вектор, а $\vec{n}_1 = \left(\frac{\alpha}{a}, -\frac{\alpha}{b}, 0\right)$ и $\vec{n}_2 = \left(\frac{\beta}{a}, \frac{\beta}{b}, -\alpha\right)$ — нормальные векторы плоскостей, заданных первым и вторым из уравнений системы (26) соответственно. Как и в случае однополостного гиперболоида, достаточно установить, что вектор $\vec{s}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. В самом деле, учитывая, что координаты точки M_0 удовлетворяют первому из уравнений системы (19), имеем: $\vec{s}\vec{n}_1 = \alpha - \alpha = 0$ и $\vec{s}\vec{n}_2 = \beta + \beta - \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\alpha = 0$, что и требовалось доказать.