§ 7. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В этом параграфе излагается метод решения произвольной системы линейных уравнений, известный под названием *метода Гаусса* (его называют также *методом последовательного исключения неизвестных*). Метод Гаусса можно реализовывать двумя способами — на языке линейных уравнений и на языке матриц. Мы изложим второй из этих способов. В дальнейшем мы постоянно будем использовать этот метод при решении самых разных задач.

- Метод Гаусса назван в честь великого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса, жившего с 1777 по 1855 г. Хотя это название и является общепринятым, Гаусс не является его автором: метод был известен задолго до него. Первое его описание имеется в китайском трактате «Математика в девяти книгах», который составлен между II в. до н. э. и I в. н. э. и представляет собой компиляцию более ранних трудов, написанных в X–II вв. до н. э.

Определение

Пусть R — произвольное кольцо. *Матрицей* над кольцом R называется прямоугольная таблица, составленная из элементов этого кольца, которые мы будем называть *скалярами*. Если матрица содержит m строк и n столбцов, то будем говорить, что она имеет *размер* $m \times n$. Множество всех матриц размера $m \times n$ над кольцом R обозначается через $R^{m \times n}$. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. В этом случае вместо термина «матрица размера $n \times n$», как правило, употребляется термин *квадратная матрица порядка* n. Скаляры, из которых составлена матрица, называются *элементами* матрицы.

Для обозначения элементов матриц применяется двойная индексация, при этом первый индекс означает номер строки, а второй — номер столбца, в которых стоит данный элемент. Произвольная матрица размера $m \times n$ обозначается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко эта матрица записывается в виде $A = (a_{ij})$.

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (1), а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

— *расширенной матрицей* этой системы.

В расширенной матрице системы каждая строка соответствует какому-то уравнению, каждый столбец, кроме последнего, — это набор коэффициентов при некотором неизвестном в различных уравнениях системы, а последний столбец — это совокупность свободных членов системы (мы так и будем называть его: *столбец свободных членов*). Таким образом,

- расширенная матрица системы содержит в себе полную информацию о системе.

Иными словами, не только по системе линейных уравнений однозначно выписывается ее расширенная матрица, но и наоборот, по произвольной матрице A, содержащей более одного столбца[1], однозначно восстанавливается система линейных уравнений, расширенной матрицей которой является матрица A.

Определение

Мы будем говорить, что система (1) *соответствует* матрице (2).

[1] Эта оговорка необходима, так как требуется один столбец для свободных членов и как минимум один столбец для коэффициентов при неизвестных.

Общая схема метода Гаусса

Приступим к изложению метода Гаусса. В самом общем виде его можно описать как последовательность из следующих четырех шагов:

1) записываем расширенную матрицу данной системы линейных уравнений
2) с помощью некоторых преобразований (называемых *элементарными преобразованиями матрицы*) приводим эту матрицу к некоторому специальному виду (так называемой *ступенчатой* матрице);
3) восстанавливаем систему, соответствующую полученной ступенчатой матрице;
4) решаем систему, полученную на предыдущем шаге.

При этом оказывается, что:

(i) общее решение системы, соответствующей полученной ступенчатой матрице, совпадает с общим решением исходной системы;

(ii) система, соответствующая произвольной ступенчатой матрице, решается легко.

Шаги 1) и 3) тривиальны и мы их далее комментировать не будем (отметим, что при решении конкретных задач шаг 3), как правило, в явном виде не осуществляют).

Определение

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание или добавление нулевой строки.

Определение

Матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

- Очевидно, что отношение «быть эквивалентными» на множестве всех матриц рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Определение

Системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют одно и то же общее решение.

- Отношение равносильности на множестве всех систем линейных уравнений, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Следующее несложно проверяемое утверждение принципиально важно, так как оно обосновывает корректность метода Гаусса.

Предложение о корректности метода Гаусса

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований типов 1)–3) и 5), то системы линейных уравнений, соответствующие матрицам A и B равносильны.

Доказательство предложения приведено на двух следующих слайдах.

Обоснование корректности метода Гаусса (2)

Доказательство. Договоримся называть систему линейных уравнений, соответствующую матрице A, старой, а систему, соответствующую матрице B, — новой. Достаточно рассмотреть случай, когда матрица B получена из A с помощью одного элементарного преобразования. В зависимости от типа этого преобразования возможны 4 случая.

Случай 1: *B получена из A умножением i-й строки на ненулевой скаляр t.* В этом случае новая система получена из старой умножением i-го уравнения на t. Ясно, что всякое решение старой системы является решением новой. Поскольку старая система получается из новой умножением i-го уравнения на ненулевой скаляр $\frac{1}{t}$, верно и обратное утверждение.

Случай 2: *B получена из A прибавлением j-й строки к i-й.* Поскольку сумма двух верных равенств является верным равенством, всякое решение старой системы является решением новой. Далее, матрицу A можно получить из матрицы B выполнением трех элементарных преобразований — сначала умножаем j-ю строку матрицы B (совпадающую с j-й строкой матрицы A!) на -1, затем прибавляем полученную строку к i-й строке матрицы B, и, наконец, еще раз умножаем j-ю строку матрицы B на -1. В силу сказанного выше, всякое решение новой системы является и решением старой.

Случай 3: *B получена из A перестановкой строк.* В этом случае системы, соответствующие матрицам A и B, различаются лишь порядком записи уравнений, что, очевидно, не влияет на общее решение системы.

Случай 4: *B получена из A вычеркиванием или добавлением нулевой строки.* Это означает, что новая система получена из старой вычеркиванием или добавлением «тривиального» уравнения, т. е. уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$. Очевидно, что эта операция никак не может повлиять на общее решение системы. $\square$

В предложении о корректности метода Гаусса не упоминается об элементарном преобразовании типа 4) (перестановке столбцов). Дело в том, что если при элементарных преобразованиях расширенной матрицы системы переставить местами последний столбец матрицы с некоторым другим ее столбцом, то система, соответствующая полученной матрице, может оказаться не равносильной исходной системе. Как мы увидим ниже, при приведении матрицы к ступенчатому виду всегда можно обойтись без этого элементарного преобразования. Но исключать его из числа элементарных преобразований невыгодно, так как им бывает удобно пользоваться при решении задач, не связанных с решением систем линейных уравнений.

Введем понятие, которое будет играть важную роль в дальнейшем.

Определение

Матрица называется *ступенчатой*, если выполнены следующие два условия:

1) если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки;
2) если некоторая строка матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые.

Произвольная ступенчатая матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
0 \ \ldots \ 0 & * & & & & \\
0 \ \ldots\ldots\ldots \ 0 & & * & & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \ddots & & \\
0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 0 & & & & * & \\
0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 0 & & & & & * \\
0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 0 & & & & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\
0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 0 & & & & &
\end{pmatrix}.$$

Элементы, обозначенные звездочками, не должны быть равны 0. Напротив, все элементы, стоящие в «серой зоне» (левее и ниже синей ломаной линии), обязаны быть равны 0. Элементы, стоящие выше ломаной (кроме тех, что обозначены звездочками), могут быть любыми. Нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть.

- Ломаная линия, ограничивающая сверху «нулевую часть» ступенчатой матрицы имеет вид ступенек. Именно этим объясняется термин «ступенчатая матрица».

Если переходить от ненулевой строки ступенчатой матрицы к следующей за ней ненулевой строке (до тех пор, пока это возможно), то мы каждый раз будем сдвигаться ровно на одну строку вниз и на, вообще говоря, произвольное число столбцов вправо. Следовательно, справедливо

Замечание о числе строк и столбцов в ступенчатой матрице

В любой ступенчатой матрице число ненулевых строк не превышает числа столбцов. □

На следующем слайде приводится алгоритм, который показывает, что произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду. В нем используется следующее понятие.

Определение

Матрица, все элементы которой равны 0, называется *нулевой* и обозначается буквой O.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду

Пусть A — произвольная матрица. Можно считать, что $A \neq O$, так как нулевая матрица является ступенчатой. Выберем в A самый левый ненулевой столбец (обозначим его номер через j), а в этом столбце — самый верхний ненулевой элемент (обозначим этот элемент через x, а номер строки, в которой он стоит, — через i). Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-ю строки. Если в j-м столбце есть ненулевой элемент y, стоящий в k-й строке, где $k > 1$, прибавим к k-й строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. После этого в k-й строке и j-м столбце будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Действуя таким образом, обнулим в j-м столбце все элементы, расположенные ниже первой строки. Если после этого ниже первой строки и правее j-го столбца все элементы будут равны 0, то полученная матрица является ступенчатой. В противном случае повторим все описанные выше действия применительно к той части полученной матрицы, которая расположена ниже первой строки и правее j-го столбца. В результате заполненная нулями зона в левой нижней части матрицы продвинется на одну строку вниз и как минимум на один столбец вправо. Будем продолжать эти действия. Рано или поздно этот процесс оборвется, так как число строк и столбцов в матрице конечно. Полученная матрица будет ступенчатой.

Комментарий 1. В алгоритме приведения матрицы к ступенчатому виду упоминается о прибавлении к k-й строке, умноженной на x, первой строки, умноженной на $-y$. Заметим, что фактически речь здесь идет о последовательности из четырех элементарных преобразований: сначала мы умножаем первую строку на $-y$, затем умножаем k-ю строку на x, затем прибавляем первую строку к k-й, и, наконец, умножаем первую строку на $-\frac{1}{y}$ (возвращая ее в исходное состояние).

Комментарий 2. В алгоритме приведения матрицы к ступенчатому виду используются только первые три элементарных преобразования. Таким образом, при приведении матрицы к ступенчатому виду можно обойтись не только без перестановки столбцов (что принципиально важно с точки зрения предложения о корректности метода Гаусса), но и без вычеркивания или добавления нулевых строк[2]. Но совсем отказываться от возможности применить последнее элементарное преобразование невыгодно: вместо того, чтобы, строго придерживаясь алгоритма приведения матрицы к ступенчатому виду, «сбрасывать» нулевые строки в нижнюю часть матрицы, их можно вычеркивать, тем самым экономя время и место (а при компьютерной реализации метода Гаусса — объем используемой памяти).

[2] Более того, как мы увидим в § 27, третье преобразование (перестановку строк) также можно не использовать.

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай несовместной системы

Для того, чтобы завершить изложение метода Гаусса, нам осталось объяснить, как искать общее решение системы линейных уравнений, соответствующей ступенчатой матрице. Здесь возможны три случая.

Случай 1: ступенчатая матрица содержит строку, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент нулю не равен. Эта строка соответствует уравнению вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$. Ясно, что это уравнение, а значит и произвольная система, его содержащая, решений не имеет. Учитывая предложение о корректности метода Гаусса, получаем, что

- *в рассматриваемом случае система несовместна.*

Для удобства будем называть строки матрицы, в которых все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент нулю не равен, *плохими*. Заметим, что

- если при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду плохая строка возникла в тот момент, когда матрица еще не является ступенчатой, то продолжать преобразования не имеет смысла, так как уже в этот момент стало ясно, что система несовместна.

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: переход к двум оставшимся случаям

- *Всюду в дальнейшем мы будем считать, что при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду плохих строк не возникло и мы довели матрицу до ступенчатого вида.*

Определение

Совокупность всех столбцов расширенной матрицы системы, кроме ее последнего столбца, мы будем называть *основной частью* расширенной матрицы.

В силу замечания о числе строк и столбцов в ступенчатой матрице возможны два случая: в основной части полученной ступенчатой матрицы число ненулевых строк либо равно числу столбцов, либо меньше этого числа.

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай определенной системы

Случай 2: число ненулевых строк ступенчатой матрицы равно числу столбцов в ее основной части. Вычеркнем из матрицы нулевые строки (если они в ней есть). Система линейных уравнений, соответствующая полученной матрице, имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad\;\; a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$. Из последнего уравнения этой системы находим x_n: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. После этого из предпоследнего уравнения находим x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n}{a_{n-1\,n-1}}.$$

Продолжая двигаться по системе снизу вверх, мы из третьего с конца уравнения найдем x_{n-2}, из четвертого с конца — x_{n-3}, ..., наконец, из первого — x_1. На каждом шаге очередное неизвестное определяется однозначно. Следовательно,

- *в рассматриваемом случае система имеет единственное решение.*

Случай 3: число ненулевых строк ступенчатой матрицы меньше числа столбцов в ее основной части. Вычеркнем из матрицы нулевые строки (если они в ней есть). Система линейных уравнений, соответствующая полученной матрице, может быть схематично записана в виде

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = b_1, \\ \qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \dots\dots\dots\dots\dots = b_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mi_m}x_{i_m} + \cdots = b_m, \end{cases}$$

где $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ и $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{mi_m} \neq 0$. При этом в систему входит как минимум одна неизвестная, отличная от x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}, так как в противном случае число ненулевых строк было бы равно числу столбцов в основной части матрицы. Перенесем все неизвестные, кроме x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}, в правые части равенств с обратным знаком. Получим систему, которую можно схематично записать в виде

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \dots\dots\dots\dots\dots = b_1 - \cdots, \\ \qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \dots\dots\dots = b_2 - \cdots, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mi_m}x_{i_m} = b_m - \cdots. \end{cases} \tag{3}$$

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай неопределенной системы (2)

Переменные, входящие в правые части уравнений системы (3), называются *свободными*, а переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ — *основными* или *связанными*. Придадим свободным переменным произвольные значения, подставим их в систему (3) и обозначим правые части полученных равенств через b'_1, $b'_2, \ldots, b'_m$. Получим систему m линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b'_1, \\ \qquad\qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{mi_m}x_{i_m} = b'_m. \end{cases}$$

В ступенчатой матрице, соответствующей этой системе, число ненулевых строк равно числу столбцов в основной части матрицы. Как мы видели выше при рассмотрении случая 2, эта система имеет единственное решение. Найдя его и объединив полученные значения переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ с теми значениями, которые мы подставили вместо свободных переменных в правые части системы (3), мы найдем одно частное решение исходной системы. Ясно, что система имеет более одного решения. Таким образом,

- *в рассматриваемом случае система является неопределенной.*

Остается понять, как в рассматриваемом случае можно записать общее решение системы. Для простоты обозначений будем считать, что свободными являются переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$, а связанными — переменные $x_{m+1}, \dots, x_n$. Иными словами, будем считать, что система (3) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1\,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2\,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mm}x_m = b_m - a_{m\,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Пусть $k = n - m$. Положим $x_{m+1} = c_1$, $x_{m+2} = c_2$, ..., $x_n = c_k$, где $c_1, c_2, \dots, c_k$ — произвольные константы. Из последнего уравнения системы (4) имеем $x_m = \frac{b_m - a_{m\,m+1}c_1 - \dots - a_{mn}c_k}{a_{mm}}$. Подставив правую часть этого равенства вместо x_m в предпоследнее уравнение системы (4), мы сможем выразить x_{m-1} через $c_1, c_2 \dots, c_k$. Продолжая двигаться по системе (4) снизу вверх, мы последовательно выразим через эти константы переменные $x_{m-2}, \dots, x_1$. Объединив полученные равенства, выражающие переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ через константы $c_1, c_2, \dots, c_k$, с равенствами $x_{m+1} = c_1$, ..., $x_n = c_k$, мы получим запись общего решения системы.

Таким образом, общее решение неопределенной системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 & = f_1(c_1, c_2, \ldots, c_k), \\ x_2 & = f_2(c_1, c_2, \ldots, c_k), \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ x_m & = f_m(c_1, c_2, \ldots, c_k), \\ x_{m+1} & = c_1, \\ x_{m+2} & = c_2, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ x_n & = c_k, \end{cases} \qquad (5)$$

где $f_1(c_1, c_2, \ldots, c_k), f_2(c_1, c_2, \ldots, c_k), \ldots, f_m(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ — выражения для переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ через константы $c_1, c_2, \ldots, c_k$, способ получения которых описан на предыдущем слайде. Равенства (5) называются *координатной записью* общего решения системы линейных уравнений. Другой способ записи общего решения системы будет указан в конце § 28.

Мы видим, что каждая из свободных переменных независимо от других может принимать любое значение из поля F. Таким образом,

- *если поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений, а если оно конечно, то система имеет $|F|^k$ решений, где k — число свободных переменных.*

Из сказанного при рассмотрении случая 3 вытекает важный для дальнейшего вывод:

Замечание о числе свободных переменных

Если система линейных уравнений является неопределенной, то число ее свободных переменных равно $n - m$, где n — число столбцов в основной матрице системы (или, что то же самое, число неизвестных в системе), а m — число ненулевых строк в матрице, полученной из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду. □

- Расширенную матрицу системы можно привести к ступенчатому виду многими разлмчными способами, причем полученные ступенчатые матрицы могут различаться. Возникает вопрос: однозначно ли определено число свободных переменных в системе. Иначе говоря, верно ли, что приводя матрицу к ступенчатому виду различными способами, мы всегда будем получать ступенчатые матрицы с одним и тем же числом ненулевых строк. Ответ на этот вопрос положителен, но доказать мы это сможем только в § 27 (это вытекает из приводимого там доказательства теоремы о ранге матрицы).

Если решать методом Гаусса однородную систему линейных уравнений, то последний столбец расширенной матрицы системы на всех этапах будет нулевым. Переписывать его все время нет никакого смысла. Поэтому

- при решении однородных систем, как правило, выписывают и приводят к ступенчатому виду основную матрицу системы, а при нахождении общего решения «вспоминают», что в матрице неявно присутствует еще последний нулевой столбец.

Замечание о существовании ненулевого решения однородной системы

Если в однородной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Доказательство. Запишем основную матрицу системы и приведем ее к стенчатому виду. В исходной матрице число строк равно числу уравнений, а число столбцов — числу неизвестных. По условию первое число меньше второго. При приведении матрицы к ступенчатому виду число ее ненулевых строк может разве что уменьшиться. Следовательно, и в полученной ступенчатой матрице число ненулевых строк будет меньше числа столбцов. Иными словами, мы попадаем в условия рассмотренного выше случая 3, в котором исходная система имеет более одного решения. Все эти решения, кроме одного, являются ненулевыми. □

Введем в рассмотрение несколько новых типов матриц, которые часто будут возникать в дальнейшем по самым разным поводам.

Определения

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют ее *главную диагональ*. Квадратная матрица называется: *верхнетреугольной* [*нижнетреугольной*], если все ее элементы, расположенные ниже [выше] главной диагонали, равны 0; *треугольной*, если она либо верхнетреугольна, либо нижнетреугольна; *диагональной*, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны 0. Диагональная матрица, в которой все элементы на главной диагонали равны 1, называется *единичной* и обозначается буквой E.

Ниже последовательно (слева направо) изображены произвольная верхнетреугольная, произвольная диагональная и единичная матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса–Жордана: идея

Мы переходим к изложению модификации метода Гаусса, которая называется *методом Гаусса–Жордана*.

Обозначим через A матрицу, полученную из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду, а через B — матрицу, полученную из A вычеркиванием нулевых строк, последнего столбца (содержащего свободные члены) и столбцов, соответствующие свободным переменным (если они существуют). Из замечания о числе свободных переменных вытекает, что матрица B квадратна. Кроме того, она верхнетреугольна, поскольку, очевидно, всякая квадратная ступенчатая матрица верхнетреугольна. Для краткости будем называть матрицу B *базовой частью* матрицы A. Идея метода Гаусса–Жордана состоит в том, что

- после приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду можно продолжить элементарные преобразования и довести базовую часть матрицы сначала до диагонального, а затем и до единичного вида. После этого общее решение системы находится очень легко.

В самом деле, предположим, что расширенная матрица системы приведена к ступенчатому виду. Обозначим число ее ненулевых строк через n, а число столбцов в ее основной части — через m. В силу замечания о числе строк и столбцов в ступенчатой матрице $n \geqslant m$. Вычеркнем из матрицы все нулевые строки. Будем считать, что базовая часть матрицы занимает первые m столбцов в основной части матрицы (этого всегда можно добиться, переставив при необходимости столбцы в основной части матрицы). При этом на главной диагонали базовой части все элементы не равны 0. К каждой строке матрицы, кроме m-й, можно прибавить m-ю строку, умноженную на подходящее число (свое для каждой строки), таким образом, чтобы все элементы m-го столбца выше m-й строки оказались равны 0. После этого аналогичным образом, за счет $(m-1)$-й строки, можно обнулить все элементы $(m-1)$-го столбца, стоящие выше $(m-1)$-й строки. Продолжая этот процесс и двигаясь снизу вверх и справа налево (в отличие от «прямого хода» в методе Гаусса, когда мы, приводя матрицу к ступенчатому виду, двигались сверху вниз и слева направо), мы в конце концов добъемся того, что базовая часть станет диагональной матрицей с ненулевыми элементами на главной диагонали. Разделив после этого i-ю строку на элемент a_{ii} (для всех $i = 1, 2, \ldots, m$), мы приведем базовую часть к единичному виду.

Для простоты обозначений будем далее считать, что столбцы в основной части матрицы не переставлялись и потому столбцы в базовой части соответствуют неизвестным $x_1, \dots, x_m$. Рассмотрим сначала случай, когда $n > m$. Ясно, что мы находимся в условиях рассмотренного выше случая 3, и потому система является неопределенной. Она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \qquad + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Переменные $x_1, \dots, x_m$ являются основными, а переменные $x_{m+1}, \dots, x_n$ — свободными. Положим $k = n - m$. Перенося слагаемые, содержащие свободные переменные, в правые части уравнений и полагая $x_{m+1} = c_1$, $\dots$, $x_n = c_k$, получаем координатную запись общего решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1\,m+1}c_1 - \cdots - a_{1n}c_k, \\ x_2 = b_2 - a_{2\,m+1}c_1 - \cdots - a_{2n}c_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = b_m - a_{m\,m+1}c_1 - \cdots - a_{mn}c_k, \\ x_{m+1} = c_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_k. \end{cases}$$

Предположим теперь, что $n = m$, т. е. что после описанных выше действий базовая часть матрицы совпадает с ее основной частью. В этом случае мы находимся в условиях рассмотренного выше случая 2, и потому система имеет единственное решение. Она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad = b_1, \\ \quad x_2 \qquad\quad\;\; = b_2, \\ \qquad\quad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\; x_n = b_n. \end{cases}$$

Ясно, что с содержательной точки зрения это не система линейных уравнений, а ее (единственное) решение. Исходя из этого, получаем следующий алгоритм, на котором в дальнейшем будут основаны алгоритмы решения некоторых важных задач.

Алгоритм нахождения решения системы линейных уравнений, имеющей единственное решение

Пусть дана система линейных уравнений, имеющая единственное решение. Запишем ее расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований всей матрицы приведем ее основную часть к единичному виду (в рассматриваемом случае это всегда можно сделать). В этот момент в последнем столбце расширенной матрицы будет стоять (единственное) решение системы.