§ 8. Определители

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В § 3 было введено понятие перестановки из n элементов, а в § 4 — понятие подстановки на (вообще говоря, произвольном) множестве. Если $S = \{1, 2, \dots, n\}$, то всякую подстановку φ на S можно изобразить в виде матрицы размера $2 \times n$:

$$\varphi\colon \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Между множествами всех перестановок и всех подстановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ существует очевидная биекция, которая перестановке $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$ ставит в соответствие подстановку (1). Поэтому из следствия о числе перестановок (см. § 3) вытекает, что

- *число подстановок на множестве* $\{1, 2, \dots, n\}$ *равно* $n!$.

Множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначается так же, как и группа подстановок на этом множестве, т. е. через $\mathbf{S}_n$.

Напомним, что если $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то через $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ обозначается число инверсий в этой перестановке.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над полем F. *Определителем* (или *детерминантом*) матрицы A называется скаляр, который обозначается через $|A|$ или $\det A$ и вычисляется по формуле

$$|A| = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbf{S}_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} x_{1i_1} x_{2i_2} \cdots x_{ni_n}. \tag{2}$$

Ясно, что слагаемое $x_{1i_1} x_{2i_2} \cdots x_{ni_n}$ в правой части равенства (2) берется со знаком плюс, если перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четна, и со знаком минус, если эта перестановка нечетна. Из следствия о числе [не]четных перестановок (см. § 3) вытекает, что

- *определитель матрицы A равен алгебраической сумме $n!$ слагаемых, половина из которых берется со знаком плюс, а половина — со знаком минус; каждое слагаемое есть произведение n элементов матрицы, по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца.*

Для удобства изложения договоримся называть элементами, строками, столбцами и порядком определителя квадратной матрицы A, соответственно, элементы, строки, столбцы и порядок этой матрицы. Посмотрим, к чему приводит определение, данное на предыдущем слайде, при $n = 1, 2, 3$.

Определители 1-го порядка. Пусть $A = (a_{11})$ — квадратная матрица 1-го порядка. На множестве $\{1\}$ существует только одна перестановка, а именно — тривиальная перестановка (1). Число инверсий в этой перестановке равно 0, следовательно она четна. В силу формулы (2) имеем: $|A| = a_{11}$. Иными словами,

- *определитель 1-го порядка равен единственному элементу этого определителя.*

Определение

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ образуют ее *побочную диагональ*.

В следующей матрице побочная диагональ выделена красным цветом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & \color{red}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \color{red}{a_{2\,n-1}} & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1\,1} & \color{red}{a_{n-1\,2}} & \ldots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ \color{red}{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определители 2-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 2-го порядка. На множестве $\{1, 2\}$ существует ровно две перестановки: $(1, 2)$ и $(2, 1)$. Первая из них четна (число инверсий равно 0), вторая нечетна (число инверсий равно 1). Следовательно, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Таким образом,

- *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали минус произведение элементов на побочной диагонали.*

Определители 3-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 3-го порядка. На множестве $\{1, 2, 3\}$ существует $3! = 6$ перестановок:

$(1, 2, 3)$ — 0 инверсий, перестановка четна,

$(2, 3, 1)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 1, 2)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 2, 1)$ — 3 инверсии, перестановка нечетна,

$(2, 1, 3)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна,

$(1, 3, 2)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна.

Следовательно,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. На следующем слайде мы укажем правило, позволяющее ее запомнить. Чтобы его сформулировать, заметим, что определитель 3-го порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На рис. 1 изображены два экземпляра определителя квадратной матрицы 3-го порядка. Элементы матрицы изображены точками.

Линии соединяют те элементы, которые при вычислении определителя перемножаются, при этом красным цветом соединены элементы, произведение которых подсчитывается со знаком плюс, а синим — элементы, произведение которых подсчитывается со знаком минус.

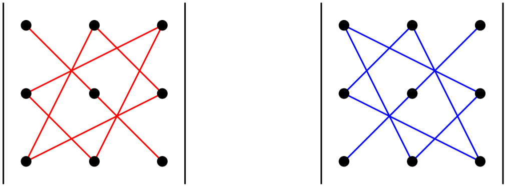

Рис. 1. Правило треугольников

Мы видим, что справедливо следующее

Правило треугольников

Со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Введем одно важное для дальнейшего понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Матрицей, *транспонированной* к A, называется матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$, определяемая равенством $b_{ij} = a_{ji}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Иными словами, матрица B получается из A заменой строк на столбцы: первая строка матрицы A становится первым стобцом матрицы B, вторая строка матрицы A — вторым стобцом матрицы B и т. д. Матрица, транспонированная к A обозначается через $A^\top$.

Очевидно, что

- матрица, транспонированная к квадратной, является квадратной матрицей того же порядка, что и исходная матрица.

Перейдем к изложению свойств определителей.

1-е свойство определителей (инвариантность относительно транспонирования)

При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица. Как $|A|$, так и $|A^\top|$ являются алгебраическими суммами всевозможных слагаемых вида $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, причем всякое такое слагаемое входит как и в $|A|$, и в $|A^\top|$ с одним и тем же знаком, определяемым четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $|A| = |A^\top|$. $\square$

Из инвариантности определителя относительно транспонирования вытекает следующий неформальный

Принцип равоправия строк и столбцов

Любое свойство определителей, формулируемое в терминах строк матрицы, останется справедливым, если слово «строка» заменить словом «столбец».

!! С учетом этого принципа, *все последующие свойства определителей формулируются только для строк, но использоваться будут как для строк, так и для столбцов.*

Умножение строки на скаляр. Наличие нулевой строки

Во всех последующих свойствах определителей $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица произвольного порядка n над произвольным полем F.

2-е свойство определителей (однородность относительно строки)

Если все элементы некоторой строки матрицы A умножить на один и тот же скаляр, то ее определитель умножится на тот же самый скаляр.

Доказательство. Предположим, что мы умножаем k-ю строку матрицы на скаляр t. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда

$$|A'| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} (ta_{ki_k}) a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= t \cdot \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} = t|A|,$$

что и требовалось доказать. □

Применяя предыдущее свойство в случае, когда строка умножается на 0, немедленно получаем

3-е свойство определителей

Если матрица A содержит нулевую строку, то ее определитель равен 0. □

4-е свойство определителей

Если две строки матрицы A поменять местами, то ее определитель умножится на -1.

Доказательство. Предположим, что мы поменяли местами k-ю и m-ю строки матрицы A, причем $k < m$. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда при переходе от $|A|$ к $|A'|$ всякое слагаемое вида

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} a_{ki_k} a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{m-1\,i_{m-1}} a_{mi_m} a_{m+1\,i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

заменится на равное ему по модулю слагаемое

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} a_{mi_m} a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{m-1\,i_{m-1}} a_{ki_k} a_{m+1\,i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

(оба раза мы указали слагаемые без знаков). Перестановка

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_m, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1} i_k i_{m+1}, \ldots, i_m)$$

получается из перестановки

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1} i_m i_{m+1}, \ldots, i_m)$$

транспозицией символов i_k и i_m. В силу предложения о транспозиции и четности (см. § 3), эти транспозиции имеют разную четность. Следовательно, указанные выше слагаемые входят в выражения для $|A|$ и $|A'|$ с разными знаками, и потому $|A'| = -|A|$. $\square$

5-е свойство определителей

Если матрица A содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен 0.

Доказательство. После перестановки двух равных строк местами определитель, с одной стороны, не изменится (что очевидно), а с другой умножится на -1 (в силу предыдущего свойства). Следовательно, он равен 0. $\square$

6-е свойство определителей (аддитивность относительно строки)

Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде двух слагаемых, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых элементы этой строки равны первым слагаемым, а во второй — вторым слагаемым, а все остальные строки в обеих матрицах — те же, что и в исходной матрице.

Доказательство. Положим

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{k1} + a''_{k1} & a'_{k2} + a''_{k2} & \ldots & a'_{kn} + a''_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \ldots & a'_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ и } C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a''_{k1} & a''_{k2} & \ldots & a''_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$|A| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} (a'_{ki_k} + a''_{ki_k}) a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} a'_{ki_k} a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} a''_{ki_k} a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} = |B| + |C|.$$

Свойство доказано.

7-е свойство определителей

Если к некоторой строке матрицы A прибавить другую ее строку, умноженную на некоторый скаляр, то определитель матрицы не изменится.

Доказательство. Используя 2-е, 5-е и 6-е свойства определителей, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+ta_{m1} & a_{k2}+ta_{m2} & \dots & a_{kn}+ta_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + t\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + t\cdot 0 = |A|.$$

Свойство доказано.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Определитель квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка, получающейся при вычеркивании из матрицы A i-й строки и j-го столбца, называется *минором элемента* a_{ij} и обозначается через M_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется скаляр $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

8-е свойство определителей (разложение определителя по строке)

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.

Иными словами, если $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ и $1 \leqslant k \leqslant n$, то

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}. \tag{3}$$

Эта формула называется *разложением определителя по k-й строке*. В силу принципа равноправия строк и столбцов имееет место также следующая формула *разложения определителя по k-му столбцу*:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}.$$

Доказательство. Напомним, что через $\mathbf{S}_n$ обозначается группа подстановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если $\sigma \in \mathbf{S}_n$, то через $I(\sigma)$ будем обозначать число инверсий в перестановке $\big(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\big)$. Формулу (2) можно переписать в виде

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{4}$$

Докажем сначала равенство (3) в случае, когда $k = 1$. Для всякого $1 \leq m \leq n$ положим $\mathbf{S}_{n,m} = \big\{\sigma \in \mathbf{S}_n \mid \sigma(1) = m\big\}$. Выберем в правой части равенства (4) все слагаемые, содержащие элемент a_{1m}. Ясно, что это те и только те слагаемые, в которых $\sigma \in \mathbf{S}_{n,m}$. Вынесем a_{1m} за скобку. Ясно, что выражение в скобках будет равно $\sum\limits_{\sigma \in \mathbf{S}_{n,m}} (-1)^{I(\sigma)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

Поэтому равенство (4) можно переписать в виде

$$|A| = \sum_{m=1}^{n} \left(a_{1m} \cdot \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_{n,m}} (-1)^{I(\sigma)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right). \tag{5}$$

Обозначим через $\mathbf{T}_{n,m}$ множество всех взаимно-однозначных отображений из множества $\{2, \ldots, n\}$ на множество $\{1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n\}$. Для каждой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_{n,m}$ обозначим через σ' ограничение отображения σ на множество $\{2, \ldots, n\}$. Очевидно, что $\sigma' \in \mathbf{T}_{n,m}$.

Ясно, что инверсиями подстановки σ являются в точности все инверсии отображения σ' и все пары вида $(1, i)$, где $i = 1, 2, \dots, m-1$ (поскольку $\sigma(1) = m > i$ для всех таких i и только для них). Таким образом, $I(\sigma) = m - 1 + I(\sigma')$. Поскольку $\sigma'(j) = \sigma(j)$ для всех $j = 2, \dots, n$, равенство (5) можно переписать в виде

$$|A| = \sum_{m=1}^{n} \Big(a_{1m} \cdot \sum_{\sigma' \in \mathbf{T}_{n,m}} (-1)^{m-1} \cdot (-1)^{I(\sigma')} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \Big) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \Big(a_{1m} \cdot (-1)^{m-1} \cdot \sum_{\sigma' \in \mathbf{T}_{n,m}} (-1)^{I(\sigma')} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \Big).$$

Вспоминая определение минора элемента квадратной матрицы, легко понять, что $\sum\limits_{\sigma' \in \mathbf{T}_{n,m}} (-1)^{I(\sigma')} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} = M_{1m}$. Кроме того, ясно, что $(-1)^{m-1} = (-1)^{m+1}$. Учитывая сказанное выше, получаем, что

$$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{1m} \cdot (-1)^{1+m} M_{1m} = \sum_{m=1}^{n} a_{1m} A_{1m},$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $1 < k \leqslant n$. Переставляя последовательно k-ю строку с $(k-1)$-й, $(k-2)$-й, $\ldots$, наконец, с первой, и используя 4-е свойство определителей и только что доказанную формулу разложения определителя по первой строке, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \ldots & a_{k-1\,n} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k-1}\left(a_{k1}(-1)^{1+1}M_{k1} + a_{k2}(-1)^{1+2}M_{k2} + \cdots + a_{kn}(-1)^{1+n}M_{kn}\right) =$$
$$= a_{k1}(-1)^{k+1}M_{k1} + a_{k2}(-1)^{k+2}M_{k2} + \cdots + a_{kn}(-1)^{k+n}M_{kn} =$$
$$= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

Свойство доказано. $\square$

Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения элементов другой строки

9-е свойство определителей

Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Доказательство. Пусть $A = (a_{rs})$ — квадратная матрица порядка n и $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$. Обозначим через A' матрицу, полученную из матрицы A заменой ее j-й строки на i-ю. Алгебраические дополнения элементов матриц A и A' будем обозначать через A_{rs} и A'_{rs} соответственно. Если $1 \leq r \leq n$ и $r \neq j$, то r-е строки в матрицах A и A' совпадают. Следовательно, $A_{jk} = A'_{jk}$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$. Разложим определитель матрицы A' по ее j-й строке. Учитывая, что элементы этой строки совпадают с элементами i-й строки матрицы A, получаем, что $|A'| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A'_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$. С другой стороны, $|A'| = 0$ по 5-му свойству определителей. Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$. □

Предложение об определителе треугольной матрицы

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали.

Доказательство. Предположим, что матрица $A = (a_{ij})$ верхнетреугольна. Обозначим порядок матрицы через n и будем доказывать предложение индукцией по n. Если $n = 1$, то $|A| = a_{11}$ по определению определителя. Пусть теперь $n > 1$. Разложив определитель A по первому столбцу и воспользовавшись предположением индукции, имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

В случае нижнетреугольной матрицы доказательство аналогично, надо только воспользоваться разложением определителя по первой строке. $\square$

Из этого предложения автоматически вытекает

Следствие об определителе единичной матрицы

Определитель единичной матрицы равен 1. $\square$

Предложение об определителе треугольной матрицы в сочетании со свойствами определителей подсказывает один из способов вычисления определителя. Пусть дана квадратная матрица A. С помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. При этом нулевые строки, если они будут появляться, вычеркивать не будем, а будем «накапливать» в нижней части матрицы. В результате получим ступенчатую квадратную матрицу A'. Ясно, что всякая такая матрица верхнетреугольна. Ее определитель легко подсчитать (см. предложение об определителе треугольной матрицы). А из 2-го, 4-го и 7-го свойств определителей и принципа равноправия строк и столбцов вытекает, как связаны между собой определители матриц A и A'.

На практике при применении этого способа вычисления определителя следует помнить о том, что:

1) если в процессе преобразований переставлены местами две строки, то определитель следует умножить на -1 (по 4-му свойству определителей);
2) если в процессе преобразований была умножена на скаляр t некоторая *изменяемая* строка (т. е. та строка, к которой сразу после этого будет прибавлена другая строка, возможно, тоже умноженная на какой-то скаляр), то определитель надо разделить на t (по 2-му свойству определителей); если на какой-то скаляр умножается *пассивная* строка (та, которая будет прибавлена к другой строке, а сама меняться не будет), то ничего дополнительно делать не надо (по 7-му свойству определителей).