Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（六）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社
一九八三年·济南

目　录

第八章　重积分和曲线积分 ……………………………………………… 1
§1. 二重积分 ……………………………………………………………… 1
§2. 面积的计算法 ………………………………………………………… 67
§3. 体积的计算法 ………………………………………………………… 92
§4. 曲面面积计算法 ……………………………………………………115
§5. 二重积分在力学上的应用 …………………………………………130
§6. 三重积分 ……………………………………………………………158
§7. 利用三重积分计算体积法 …………………………………………185
§8. 三重积分在力学上的应用 …………………………………………208
§9. 二重和三重广义积分 ………………………………………………244
§10. 多重积分 …………………………………………………………307
§11. 曲线积分 …………………………………………………………341
§12. 格林公式 …………………………………………………………403
§13. 曲线积分的物理应用 ……………………………………………435
§14. 曲面积分 …………………………………………………………460
§15. 斯托克斯公式 ……………………………………………………493
§16. 奥斯特洛格拉德斯基公式 ………………………………………506
§17. 场论初步 …………………………………………………………546

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1°二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x,y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和为对所有 i，j 使 $(x_i,\ y_j) \in \Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leqslant x \leqslant b,\ \ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

2°二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0,$$

则下之公式正确：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|I|\,du\,dv.$$

特别是，根据公式$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$变换为极坐标r和φ的情形有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3901．把积分$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} xy\,dx\,dy$，当作积分和的极限，用直线

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\quad(i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算所论积分的值.

解 由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\longrightarrow\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2},\quad\sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} xy\,dx\,dy=\frac{1}{4}.$$

3902．用直线

$$x=1+\frac{i}{n},\ y=1+\frac{2j}{n}\quad(i,j=0,1,\cdots,n)$$

把域 $1\leqslant x\leqslant 2$， $1\leqslant y\leqslant 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$在此域内的积分下和$\underline{S}$与积分上和$\bar{S}$.当 $n\to\infty$时，上和与下和的极限等于什么？

解 下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

而上和

$$\bar{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$$

当$n\to\infty$时，$\underline{S}$ 与$\bar{S}$的极限均等于$\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

3903. 用一系列内接正方形作为积分域的近似域，这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点，并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值. 近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\doteq 0.196+0.371+0.343+0.312+0.177$$

$$+0.329+0.302+0.154+0.285$$

$$\doteq 2.470,$$

即

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\doteq 9.880.$$

下面计算积分的精确值：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=4\int_0^5 \ln(y+\sqrt{24+x^2+y^2})\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)\,dx-2\int_0^5\ln(24+x^2)\,dx.$$

由于

$$\int \ln(24+x^2)dx = x\ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2}dx$$

$$= x\ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{24}} + C,$$

从而

$$2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx$$

$$= \left[2x\ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{24}}\right]\Bigg|_0^5$$

$$= 20\ln 7 - 20 + 8\sqrt{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{5}{\sqrt{24}};$$

又

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 4[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)]\Big|_0^5$$

$$+ 4\int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$$

$$= 20\ln 7 + 4\int_0^5 \frac{x^2\, dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令 $x=5\sin t$，有

$$\int_0^5 \frac{x^2\, dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25\cos^2 t + 25}{5\cos t + 7} dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos t - 7)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5\cos t + 7} dt$$

$$= (7t - 5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24\left[\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{7\pi}{2}-5-4\sqrt{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$=20\ln 7+14\pi-20-16\sqrt{6}\operatorname{arc\ tg}\frac{2}{\sqrt{24}}.$$

注意到

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=14\pi-4\sqrt{24}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{24}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\doteq 13.201.$$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略，因而产生较大的绝对误差3.321及较大的相对误差$\frac{3.321}{13.201}\doteq 25.16\%$.

注意，求$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5\frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在3937题以后才开始使用

极坐标，故本题仍用直角坐标进行计算.

3904. 用直线$x=$常数，$y=$常数，$x+y=$常数把域S分为四个相等的三角形，并取被积函数在每个三角形的中线交点之值. 近似地计算积分

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

其中S表由直线$x=0$，$y=0$及$x+y=1$所围成的三角形.

解 我们只须以$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$及$x+y=\frac{1}{2}$分域S,即得四个相等的三角形,它们的面积均为$\frac{1}{8}$,重心为$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$. 于是，得此积分的近似值为

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS \doteq \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\doteq \frac{1}{8}\,(0.577+0.816+1.826)\doteq 0.402,$$

其精确值为

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}})\,dx=\frac{2}{5}=0.4.$$

3905. 把域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$分为有限个直径小于δ的可求积的子域$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$.对于什么样的值$\delta$能保证不等式:

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

成立？其中 $(x_i, y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$在ΔS_i中的振幅为ω_i，则

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|dS$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}\omega_i\,dS=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i.$$

由于域 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$的面积等于π，故只要

$$\omega_i<\frac{0.001}{\pi},$$

便能满足原不等式的要求。但因为

$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}|\sin(x_i'+y_i')-\sin(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}|(x_i'+y_i')-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}[|x_i'-x_i|+|y_i'-y_i|]$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x_i',y_i')\in\Delta S_i}}\sqrt{2[(x_i'-x_i)^2+(y_i'-y_i)^2]}^{*)}$$

$$=\sqrt{2}\,\delta_i,$$

故只要取

$$\delta<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times 0.001\doteq 0.00023,$$

则有

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001.$$

*） 对于任意非负实数a，b有

$$2ab\leqslant a^2+b^2 \text{或} (a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2),$$

从而

$$a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

计算积分：

3906. $\int_0^1 dx\int_0^1(x+y)dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_0^1(x+y)dy=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=1$.

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy$.

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy=\int_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx=\frac{1}{40}$.

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr$.

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi a^3}{3}.$$

3909. 设R为矩形

$$a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B,$$

证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dxdy=\int_a^A X(x)\,dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法，不妨先对y后对x积分，即得

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dxdy=\int_a^A dx\int_b^B X(x)Y(y)dy$$

$$=\int_a^A X(x)\,dx\int_b^B Y(y)dy.$$

3910. 设：

$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y),$$

计算

$$I=\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy.$$

解 不妨按先对y后对x积分的顺序计算，即得

$$I=\int_a^A [F'_x(x,B)-F'_x(x,b)]dx$$

$$=F(x,B)\Big|_a^A-F(x,b)\Big|_a^A$$

$$=F(A,B)-F(a,B)-F(A,b)+F(a,b).$$

3911. 设$f(x)$为在闭区间$a\leqslant x\leqslant b$内的连续函数，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

此处仅当$f(x)=$常数时等号成立。

证 因为

$$0 \leqslant \int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2(\int_a^b f(x)dx)^2$$

$$+(b-a)\int_a^b f^2(y)dy,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

当$f(x)=$常数时，显然上式中等号成立．反之，设上式中等号成立，则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$是$a \leqslant x \leqslant b$上的非负连续函数，故$F(x) \equiv 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$．特别$F(a)=0$，即$\int_a^b [f(a)-f(y)]^2 dy = 0$．又由于函数

$$G(y)=[f(a)-f(y)]^2$$

是$a \leqslant y \leqslant b$上的非负连续函数，故$G(y) \equiv 0$ $(a \leqslant y \leqslant b)$．因此，$f(y) \equiv f(a)$ $(a \leqslant y \leqslant b)$，即$f(x)=$常数．证毕．

3912．下列积分有什么样的符号：

(a) $\iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$;

(б) $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$;

(в) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy$?

解 (a) 由于 $0<x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant\ln 1=0$，且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$，故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy<0.$$

(б) 我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy=I_1-I_2-I_3,$$

其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dx\,dy,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,dx\,dy.$$

显然

$$0<I_1<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy=\pi,$$

$$I_2>0,$$

$$I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} dx\,dy=4\pi-2\pi=2\pi,$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy<0.$$

(в) 我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)\,dxdy$$

$$+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dxdy.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零，第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数，因而积分值是正的．于是，原积分是正的．

3913．求函数

$$f(x,y)=\sin^2 x\,\sin^2 y$$

在正方形：$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$内的平均值．

解 平均值

$$I_0=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}} \sin^2 x\sin^2 y\,dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}.$$

3914．利用中值定理，估计积分

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}$$
之值.

解 由于积分域的面积为200,故由积分中值定理知

$$I=\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot 200$$

$$=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\qquad (1)$$

其中 (ξ,η)为域$|x|+|y|\leqslant 10$中的某点.

显然

$$0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2,$$

我们证明必有

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2.\qquad (2)$$

由于函数 $\cos^2x+\cos^2y$ 在有界闭域$|x|+|y|\leqslant 10$上的最大值为2,最小值为0.从而连续函数

$\dfrac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}$在有界闭域$|x|+|y|\leqslant 10$上的最小值为$\dfrac{1}{102}$,最大值为$\dfrac{1}{100}$.如果$\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$,则由(1)式知

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\left(\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\frac{1}{102}\right)dxdy$$

$$=I-I=0.$$

但$f(x,y)=\dfrac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}-\dfrac{1}{102}$是非负连续函数,从而必有$f(x,y)\equiv 0$ (在域$|x|+|y|\leqslant 10$上),即$\cos^2x+\cos^2y\equiv 2$ (在域$|x|+|y|\leqslant 10$上).这显然

是错误的．由此可知，$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$．同理可证 $\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$．于是，(2)式成立．从而，得

$$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}，即 1.96<I<2.$$

3915．求圆 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值．

解 平均值

$$I_0=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)dxdy.$$

由于

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2\,dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int_{a-R}^{a+R}dx\int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}}y^2dy$$

$$=\frac{1}{3\pi R^2}\left\{6b^2\int_{a-R}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)^2}dx\right.$$

$$\left.+2\int_{a-R}^{a+R}[R^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}dx\right\}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\left[\frac{x-a}{2}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{R}\right]\Bigg|_{a-R}^{a+R}$$

$$+\frac{2}{3\pi R^2}\left\{\frac{x-a}{8}[5R^2-2(x-a)^2]\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{x-a}{R}\right\}\Bigg|_{a-R}^{a+R}$$

$$=\frac{2b^2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^2}{2}+\frac{2}{3\pi R^2}\cdot\frac{3\pi R^4}{8}=b^2+\frac{R^2}{4},$$

同理，有

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} x^2\,dx\,dy=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

于是，

$$I_0=a^2+b^2+\frac{R^2}{2}.$$

在问题3916—3922中对二重积分$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dx\,dy$内按所指示的区域$\Omega$依两个不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω—以$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$为顶点的三角形.

解 为方便起见，将二重积分$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$记以$I$.

于是，

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx.$$

3917. Ω—以$O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(-2,1)$为顶点的三角形.

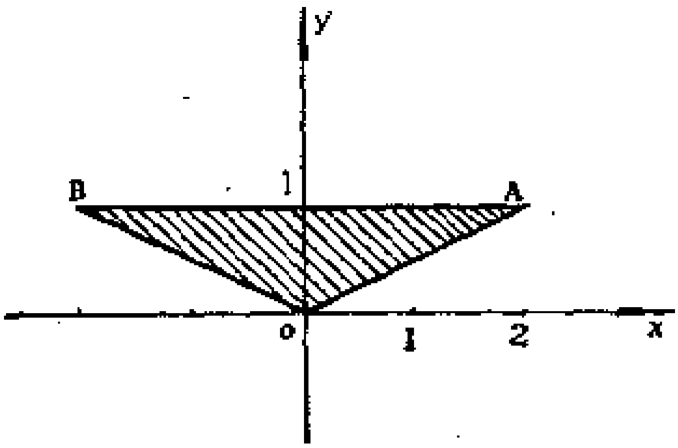

图 8.1

解 如图8.1所示

OA的方程为 $y=\frac{1}{2}x$,

OB的方程为$y=-\frac{1}{2}x$,

AB的方程为$y=1$。

于是,

$$I=\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx=\int_{-2}^0 dx\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)dy$$

$$+\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)dy$$

$$=\int_{-2}^2 dx\int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x,y)dy.$$

3918. Ω—以$O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$为顶点的梯形.

解 如图8.2所示, BC的方程为$y-1=x$.

于是,

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1+x} f(x,y)dy$$

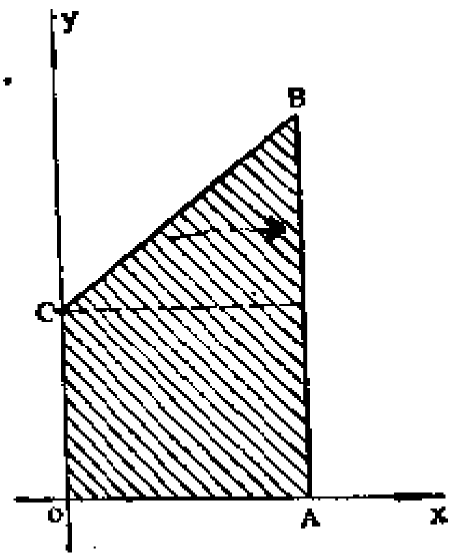

图 8.2

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx.$$

3919. Ω—圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

解 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$$

3920. Ω—圆$x^2+y^2\leqslant y$.

解 如图8.3所示.积分域的围线$x^2+y^2=y$即为

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

于是，

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)dy$$

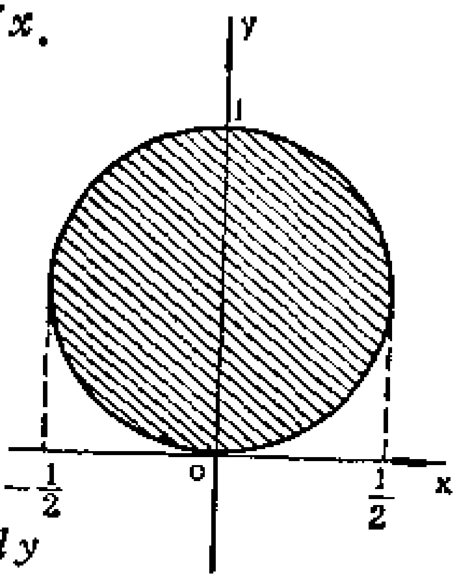

图 8.3

$$=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx.$$

3921. Ω—由曲线$y=x^2$及$y=1$所包围的抛物线的一节.

解 曲线$y=x^2$及$y=1$的交点为(1，−1)，(1,1).于是，

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}f(x,y)\,dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx.$$

3922. Ω—圆环$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 如图8.4所示. 若先对y后对x积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\,dy$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy\right\}$$

$$+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

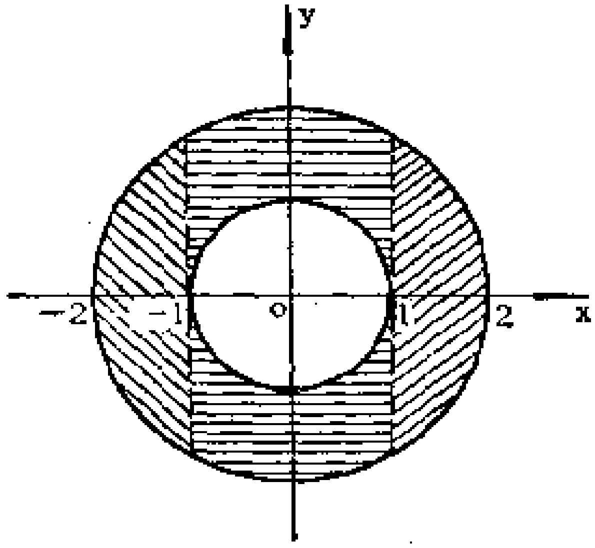

图 8.4

若先对x后对y积分，则

$$I=\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^{1} dy\left\{\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right.$$

$$\left.+\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx\right\}$$

$$+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

3923. 证明迪里黑里公式

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx\quad(a>0).$$

证 公式左端的逐次积分，等于积分$\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$，

其中 Ω 为三角形域 OAB(图8.5)：$O(0,0)$，$A(a,0)$，$B(a,a)$。对于该积分，若化为先对 x 后对 y 的逐次积分，即为公式的右端。于是本题获证。

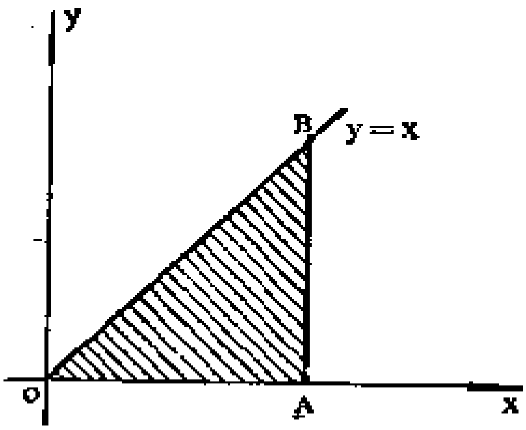

图 8.5

在下列积分中改变积分的顺序：

3924. $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

解 积分域的围线为：$y=x$，$y=2x$及 $x=2$，如图8.6所示。改变积分的顺序，即得

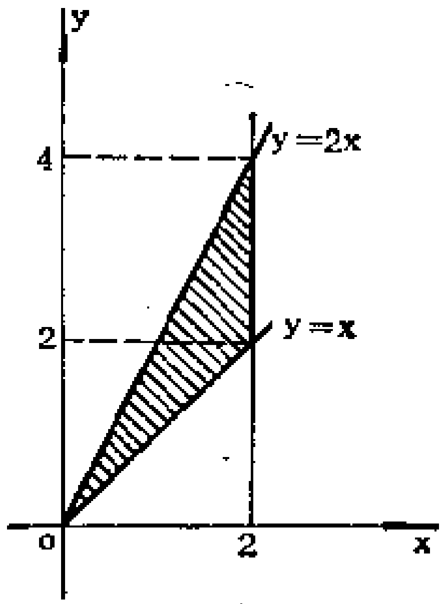

图 8.6

$$\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx$$

$$+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx.$$

3925. $\int_{-6}^{2} dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

解 积分域的围线为：$y=2-x$及$y+1=\frac{x^2}{4}$，其交点

为(2,0)，(−6,8)，如图8.7所示．改变积分的顺序，即得

$$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$$

$$=\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)\,dx$$

$$+\int_{0}^{8}dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)dx.$$

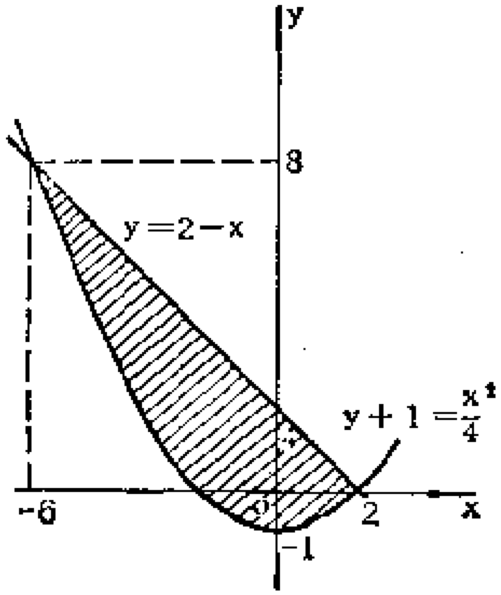

图 8.7

3926. $\int_{0}^{1}dx\int_{x^3}^{x^2}f(x,y)dy.$

解 积分域的围线为：$y=x^2$及$y=x^3$，其交点为(0,0)，(1,1)，如图8.8所示．改变积分的顺序，即得

$$\int_{0}^{1}dx\int_{x^3}^{x^2}f(x,y)dy$$

$$=\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx.$$

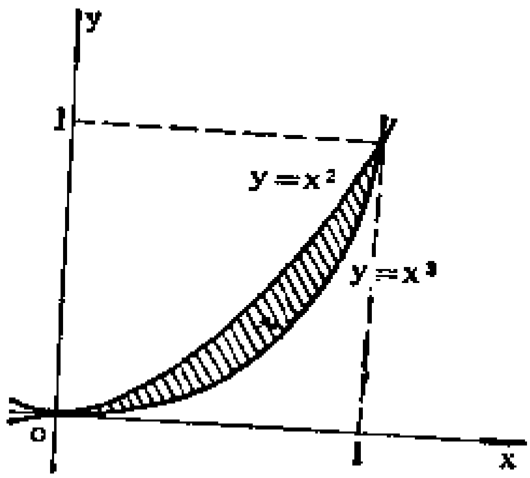

图 8.8

3927. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy.$

解 积分域的围线为圆$x^2+y^2=1$的下半部分及抛物线$y=1-x^2$，如图8.9所示．改变积分的顺序，即得

$$\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$$

$$+\int_{0}^{1} dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$$

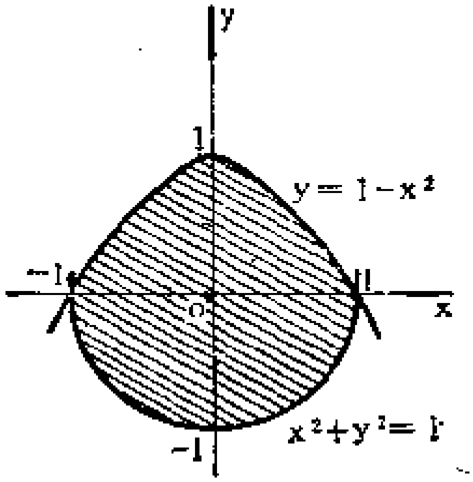

图 8.9

3928. $\int_{1}^{2} dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$

解 积分域的围线为圆$x^2+y^2=2x$或$(x-1)^2+y^2=1$及直线$y=2-x$，其交点为$(2,0)$，$(1,1)$，如图8.10中阴影部分所示.改变积分的顺序，即得

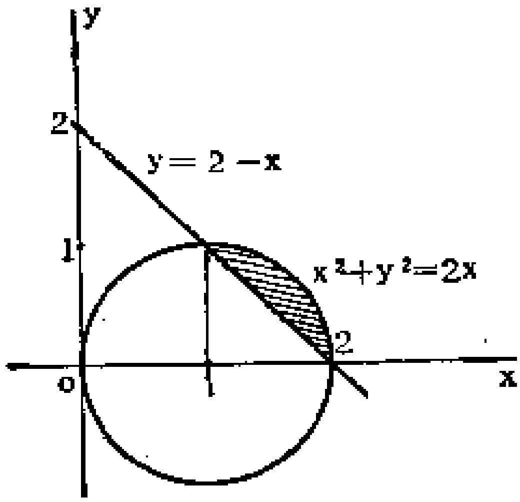

图 8.10

$$\int_{1}^{2} dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{0}^{1} dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

3929. $\int_{0}^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy \quad (a>0).$

解 积分域由围线 $(x-a)^2+y^2=a^2$ $(y\geqslant 0)$，$y^2=2ax(y\geqslant 0)$ 及 $x=2a$ 组成．如图8.11中阴影部分所示．改变积分的顺序，即得

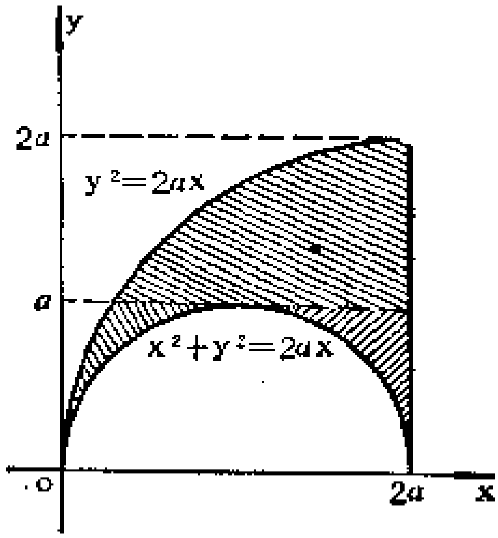

图 8.11

$$\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_0^a dy\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx\right.$$

$$\left.+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\right\}$$

$$+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

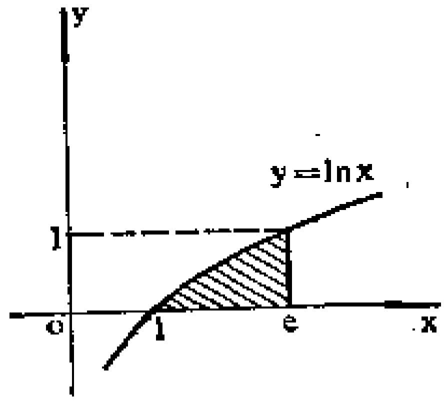

图 8.12

3930．$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy.$

解 积分域如图8.12中阴影部分所示．改变积分顺序，即得

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx.$$

3931．$\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy.$

解 积分域如图8.13中阴影部分所示．由于 $y=\sin x$ 的反函数，当 y 从 0 变到 1 时为 $x=\arcsin y$，当 y 从 1

变到-1时$x=\pi-\arcsin y$，当y从-1变到0时为$x=2\pi+\arcsin y$，故改变积分的顺序，即得

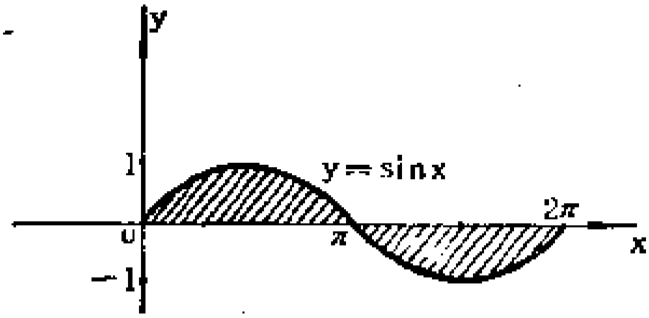

图 8.13

$$\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$$

$$+\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx.$$

计算下列积分：

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2dxdy$，设$\Omega$是由抛物线$y^2=2px$和直线$x=\frac{p}{2}$ $(p>0)$所界的区域.

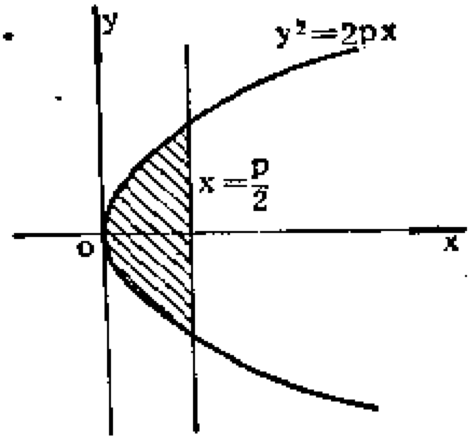

图 8.14

解 积分域如图8.14所示. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2dx\,dy=\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{2}{3}x\sqrt{(2px)^3}\,dx=\frac{p^5}{21}.$$

3933. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$，设Ω是由圆心在点(a,a)半径为a且与坐标轴相切的圆周的较短弧和坐标轴所围成的区域。

解 如图8.15所示：当x从0变到a时，对于每一固定的x，y从0变到$a-\sqrt{2ax-x^2}$.于是，

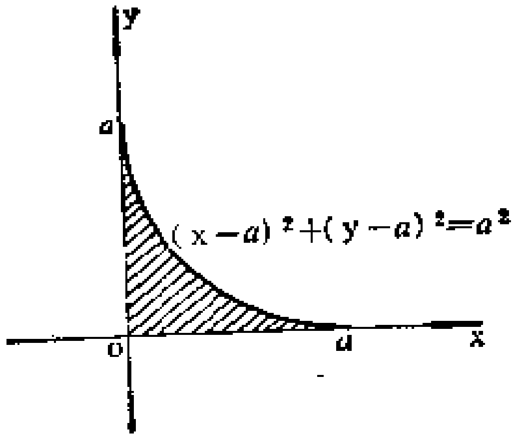

图 8.15

$$\iint_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$$

$$=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}dy$$

$$=\int_0^a\frac{adx}{\sqrt{2a-x}}-\int_0^a\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$$

3934. $\iint_{\Omega}|xy|dxdy$，设Ω是以a为半径，坐标原点为圆心的圆。

解 $$\iint_{\Omega}|xy|dxdy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}|xy|dy$$

$$=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)|x|dx$$

$$=2\int_0^a(a^2-x^2)xdx=\frac{a^4}{2}.$$

3935. $\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$，设$\Omega$是以$y=x$，$y=x+a$，$y=a$和$y=3a$ $(a>0)$为边的平行四边形。

解 如图8.16所示．当y从a变到$3a$时，对于每一固定的y，x从$y-a$变到y．于是，

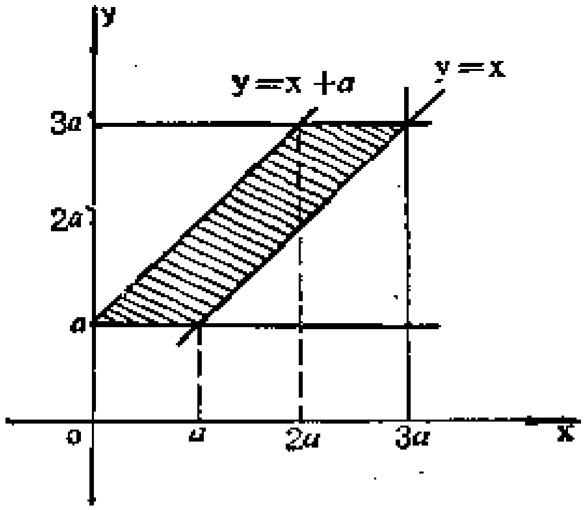

图 8.16

$$\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}+ay^2-\frac{(y-a)^3}{3}\right]dy$$

$$=\frac{168a^4}{12}=14a^4.$$

3936．$\iint_{\Omega}y^2dxdy$，设Ω是由横轴和摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的第一拱所界的区域．

解 $\iint_{\Omega}y^2dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y}y^2dy$

$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt$$

$$=\frac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}dt=\frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8 udu$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 udu+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^8 udu\right\}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 u du\right\}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u du^{*)}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot 2\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\pi}{2}^{**)} \quad =\frac{35}{12}\pi a^4.$$

*) 参看2282题的结果.

**) 参看2281题的结果.

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

中，假定 $x=r\cos\varphi$和 $y=r\sin\varphi$，变换为极坐标 r和 φ，并配置积分的限，设：

3937. Ω—圆$x^2+y^2\leqslant a^2$.

解 雅哥比式$I=r$，以下各题不再写出.

φ从 0 变到2π，r从 0 变到a. 于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3938. Ω—圆$x^2+y^2\leqslant ax$ $(a>0)$.

解 圆$x^2+y^2=ax$即$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，极坐标方程为$r=a\cos\varphi$. 当$\varphi$从$-\frac{\pi}{2}$变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的$\varphi$，$r$ 从 0 变到$a\cos\varphi$. 于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3939. Ω—环$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$.

解 φ从0变到2π，r从$|a|$变到$|b|$. 于是，

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{|a|}^{|b|}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

3940. Ω—三角形$0\leqslant x\leqslant 1$；$0\leqslant y\leqslant 1-x$.

解 由于直线$x+y=1$的极坐标方程为

$$r=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

因而当φ从0变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$.于是，

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3941. Ω—抛物线节$-a\leqslant x\leqslant a$，$\frac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant a$.

解 如图8.17所示. 区域Ω可分为三部分：

（1）当φ从0变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$，其中

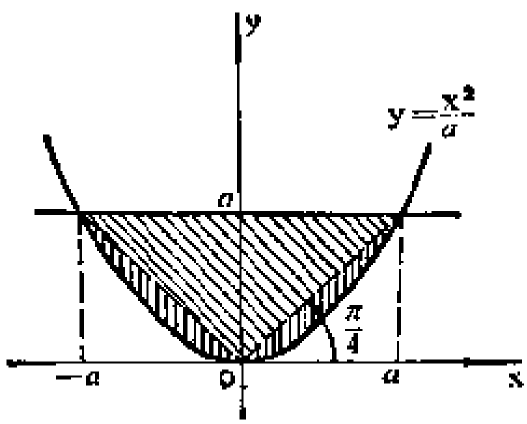

图 8.17

$r=\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$为抛物线 $y=\frac{x^2}{a}$的极坐标方程；

（2）当φ从$\frac{\pi}{4}$变到$\frac{3\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从 0 变到$\frac{a}{\sin\varphi}$；

（3）当φ从$\frac{3\pi}{4}$变到π时，对于每一固定的φ，r从 0 变到$\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$。

于是，

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

3942．在怎样的情况下，当变换为极坐标之后，积分的限是常数？

解 若变换为极坐标，积分

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_a^b f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr,$$

其中 α、β、a、b均为常数，则表明积分域Ω为$a\leqslant r\leqslant b$，$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$.它表示圆环面$a\leqslant r\leqslant b$被射线$\varphi=\alpha$，$\varphi=\beta$截出的部分，且只有积分域是这种情况，变换为极

坐标后积分的限才是常数．如3937题及3939题即为其特例．

在下列积分中，假定$x=r\cos\varphi$和$y=r\sin\varphi$，变换为极坐标r和φ，并依两种不同的顺序配置积分的限：

3943．$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$．

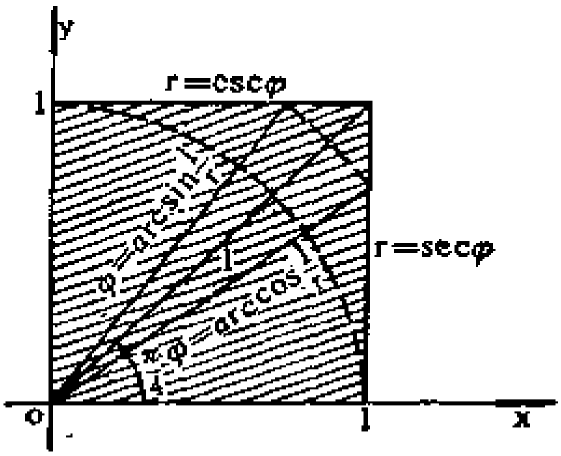

图 8.18

解 如图8.18所示．若先对r积分，则当φ从0变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\sec\varphi$；当φ从$\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$\csc\varphi$．

若先对φ积分，则当r从0变到1时，φ从0变到$\frac{\pi}{2}$；当r从1变到$\sqrt{2}$时，对于每一固定的r，φ从$\arccos\frac{1}{r}$变到$\arcsin\frac{1}{r}$．于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\csc\varphi} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr$$

$$=\int_0^1 r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi+\int_1^{\sqrt{2}} r\,dr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

3944. $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$

解 如图8.19所示．若先对r积分，则当φ从0变到$\frac{\pi}{2}$时，对于每一固定的φ，r从$\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$变到1。

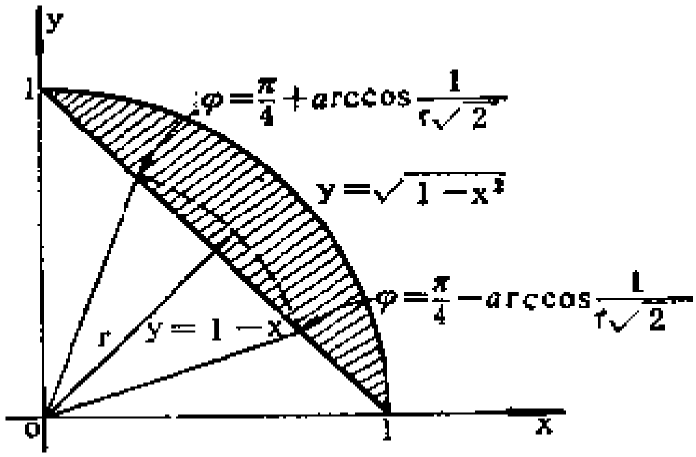

图 8.19

若先对φ积分，则当r从$\frac{1}{\sqrt{2}}$变到1时，对于每一固定的r，φ从$\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$变到$\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$，其中直线$x+y=1$的极坐标方程为$r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\frac{1}{r\sqrt{2}}$或$\frac{\pi}{4}-\varphi=$

$\pm\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}$. 于是,

$$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$

3945. $\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$.

解 如图8.20所示。若先对 r 积分，则当 φ 从$\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{3}$时，对于每一固定的φ，r从 0 变到$\frac{2}{\cos\varphi}$.

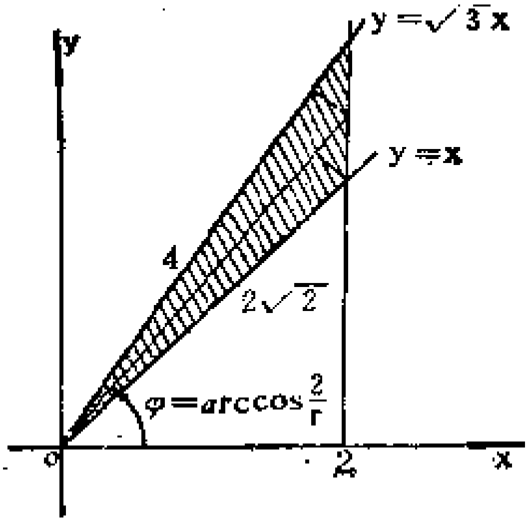

图 8.20

若先对φ 积分，则当r从 0 变到$2\sqrt{2}$时，φ 从$\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{3}$；当 r 从$2\sqrt{2}$变到 4 时，对于每一固定的r，φ从 $\arccos\frac{2}{r}$变到$\frac{\pi}{3}$. 于是，

$$\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)dr$$

$$=\frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)dr+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right)rf(r)dr.$$

3946[+*] $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$.

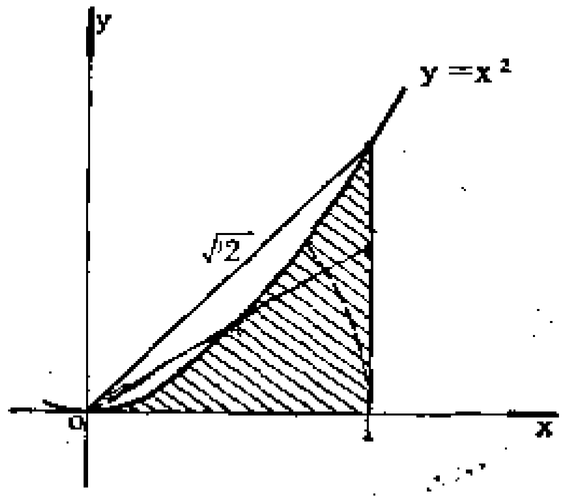

图 8.21

解 如图8.21所示。若先对 r 积分，则当 φ 从 0 变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r 从$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$变到$\frac{1}{\cos\varphi}$，

其中 $r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程.

若先对φ积分，则当r从 0 变到 1 时，对于每一固定的r，φ从0变到$\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$（由$r=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$解出$\varphi$）；当$r$从 1 变到$\sqrt{2}$时，对于每一固定的$r$，$\varphi$ 从$\arccos\frac{1}{r}$变到$\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$，于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,\ y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\ rdr$$

---

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

$$=\int_0^1 rdr\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi.$$

3947. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$，其中$\Omega$是由曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$（$x\geqslant 0$）所界的域。

解 令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$（$x\geqslant 0$）的极坐标方程为$r^2=a^2\cos 2\varphi$，其图象是双纽线的右半部分，如图8.22所示。

若先对r积分，则当φ从$-\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{4}$时，对于每一固定的φ，r从0变到$a\sqrt{\cos 2\varphi}$。

若先对φ积分，则当r从0变到a时，对于每一固

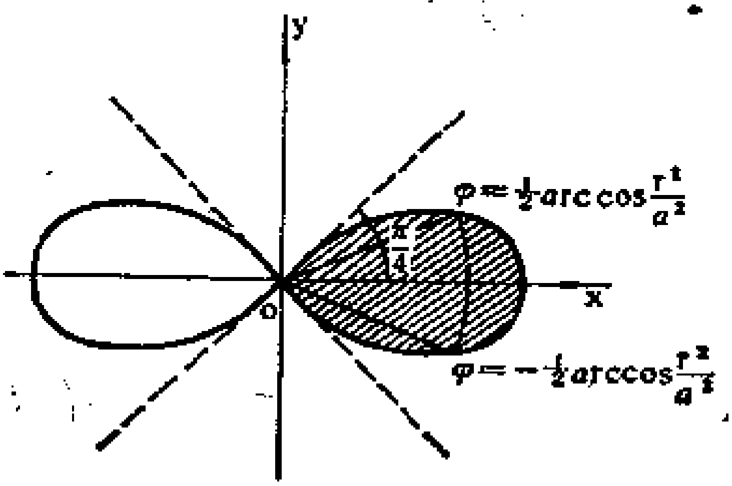

图 8.22

定的r，φ从$-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$变到$\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$．于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^a rdr\int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdr.$$

假定r和φ为极坐标，在下列积分中变更积分的顺序：

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)dr\quad (a>0)$.

解 积分域为由圆$r=a\cos\varphi$或$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$所围成的圆域．

若先对φ积分，则当r从0变到a时，对于每一固定的r，

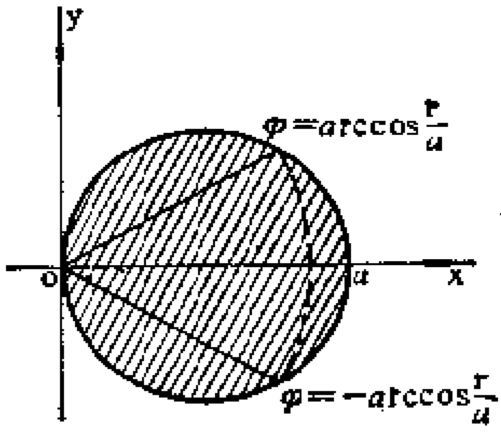

图 8.23

φ从$-\arccos\frac{r}{a}$变到$\arccos\frac{r}{a}$（图8.23）．于是，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,\ r)\ dr=\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi,r)d\varphi.$$

3949. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,dr \quad (a>0)$.

解 积分域由双纽线 $r^2=a^2\sin 2\varphi$ 的右上部分围成（图8.24）.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}$. 于是，

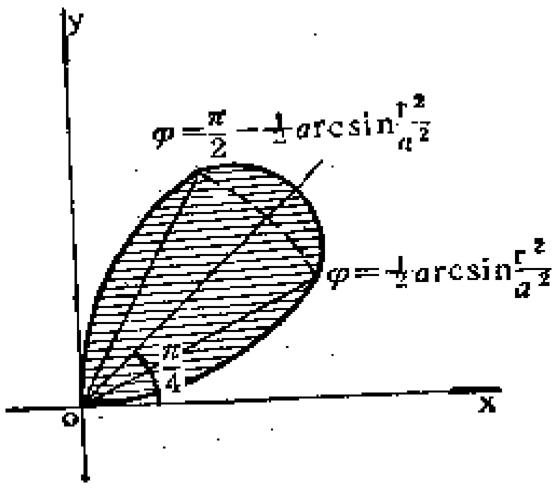

图 8.24

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,dr=\int_0^a dr \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi,r)\,d\varphi.$$

3950. $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r)\,dr$

$(0<a<2\pi)$.

解 积分域由曲线 $r=\varphi$（阿基米德螺线）与射线 $\varphi=a$ 围成（图8.25）.

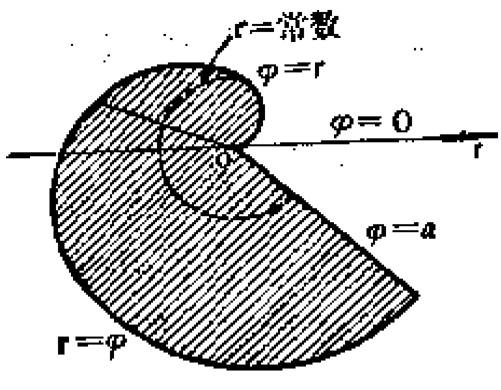

图 8.25

改变积分顺序，即得

$$\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r)\,dr=\int_0^a dr \int_r^a f(\varphi,r)\,d\varphi.$$

变换成极坐标，以一重积分来代替二重积分：

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$.

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 f(r)r\,dr$

$$=2\pi\int_0^1 rf(r)\,dr.$$

3952. $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$，其中$\Omega=\{|y|\leqslant|x|;\ |x|\leqslant 1\}$.

解 域Ω如图8.26所示．先对φ积分，则当r从0变到1时，φ从$-\frac{\pi}{4}$变到$\frac{\pi}{4}$；当r从1变到$\sqrt{2}$时，对于每一固定的r，φ从$\arccos\frac{1}{r}$变到$\frac{\pi}{4}$．于是，

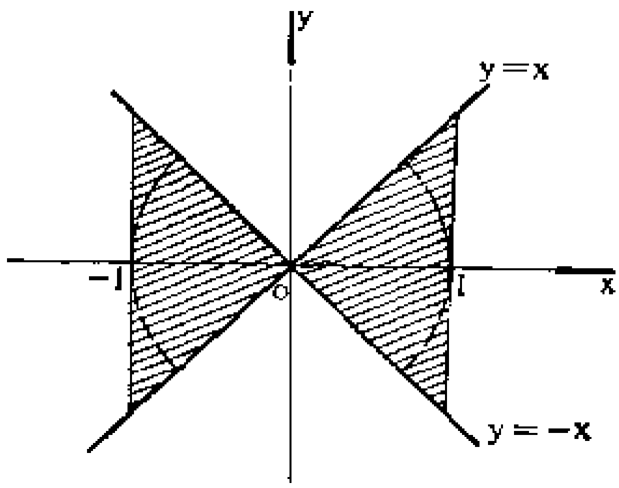

图 8.26

$$\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=2\int_0^1 rf(r)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi$$

$$+4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi$$

$$=\pi\int_0^1 rf(r)\,dr+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\,dr.$$

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy.$

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}f(\operatorname{tg}\varphi)rdr$

$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi d\varphi.$

变换成极坐标，以计算下列二重积分：

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$

解 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\cdot rdr=\frac{2\pi a^3}{3}.$

3955. $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$

解 $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\pi^{2\pi}r\sin rdr$

$=2\pi\int_\pi^{2\pi}r\sin rdr=-6\pi^2.$

3956. 利用函数组

$$u=\frac{y^2}{x},\qquad v=\sqrt{xy}$$

把矩形$S\{a<x<a+h,\ b<y<b+h\}$ $(a>0,\ b>0)$变换为域S'. 求域S'的面积与S的面积之比。

当$h\to0$时，此比值的极限等于什么？

解 正方形的角点$A(a,b)$，$B(a+h,b)$，$c(a+h,b+h)$，$D(a,b+h)$对应于Ouv平面上的点 $A'\left(\frac{b^2}{a},\sqrt{ab}\right)$，$B'\left(\frac{b^2}{(a+h)^2},\sqrt{(a+h)b}\right)$，$C'\left(\frac{(b+h)^2}{a+h},\sqrt{(a+h)(b+h)}\right)$，$D'\left(\frac{(b+h)^2}{a},\sqrt{a(b+h)}\right)$.正方形的四边$y=b$，$x=a+h$，$y=b+h$，$x=a$对应于$Ouv$平面上的四条曲线，即

$$A'B'\text{：}\ u=\frac{b^3}{v^2}\text{；}\quad B'C'\text{：}\ u=\frac{v^4}{(a+h)^3}\text{；}$$

$$C'D'\text{：}\ u=\frac{(b+h)^3}{v^2}\text{；}D'A'\text{：}\ u=\frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的域即为S'（图8.27）。

于是，域S'的面积

$$S'=\iint\limits_{S'}du\ dv=\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}}\frac{v^4}{a^3}dv$$

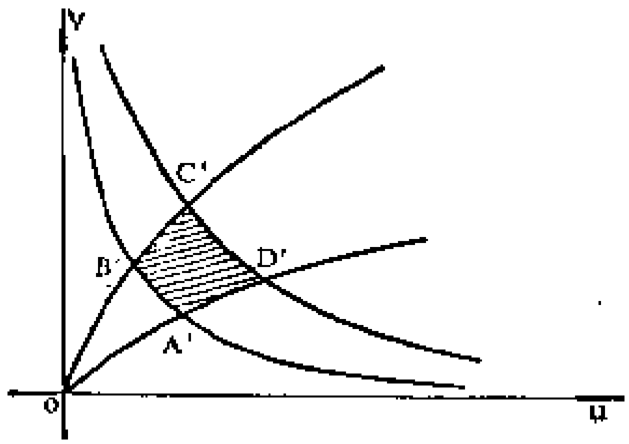

图 8.27

$$+\int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{(b+h)^3}{v^2}dv-\int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}}\frac{b^3}{v^2}dv$$

$$-\int_{\sqrt{(a+h)b}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\frac{v^4}{(a+h)^3}dv$$

$$=\frac{1}{5a^3}\left[\sqrt{a^5(b+h)^5}-\sqrt{a^5b^5}\right]$$

$$+(b+h)^3\left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}}-\frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}}\right]$$

$$-b^3\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{(a+h)b}}\right]$$

$$-\frac{1}{5(a+h)^3}\left[\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5}-\sqrt{(a+h)^5b^5}\right]$$

$$=\frac{6}{5}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right].$$

从而，域S'的面积与S的面积之比

$$\frac{S'}{S}=\frac{6}{5h^2}\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right]$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{\left[\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right](\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}{h^2\sqrt{a(a+h)}}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})(\sqrt{b+h}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})}.$$

上述比式是h的函数，并且在$h=0$点连续，于是，

$$\lim_{h\to 0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5b^2}{4\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{b}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上，应用洛比塔法则求此极限更简单些，这是因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5}{2}\sqrt{(b+h)^3}=\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}(a+h)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}.$$

于是，

$$\lim_{h\to 0}\frac{S'}{S}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}b^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意，若利用二重积分的变量代换，则计算S'较为简单．容易算得$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$，故

$$S'=\iint_{S'}du\,dv=\iint_{S}\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|dx\,dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_a^{a+h}x^{-\frac{3}{2}}dx\int_b^{b+h}y^{\frac{3}{2}}dy$$

$$=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)\left(\sqrt{(b+h)^5}-\sqrt{b^5}\right)$$

与上述结果一致．但是，从原习题集题目的安排来看，似乎应从3966题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分．

引入新的变量u，v来代替x，y，并确定下列二重积分中的积分限：

3957. $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$，若$u=x$，

$v=\dfrac{y}{x}$。

解 在变换$u=x$，$v=\dfrac{y}{x}$下，区域$\Omega=\{a\leqslant x\leqslant b$，$\alpha x\leqslant y\leqslant\beta x\}$变为$\Omega'=\{a\leqslant u\leqslant b,\ \alpha\leqslant v\leqslant\beta\}$。变换的雅哥比式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ v & u\end{vmatrix}=u>0.$$

于是

$$\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,\ y)dy=\int_a^b udu\int_\alpha^\beta f(u,\ uv)dv.$$

3958. $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy$，若$u=x+y$，　$v=x-y$。

解 在变换$u=x+y$，$v=x-y$下，区域$\Omega=\{0\leqslant x\leqslant 2$，$1-x\leqslant y\leqslant 2-x\}$变为$\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2,\ -u\leqslant v\leqslant 4-u\}$。事实上，$u+v=2x$，$u-v=2y$，故$0\leqslant u+v\leqslant 4$，即$-u\leqslant v\leqslant 4-u$。变换的雅哥比式$I=-\dfrac{1}{2}$，从而$|I|=\dfrac{1}{2}$。于是，

$$\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x,\ y)dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv.$$

3959. $\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$，其中$\Omega$是由曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，

$x=0$，$y=0$ $(a>0)$所界的区域，若

$$x=u\cos^4 v,\quad y=u\sin^4 v.$$

解 Ω的界线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$的参数方程为

$$x=a\cos^4 v,\ y=a\sin^4 v\quad\left(0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换$x=u\cos^4 v$，$y=u\sin^4 v$，有$|I|=4|u\cos^3 v\cdot\sin^3 v|$，且区域$\Omega$变为$\Omega'=\{0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\}$。

于是，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

$$=4\int_0^a u du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v f(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)dv$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v dv\int_0^a uf(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)du.$$

3960．证明：变数代换

$$x+y=\xi,\quad y=\xi\eta$$

把三角形$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$变为单位正方形$0\leqslant\xi\leqslant 1$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$。

证 由$0\leqslant y\leqslant 1-x$及$0\leqslant x\leqslant 1$得$0\leqslant x+y\leqslant 1$，即

$$0\leqslant\xi\leqslant 1.$$

又$\eta=\frac{y}{\xi}\leqslant\frac{y}{0+y}=1$，且$\eta\geqslant 0$，故$0\leqslant\eta\leqslant 1$。

反之，从$0\leqslant\xi\leqslant 1$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$得$0\leqslant x+y\leqslant 1$，$y=\xi\eta$，$x=\xi(1-\eta)$，故$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$。因此，三角形域$\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$变为正方形域$\{0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1\}$。

3961. 在什么样的变数代换下，由曲线 $xy=1$，$xy=2$，$x-y+1=0$，$x-y-1=0$ $(x>0, y>0)$ 所界的曲线四边形变换成矩形，其边平行于坐标轴？

解 原四条曲线为 $xy=1$，$xy=2$，$x-y=-1$，$x-y=1$ $(x>0, y>0)$，故显然应作变换 $xy=u$，$x-y=v$。这时 u 从 1 变到 2，v 从 -1 变到 1，故原积分域变为域：$1\leqslant u\leqslant 2$，$-1\leqslant v\leqslant 1$。

进行适当的变数代换，化二重积分为一重的：

3962. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,dx\,dy$.

解 作变换 $x+y=u, x-y=v$ 或 $x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$，

则有 $|I|=\dfrac{1}{2}$，且 u 从 -1 变到 1，v 从 -1 变到 1。于是，

$$\iint\limits_{|x|+|y|<1} f(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}f(u)\,du$$

$$=\int_{-1}^{1}f(u)\,du.$$

3963. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy \quad (a^2+b^2\neq 0)$.

解 作变换 $\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u$，$\dfrac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$，则有 $x=\dfrac{au+bv}{\sqrt{a^2-b^2}}$，$y=\dfrac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $x^2+y^2=u^2+v^2\leqslant 1$，

故域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 变为 $u^2+v^2\leqslant 1$，且有 $|I|=1$。于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy$$

$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)dudv$$

$$=\int_{-1}^{1}du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f(\sqrt{a^2+b^2}\,u+c)dv$$

$$=\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2}\,u+c)du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}dv$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(\sqrt{a^2+b^2}u+c)du.$$

3964. $\iint\limits_{\Omega}f(xy)dxdy$，其中$\Omega$为由曲线$xy=1$，$xy=2$，$y=x$，$y=4x$（$x>0$，$y>0$）所界的域。

解 作变换$xy=u$，$\frac{y}{x}=v$，则域Ω变为域$\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\}$，且$|I|=\frac{1}{2v}$。于是，

$$\iint\limits_{\Omega}f(xy)dxdy=\int_1^4\frac{dv}{2v}\int_1^2 f(u)\,du=\ln 2\cdot\int_1^2 f(u)du.$$

3965. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$，其中$\Omega$是由曲线$x^2+y^2=x+y$所包围的域。

解 域Ω即圆$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$。作变换：$x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$，$y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则域$\Omega$变为域$\Omega=\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\}$，且$|I|=r$。于是，

$$\iint_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[r+r^2(\sin\varphi$$

$$+\cos\varphi)]dr=\frac{\pi}{2}.$$

计算下列二重积分：

3966. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy$.

解 $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy$

$$=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)\,dy=\frac{4}{3}.$$

3967. $\displaystyle\iint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$，其积分域$\Omega$是由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所界的域。

解 作变换：$x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则域Ω变为域$\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$，且$|I|=abr$．于是，

$$\iint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 ab\sqrt{1-r^2}\,r\,dr$$

$$=2\pi ab\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr=\frac{2\pi ab}{3}.$$

3968. $\displaystyle\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

解 作变换：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，并利用对称性，则有

$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\left(\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}}r^3\,dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi d\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^4\varphi}=2\int_0^1\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\Bigg|_0^{1\,*)}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*) 利用1712题的结果.

3969. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$，其积分域$\Omega$是由曲线$y^2=2x$，$x+y=4$，$x+y=12$所界的域.

解 由解方程组

$$\begin{cases}x+y=4,\\ y^2=2x\end{cases}\quad 及 \quad\begin{cases}x+y=12,\\ y^2=2x\end{cases}$$

求得两条直线与抛物线的交点为$A(2,2)$，$B(8,4)$，$C(18,-6)$，$D(8,-4)$(图8.28). 于是,

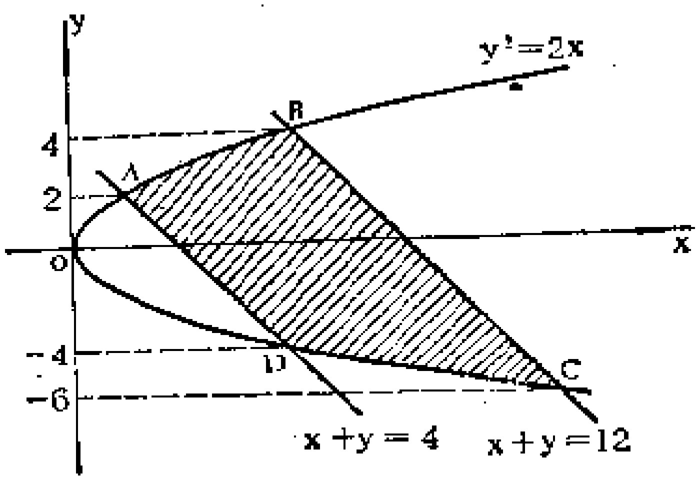

图 8.28

$$\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy=\int_{-6}^{-4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx$$

$$+\int_{-4}^{2} dy\int_{4-y}^{12-y}(x+y)dx+\int_{2}^{4} dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx$$

$$=79\frac{13}{15}+384+79\frac{13}{15}=543\frac{11}{15}.$$

3970. $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$，其中$\Omega$是由曲线 $xy=1$，$x+y=\frac{5}{2}$所界的域。

解 曲线$xy=1$与直线$x+y=\frac{5}{2}$的交点为$\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$，$\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$。于是，

$$\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^{2} x\,dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25}{4}x-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=1\frac{37}{128}-\ln 2.$$

3971. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}} |\cos(x+y)|\,dx\,dy.$

解 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}} |\cos(x+y)|\,dx\,dy=\int_0^{\pi} dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\,dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\,dy$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy-\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)\,dy\right]dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[-\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\left[\sin(x+\pi)-\sin\frac{\pi}{2}\right]\right\}dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{-\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin x\right)+\left[\sin(x+\pi)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{3\pi}{2}\right]\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2dx=2\pi.$$

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy.$

解 积分域如图8.29所示，由 Ω_1，Ω_2，Ω_3和 Ω_4所组成，其中 Ω_1为由圆$\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=0$，即圆$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}$围成的区域，该圆的极坐标方程为

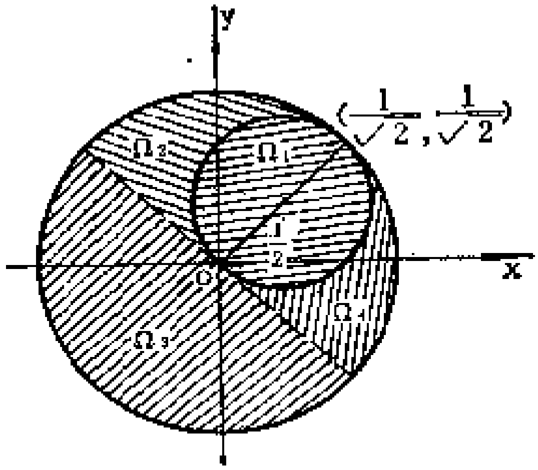

图 8.29

$$r=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

而圆$x^2+y^2=1$的极坐标方程为$r=1$．于是，各区域为Ω_1：$-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$0\leqslant r\leqslant\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$；

$$\Omega_2:\ \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4},\qquad \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_3:\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{7\pi}{4},\qquad 0\leqslant r\leqslant 1;$$

$$\Omega_4:\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant r\leqslant 1.$$

当点在Ω_1中时，由于$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$即$\frac{x+y}{\sqrt{2}}-(x^2+y^2)\geqslant 0$，故$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2$；当点在$\Omega_2$、$\Omega_3$和$\Omega_4$中时，$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}=r^2-r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$．于是，注意到利用对称性便得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\left[r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r^2\right]r\,dr$$

$$+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} \left[r^2 - r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right] r dr$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \left[r^2 - r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right] r dr$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right.$$

$$\left.\cdot\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{6}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right] d\varphi$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right] d\varphi$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du + \left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\overset{*)}{=}\frac{\pi}{32}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{32}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9\pi}{16}.$$

*) 利用2281题的结果。

3973⁺. $\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1 \\ 0\leq y\leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy$.

解 $\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1 \\ 0\leq y\leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx\, dy = \iint\limits_{\substack{|x|\leq 1 \\ 0\leq y\leq x^2}} \sqrt{x^2-y} dx\, dy$

$$+\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1 \\ x^2\leq y\leq 2}} \sqrt{y-x^2} dx dy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy$$

$$=\frac{4}{3}\int_{0}^{1}x^3dx+\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

*) 参看1750题的结果.

计算不连续函数的积分:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dxdy.$

解 当$y^2-x^2<2$时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$;当$y^2-x^2>2$时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;当$y^2-x^2=2$时,$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=0$.

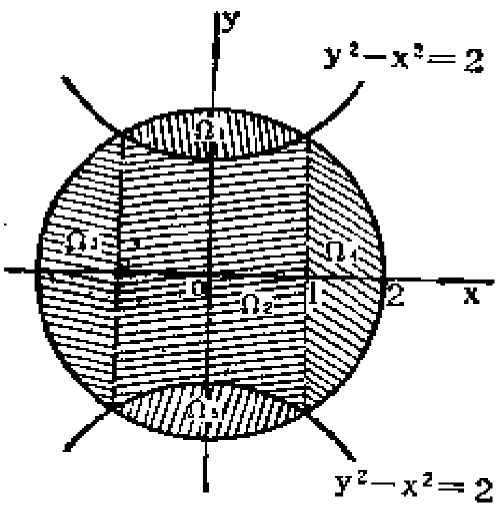

图 8.30

现将域$x^2+y^2\leqslant 4$分成Ω_1,Ω_2,Ω_3,Ω_4和Ω_5五部分,其界线分别为$x^2+y^2=4$,$y^2-x^2=2$,$x=\pm 1$(图8.30).当点在Ω_1和Ω_5中时,$y^2-x^2>2$,故$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$;当点在$\Omega_2$、$\Omega_3$和$\Omega_4$中时,$y^2-x^2<2$,故

$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$．于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$$

$$=-\iint\limits_{\Omega_1} dx\,dy-\iint\limits_{\Omega_5} dx\,dy+\iint\limits_{\Omega_2} dx\,dy+\iint\limits_{\Omega_3} dx\,dy$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4} dx\,dy$$

$$=-4\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy+4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2+x^2}} dy$$

$$+4\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy$$

$$=8\int_0^1\sqrt{2+x^2}\,dx+4\left(\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx\right)$$

$$=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

3975. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]\,dx\,dy$.

解 当 $0\leqslant x+y<1$ 时，$[x+y]=0$；当 $1\leqslant x+y<2$ 时，$[x+y]=1$；当 $2\leqslant x+y<3$ 时，$[x+y]=2$；当 $3\leqslant x+y<4$

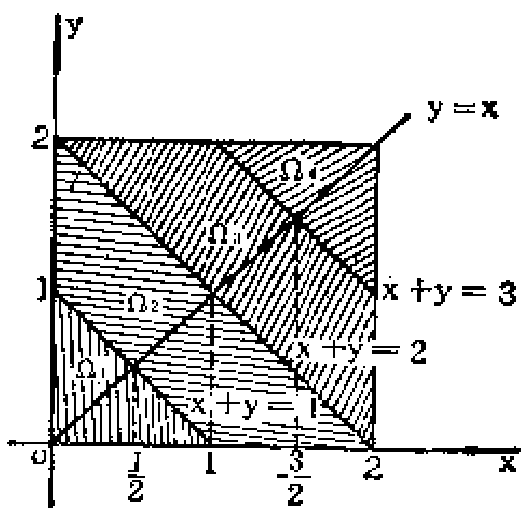

图 8.31

时，$[x+y]=3$；

当$x+y=4$时，$[x+y]=4$。

如图8.31所示，域$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$可分为下列四部分：

Ω_1：$x+y\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$；

Ω_2：$1\leqslant x+y\leqslant 2$，$x=0$，$y=0$；

Ω_3：$2\leqslant x+y\leqslant 3$，$x=2$，$y=2$；

Ω_4：$x+y\geqslant 3$，$x\leqslant 2$，$y\leqslant 2$。

当点属于Ω_1的内部时，$[x+y]=0$；当点属于Ω_2的内部时，$[x+y]=1$；当点属于Ω_3的内部时，$[x+y]=2$；当点属于Ω_4的内部时，$[x+y]=3$。于是，

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]dxdy=\iint\limits_{\Omega_2}dxdy+2\iint\limits_{\Omega_3}dxdy+3\iint\limits_{\Omega_4}dxdy$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}dy+\int_{1}^{1}dx\int_{0}^{2-x}dy\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}dx\int_{2-x}^{x}dy+\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\int_{2-x}^{3-x}dy\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\int_{3-x}^{x}dy$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)\,dx+\int_{1}^{2}(2-x)\,dx\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2x-2)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}dx\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2x-3)dx=6.$$

3976. $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dxdy$.

解 如图8.32所示。

当$x^2\leqslant y<x^2+1$时，

$[y-x^2]=0$；

当$1+x^2\leqslant y<x^2+2$时，$[y-x^2]=1$；

当$2+x^2\leqslant y<x^2+3$时，$[y-x^2]=2$；

当$3+x^2\leqslant y<4$时，

$[y-x^2]=3$．

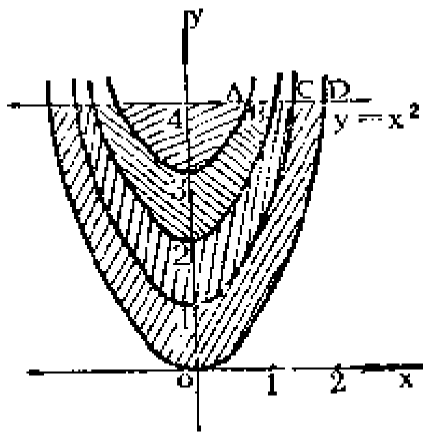

图 8.32

抛物线$y=x^2+3$，$y=x^2+2$，$y=x^2+1$及$y=x^2$与直线$y=4$在第一象限内的交点为$A(1,4)$，$B(\sqrt{2},4)$，$C(\sqrt{3},4)$及$D(2,4)$，与Oy轴对称的位置还有四个交点．于是，

$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy$$

$$=2\left[\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2+1}^{x^2+2}dy+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\int_{x^2+1}^{4}dy\right]$$

$$+2\sqrt{2}\left[\int_0^{1}dx\int_{x^2+2}^{x^2+3}dy+\int_{1}^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2+2}^{4}dy\right]$$

$$+2\sqrt{3}\int_0^{1}dx\int_{x^2+3}^{4}dy$$

$$=2\left[\sqrt{2}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)dx\right]+2\sqrt{2}$$

$$\cdot\left[1+\int_{1}^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx\right]+2\sqrt{3}\int_0^{1}(1-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$$

3977. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数，证明

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dx\,dy=0.$$

证 作变换：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dx\,dy=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant a}} r^{m+n+1}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\cdot\sin^n\varphi\,d\varphi\right].\qquad(1)$$

若在上式右端的第二个积分中令$\varphi=\pi+t$，即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi=(-1)^m\cdot(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\cdot\sin^n t\,dt.\qquad(2)$$

当m及n中有且仅有一个为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=-1$，因而(1)式为零. 当m和n均为奇数时，$(-1)^m\cdot(-1)^n=1$，因而(1)式等于

$$\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi.$$

但此被积函数在对称区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上为奇函数，故积分仍然为零。

总之，当m和n中至少有一个为奇数时，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy=0.$$

3978. 求：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy,$$

其中$f(x,y)$为连续函数。

解 利用积分中值定理，即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$$

$$=f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} dxdy=\pi\rho^2\cdot f(\xi,\eta),$$

其中点(ξ,η)为圆域$x^2+y^2\leqslant\rho^2$内的一点。显然，当$\rho\to 0$时，点$(\xi,\eta)\to O(0,0)$。于是，根据函数$f(x,y)$的连续性知：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)dxdy$$

$$=\lim_{\rho\to 0}f(\xi,\eta)=f(0,0).$$

3979. 设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^2}}dxdy,$$

求$F(t)$。

解 令$x=ut$，$y=vt$，则

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0<x<t\\0<y<t}} e^{\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy=\iint\limits_{\substack{0<u<1\\0<v<1}} t^2 e^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv.\quad(1)$$

于是，似乎应该有

$$F'(t)=\iint\limits_{\substack{0<u<1\\0<v<1}} 2te^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv$$

$$=\frac{2}{t}\iint\limits_{\substack{0<u<1\\0<v<1}} t^2e^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv=\frac{2}{t}F(t)\quad(t>0).$$

但这是错误的．实际上本题有问题，因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分．当$t>0$时，在$x>0$，$y=0$上（即$u>0$，$v=0$上）被积函数成为无穷，而且这个广义二重积分是发散的．这是因为，根据被积函数的非负性，有（参看§9）

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0<v\leqslant 1}} e^{\frac{u}{v^2}}\,du\,dv=\int_0^1 dv\int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}}\,du$$

$$=\int_0^1 v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)dv.\qquad(2)$$

对此积分，$v=0$是瑕点，由于被积函数$v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)$在$0\leqslant v\leqslant 1$上非负，且$\left(令\frac{1}{v^2}=t\right)$

$$\lim_{v\to+0} v^2\left[v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t-1}{t^2}=+\infty,$$

故瑕积分$\int_0^1 v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)dv$发散，且

$$\int_0^1 v^2\left(e^{\frac{1}{v^2}}-1\right)dv=+\infty.$$

由此，再根据（1）式与（2）式，得

$$F(t)\equiv+\infty \quad (\text{当} t>0 \text{时}).$$

因此，提出求$F'(t)$的问题是无意义的。

注意，若本题换为：设

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t}} e^{-\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy,$$

求$F'(t)$。这时得（作代换$x=ut$，$y=vt$）

$$F(t)=t^2\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\0\le v\le 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}\,du\,dv,$$

从而右端积分是收敛的（实际上可视为常义积分）。于是，

$$F'(t)=2t\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\0\le v\le 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}\,du\,dv$$

$$=\frac{2}{t}\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\0\le v\le 1}} t^2e^{-\frac{u}{v^2}}\,du\,dv=\frac{2}{t}F(t)\quad(t>0).$$

3980$^+$ 设

$$F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

求$F'(t)$。

解 作变量代换$x=u+t$, $y=v+t$ (t固定)，则

$$F(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}dudv. \quad (1)$$

今在积分号下求导数*)，得

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}dudv$$

$$=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$(-\infty<t<+\infty).$$

*) 积分号下求导数的合理性，证明如下：令

$$f(u,v,t)=\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2},$$

则

$$f_t'(u,v,t)=\frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2+(v+t)^2}}$$

$$((u,v)\neq(-t,\ -t)).$$

当$(u,v)=(-t,-t)$时，易知$f_t'(u,v,t)$不存在，但右导数存在且等于$\sqrt{2}$，左导数也存在且等于$-\sqrt{2}$。由于对任何数a, b，有$a^2+b^2\geqslant 2ab$，故$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，从而$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$。于是，

$$|f_t'(u,v,t)|\leqslant\sqrt{2}\quad((u,v)\neq(-t,-t)). \quad (2)$$

如果$|t|>\frac{1}{\sqrt{2}}$，这时$f(u,v,t)$，$f'_t(u,v,t)$（t固定）都是域$u^2+v^2\leqslant 1$上的连续函数，当然可在积分号下求导数，得

$$F'(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)\,dudv. \qquad (3)$$

但如果$|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$，则（3）式右端积分的被积函数$f'_t(u,v,t)$在积分域$u^2+v^2\leqslant 1$中的点$(u,v)=(-t,-t)$不连续.因此,不能立即断定（3）式的正确性.下面不论t为何值（$-\infty<t<+\infty$），直接证明（3）式成立. 令

$$g(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,t)\,dudv \quad (-\infty<t<+\infty). \qquad (4)$$

由（2）式知,$f'_t(u,v,t)$是有界的,且在域$u^2+v^2\leqslant 1$上至多有一个不连续点（t固定），故（4）式右端的积分存在. 实际上，利用（2）式以及$f'_t(u,v,t)$当$(u,v)\neq(-t,-t)$时的连续性，用（必要时，即$|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$时）挖掉以点$(-t,-t)$为中心的小圆域的方法，不难证明$g(t)$是$-\infty<t<+\infty$上的连续函数（详细证明留给读者）. 令

$$G(t)=\int_0^t g(s)\,ds \quad (-\infty<t<+\infty),$$

则

$$G'(t)=g(t) \quad (-\infty<t<+\infty). \qquad (5)$$

但

$$G(t)=\int_0^t ds \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f'_t(u,v,s)dudv$$

$$=\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant t}} f'_t(u,v,s)dudvds$$

$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} du\,dv\int_0^t f'_t(u,v,s)ds. \quad (6)$$

注意，（6）式中的运算是合理的，因为三维域$u^2+v^2\leqslant 1$，$0\leqslant s\leqslant t$（t固定）中，三元函数$f'_t(u,v,s)$有界且只在直线$u=v=-s$的一段上不连续，从而（6）式中的三重积分及两个累次积分都存在，故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f'_t(u,v,s)ds=f(u,v,t)-f(u,v,0). \quad (7)$$

事实上，若$(u,v)\neq(-t_1,-t_1)$（$t_1\in[0,t]$），则$f'_t(u,v,t)$是$0\leqslant s\leqslant t$上的连续函数（u,v固定），从而（7）式成立；若$(u,v)=(-t_1,-t_1)$（t_1是属于$[0,t]$的某数），则由$f(u,v,s)$对任何u,v,s的连续性，有

$$\int_0^t f'_t(u,v,s)ds=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{t_1-\varepsilon} f'_t(u,v,s)ds$$

$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{t_1+\varepsilon'}^t f'_t(u,v,s)\,ds$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[f(u,v,t_1-\varepsilon)-f(u,v,0)]$$

$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}[f(u,v,t)-f(u,v,t_1+\varepsilon')]$$
$$=f(u,v,t_1)-f(u,v,0)+f(u,v,t)-f(u,v,t_1)$$
$$=f(u,v,t)-f(u,v,0),$$

故（7）式恒成立．代入（6）式，得

$$G(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}[f(u,v,t)-f(u,v,0)]dudv$$
$$=F(t)-F(0)\quad(-\infty<t<+\infty).$$

由此，再注意到（5）式，即知$F'(t)$存在，且

$$F'(t)=G'(t)=g(t)$$
$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}f'_t(u,v,t)dudv\quad(-\infty<t<+\infty),$$

即（3）式成立．

3981．设

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)dxdy\quad(t>0),$$

求$F'(t)$．

解　令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则

$$F(t)=\int_0^t dr\int_0^{2\pi}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rd\varphi,$$

故得

$$F'(t)=\int_0^{2\pi}f(t\cos\varphi,t\sin\varphi)td\varphi.$$

注意，此题中应假定$f(x,y)$是连续函数．

3982．设$f(x,y)$是连续的，求证函数

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi}f(\xi,\eta)d\eta$$

满足方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

证 利用含参变量的常义积分求导数的公式，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)-(-1)f(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-x+y}^{x+y-x}f(x,\eta)d\eta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)+f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+\frac{1}{2}[f(x,x+y-x)+f(x,x-x+y)]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi$$

$$+f(x,y).$$

同理，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\int_0^x[f(\xi,x+y-\xi)-f(\xi,\xi-x+y)]d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\int_0^x[f'_y(\xi,x+y-\xi)-f'_y(\xi,\xi-x+y)]d\xi.$$

于是，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

证毕.

注意，显然本题还应假定$f'_y(x,y)$存在且连续.

3983．设函数$f(x,y)$的等位线是简单封闭曲线，$S(v_1, v_2)$是由曲线$f(x,y)=v_1$及$f(x,y)=v_2$所围成的域．证明

$$\iint\limits_{S(v_1,\ v_2)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

其中$F(v)$为由曲线$f(x,y)=v_1$与$f(x,y)=v_2$所包围的面积．

证 作$[v_1,v_2]$的任一分划T：

$$v_1=v'_0<v'_1<\cdots<v'_i<\cdots<v'_n=v_2.$$

令$d(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta v_i$，这里$\Delta v_i=v'_i-v'_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$．于是，由积分中值定理（这里假定了$f(x,y)$在$S(v_1, v_2)$上连续）知

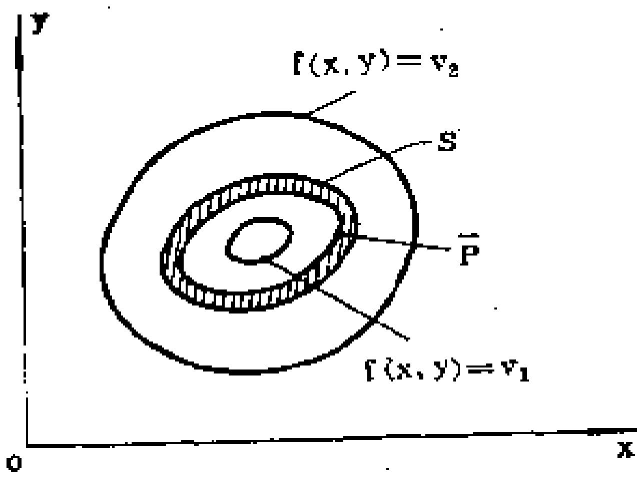

图 8.33

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{S(v'_{i-1},v'_i)} f(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)\ \Delta S_i,$$

其中ΔS_i表小环形域$S(v'_{i-1}, v'_i)$（如图8.33阴影部分所示）的面积，$\bar{P}(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)\in S(v'_{i-1},v'_i)$．

令$v_i^*=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$，则$v'_{i-1}\le v_i^*\le v'_i$．又显然（利用微分中值定理）有

$$\Delta S_i=F(v_i')-F(v_{i-1}')=F'(\bar{v}_i)(v_i'-v_{i-1}')$$
$$=F'(\bar{v}_i)\Delta v_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $v_{i-1}'\leqslant\bar{v}_i\leqslant v_i'$. 这里我们假定了$F'(v)$在$[v_1,v_2]$上存在且可积，于是它有界，即

$$|F'(v)|\leqslant M=\text{常数}\ (v_1\leqslant v\leqslant v_2). \qquad (1)$$

我们有

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}v_i^* F'(\bar{v}_i)\Delta v_i=I_1+I_2, \qquad (2)$$

其中

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_iF'(\bar{v}_i)\Delta v_i,\quad I_2=\sum_{i=1}^{n}(v_i^*-\bar{v}_i)F'(\bar{v}_i)\Delta v_i.$$

由于$F'(v)$在$[v_1,v_2]$上可积，故$vF'(v)$也在$[v_1,v_2]$上可积. 因此，

$$\lim_{d(T)\to 0}I_1=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_iF'(\bar{v}_i)\Delta v_i$$
$$=\int_{v_1}^{v_2}vF'(v)dv. \qquad (3)$$

另一方面，由（1）式知

$$|I_2|\leqslant Md(T)\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i=M(v_2-v_1)d(T),$$

故

$$\lim_{d(T)\to 0}I_2=0. \qquad (4)$$

现在（2）式两端令$d(T)\to 0$取极限（注意，（2）式左端是常数），并注意到（3）式与（4）式，即得

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv.$$

证毕.

应当指出，正如上面所说的，本题应假定$f(x,y)$在$S(v_1,v_2)$上连续，而$F'(v)$在$[v_1,v_2]$上存在并且可积.

§2. 面积的计算法

Oxy平面上域S的面积由公式

$$S=\iint\limits_{S} dx\,dy$$

所给出.

求下列曲线所界的面积：

3334. $xy=a^2$，$x+y=\frac{5a}{2}$ $(a>0)$.

解 两曲线的交点为$A\left(\frac{a}{2},\ 2a\right)$和$B\left(2a,\frac{a}{2}\right)$(图8.34)，故所求面积为

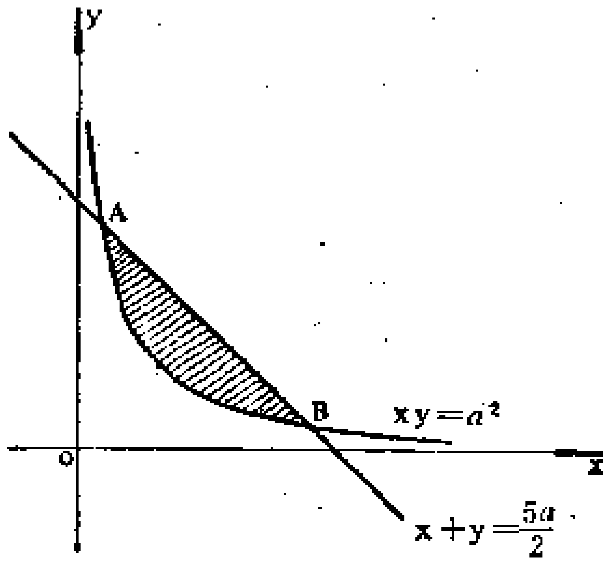

图 8.34

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5a}{2}-x} dy=\frac{15}{8}a^2-2a^2\ln 2.$$

3985. $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$ $(p>0,q>0)$.

解 两曲线的交点为 A

$\left(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq}\right)$ 和 B

$\left(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq}\right)$(图8.35),

故所求面积为

$$S=2\int_0^{\sqrt{pq}} dy\int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}} dx$$

$$=\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$$

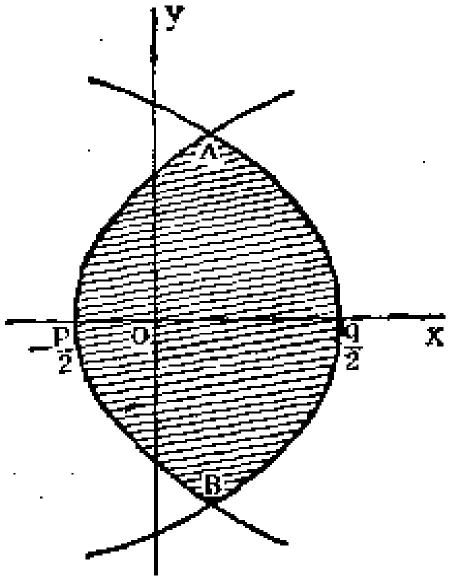

图 8.35

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2$

$(a>0)$.

解 如图8.36所示.

所求面积的域为:

$-a\leqslant x\leqslant a$,

$x-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant x+\sqrt{a^2-x^2}$. 于是,

所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}dx\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}dy$$

$$=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t dt$$

$$=4\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^2.$$

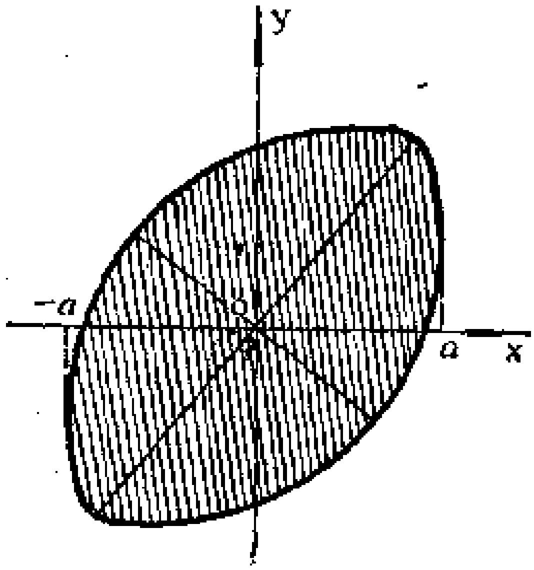

图 8.36

变换为极坐标，以计算由下列曲线所界的面积：

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$；$x^2+y^2\geqslant a^2$.

解 曲线的极坐标方程为 $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ 及 $r\geqslant a$.

它们的交点（在第一象限内）为 $\left(a，\frac{\pi}{6}\right)$，如图8.37所示. 利用对称性，得所求面积为

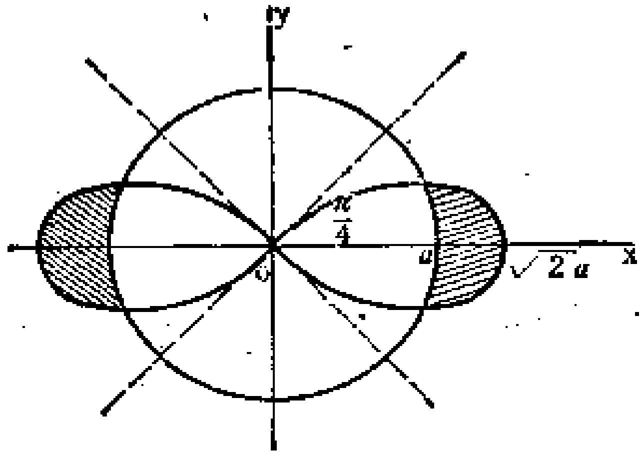

图 8.37

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_a^{\sqrt{2a^2\cos 2\varphi}}rdr=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos 2\varphi-a^2)d\varphi$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

3988. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$；$x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

解 将方程化为极坐标方程，得

$$(r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta)^2=r^2,$$

即

$$r^2=\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

曲线所界的面积为

$$S=\iint_S rdrd\,\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}.$$

由于

$$\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\right),$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \operatorname{tg}\frac{\theta+\frac{\pi}{4}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}-\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}-\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)}{2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2}}\ {}^{*)}$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}(\sin\theta-\cos\theta)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{6}.$$

*) 利用2053题的结果，其中

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\ \lambda_2=\frac{3}{2},\ A=2,\ B=0.$$

3989. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$.

解 显然曲线关于Ox轴对称，故只要求出 $y\geqslant 0$ 的部分．化为极坐标，方程为

$$r=a\cos\theta(4\cos^2\theta-3).$$

由于必须$x^3-3xy\geqslant 0$，故$\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\geqslant 0$．因此，$\cos\theta\geqslant 0$ 且 $\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\theta\leqslant 0$ 且 $\cos\theta\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\frac{\pi}{6}$，$-\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{2}$.

于是，在Ox轴的上方部分（$y\geqslant 0$）为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\text{和}\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\frac{\pi}{6}.$$

由此可知

$$S=\iint\limits_{S} r\,dr\,d\theta=2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}r^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{\pi}{6}}r^2d\theta\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2d\theta$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2d\theta.$$

在上式右端第二个积分中作代换$\theta=\pi-\varphi$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}a^2\cos^2\theta\,(4\cos^2\theta-3)^2d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2 d\theta,$$

故

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2 d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^6\theta-24\cos^4\theta+9\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\left(16\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\frac{\pi}{2}-24\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\frac{\pi}{2}+9\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}.$$

3990. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$; $(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2(a>0)$.

解 将方程化为极坐标方程，得（双纽线）

$$r^4=8a^2r^2\cos\theta\sin\theta,$$

即

$$r=2a\sqrt{\sin2\theta};$$

与圆周

$$(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta-a)^2=a^2,$$

即

$$r=a(\cos\theta+\sin\theta)\pm a\sqrt{\sin2\theta}.$$

显然，两条曲线关于射线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 是对称的. 令

$$2a\sqrt{\sin2\theta}=a(\cos\theta+\sin\theta)-a\sqrt{\sin2\theta},$$

解得交点的极角

$$\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{S} r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\{(2a\sqrt{\sin 2\theta})^2-[a(\cos\theta+\sin\theta)-a\sqrt{\sin 2\theta}]^2\}d\theta$$

$$=\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}[2a^2\sin 2\theta+2a^2(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}-a^2]d\theta.$$

注意到

$$\int(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)+C^{*)}.$$

即得

$$S=a^2[-\cos 2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}+\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)-\theta]\Big|_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=a^2\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{14}}{4}\sqrt{\frac{1}{8}}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right]$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^{**)}.$$

*) 利用三角恒等式

$$\sqrt{\sin 2x}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right)\sqrt{\operatorname{tg}x},$$

$$\sqrt{\sin 2x}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right)\sqrt{\operatorname{ctg}x}$$

化为二项型微分的积分．参看A.Ф.Тихофеов《ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ》第五章§15.

**) 容易证明：

$$\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}=\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

事实上，我们有

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{14}}{32}+\frac{5\sqrt{14}}{32}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

根据公式

$$x=ar\cos^\alpha\varphi,\quad y=br\sin^\alpha\varphi\ (r\geqslant 0)$$

引入普遍的极坐标(其中a, b和α为以适当的方法选出的常数，且$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$)，以求由下列曲线所界的面积(假定参数是正的)：

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

解 不失一般性，设$h>0$, $k>0$.令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r=\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi.$$

由于$r\geqslant0$，故有

$$\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi\geqslant0,$$

因此，首先必须$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 同时，应有$\cos\varphi\geqslant0$且

$\operatorname{tg}\varphi\geqslant-\frac{ak}{bh}$或者$\cos\varphi<0$且$\operatorname{tg}\varphi\leqslant-\frac{ak}{bh}$.

从而，极角φ应满足不等式

$$-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}\leqslant\varphi\leqslant\pi-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}.$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S}abr\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}\left(\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\sin\varphi\right)^2d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}\sin^2(\varphi+\alpha_0)\,d\varphi,$$

其中$\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}$.从而，我们有

$$S=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\left[\frac{\varphi+\alpha_0}{2}-\frac{1}{4}\sin2(\varphi+\alpha_0)\right]\Bigg|_{-\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}^{\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

解 令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint\limits_{S} abr\,dr\,d\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^4\sin^4\varphi+2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi.$$

根据И.М.雷日克、И.С.格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2.125、2.126知：

$$\int\frac{\cos^4\varphi\,d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{1}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}d(\mathrm{tg}\varphi)$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\varphi}{3(1+\mathrm{tg}^3\varphi)}+\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\mathrm{tg}\varphi+1)^2}{\mathrm{tg}^2\varphi-\mathrm{tg}\varphi+1}\right.$$

$$\left.+\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2\mathrm{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4\cos^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$
=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}+\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}
$$

$$
=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4;
$$

又

$$
\int\frac{\sin^4\varphi d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)
$$

$$
=\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}-\frac{2}{3}\int\frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}d(\operatorname{tg}\varphi)
$$

$$
=\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}-\frac{2}{3}\left\{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}+C,
$$

从而

$$
\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{b}{h}\right)^4\sin^4\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi
$$

$$
=\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4\left\{\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}-\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{3}\right.
$$

$$
-\frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^2}{\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}\varphi+1}\right.
$$

$$
\left.\left.-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi-1}{\sqrt{3}}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}
$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4;$$

此外，还有

$$\int\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}+C,$$

从而

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=ab\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2.$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{a}{h}\right)^4+\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b}{k}\right)^4+\frac{ab}{3}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{b}{k}\right)^2$$

$$=\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right].$$

2993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

解 方法一

令

$x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi,$

则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint_S abrdrd\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi.$$

注意到

$$\int\frac{\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi=\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}+C,$$

$$\int\frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}d\varphi=\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\int\frac{(\operatorname{tg}\varphi-1)(\operatorname{tg}\varphi+1)+1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^2}d(\operatorname{tg}\varphi)-2\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$+\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^4}d(\operatorname{tg}\varphi)$$

$$=-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi}+\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}+C,$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$+\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\left[-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi}+\frac{1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^2}\right.$$

$$-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}\Bigg]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

方法二

令

$$x=hr\cos\varphi,\quad y=kr\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\cos\varphi+\frac{k}{b}\sin\varphi\right)^4}$$

$$=\left[\frac{a^2b^2}{(hb)^2+(ka)^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4(\varphi+\alpha)}\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{hb}{ka}$. 于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint_S hkrdrd\varphi=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi+\alpha)}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[-\frac{1}{6}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin^3(\varphi+\alpha)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}{}^{*)}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{3}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\Big]$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\cdot\frac{1}{6}\frac{[(hb)^2+(ka)^2]^{3**)}}{(hbka)^3}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*) 参看2012题的结果.

**) 由 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{hb}{ka}$ 知:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{ka}{hb},\quad \sin\alpha=\frac{hb}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{ka}{\sqrt{(hb)^2+(ka)^2}}.$$

3994. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

解 令

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}.$$

由于

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2\cos^2\varphi-\left(\frac{b}{k}\right)^2\sin^2\varphi\geqslant 0,$$

$$\left(\frac{ak}{bh}\right)^2\geqslant\operatorname{tg}^2\varphi,$$

注意到$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，可知极角的变化区间为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}.$$

于是，注意利用上题中两个不定积分，便得到曲线所界的面积为

$$S=\iint_{S} abrdrd\varphi=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} r^{2}d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^{2}\int_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}\frac{\cos^{2}\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{4}}d\varphi$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^{2}\int_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}\frac{\sin^{2}\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{4}}d\varphi$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^{2}\left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^{3}}\right]\Bigg|_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}$$

$$-\frac{ab}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^{2}\left[-\frac{3\operatorname{tg}^{2}\varphi+3\operatorname{tg}\varphi+1}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^{3}}\right]\Bigg|_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{ak}{bh}}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^{2}\left[\frac{-1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^{3}}+1\right]$$

$$+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^{2}\left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^{2}+3\left(\frac{ak}{bh}\right)+1}{\left(1+\frac{ak}{bh}\right)^{3}}-1\right]$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{(ak)^3+3(ak)^2bh+3ak(bh)^2}{(ak+bh)^3}$$

$$+\frac{ab}{6}\left(\frac{b}{k}\right)^2\frac{-(ck)^3}{(ak+bh)^3}$$

$$=\frac{a^4bk}{6h^2(ak+bh)^3}(a^2k^2+3akbh+2b^2h^2)$$

$$=\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}.$$

3395. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$；$x=0$，$y=0$.

解 令

$$x=ar\cos^8\varphi,\quad y=br\sin^8\varphi,$$

则方程化为

$$r=1\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲线所界的面积为

$$S=\iint_S 8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$=4ab\int_0^1 u^7(1-u^2)^3du$$

$$=4ab\int_0^1(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13})du$$

$$=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)$$

$$=\frac{ab}{70}.$$

进行适当的变量代换，求由下列曲线所界的面积：

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

解 作变换：$x+y=u$, $\frac{y}{x}=v$，则 $a\leqslant u\leqslant b$, $\alpha\leqslant v\leqslant\beta$，且有

$$|I|=\frac{u}{(1+v)^2}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_a^b u\,du\int_\alpha^\beta\frac{dv}{(1+v)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0;\ y>0)$.

解 作变换：$xy=u$, $\frac{y}{x}=v$，则 $a^2\leqslant u\leqslant 2a^2$, $1\leqslant v\leqslant 2$，且有

$$|I|=\frac{1}{2v}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2}du\int_1^2\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}a^2\ln 2.$$

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\ 0<r<s)$.

解 作变换：$\frac{y^2}{x}=u$, $\frac{x^2}{y}=v$，则 $2p\leqslant u\leqslant 2q$, $2r\leqslant v\leqslant 2s$，且有

$$|I|=\frac{1}{3}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{1}{3}\int_{2p}^{2q}du\int_{2r}^{2s}dv=\frac{4}{3}(q-p)(s-r).$$

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$，$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$，$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$，$\frac{4x}{a}=\frac{y}{b}$

（$a>0$，$b>0$）。

解 作变换：$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u$，$\frac{x}{y}=v$，即

$$x=\frac{u^2v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},\quad y=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则$1\leqslant u\leqslant 2$，$\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}$，且有

$$|I|=\frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_1^2 2u^3du\int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}}\frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\frac{2at\,dt}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}\ ^{*)}$$

$$=15a\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+t\right)^4}\right]dt$$

$$=15a\cdot\left(\frac{7b}{72}-\frac{37b}{648}\right)=\frac{65ab}{108}.$$

*) 作代换$v=at^2$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$，其中$\lambda$取下列各值：$\frac{1}{3}c^2$，$\frac{2}{3}c^2$，$\frac{4}{3}c^2$，$\frac{5}{3}c^2$（$x>0$，$y>0$）。

解 方程$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$可变为

$$\lambda^2-(x^2+y^2+c^2)\lambda+c^2x^2=0.$$

将λ作为未知量解方程，不妨记方程的两个解为λ及μ，则

$$\lambda=\frac{x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

$$\mu=\frac{x^2+y^2+c^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换，将(x, y)变为(λ, μ)。易知

$$\left|\frac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}\right|=\frac{4c^2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}{\lambda-\mu},$$

从而

$$\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}=\frac{1}{\dfrac{D(\lambda,\mu)}{D(x,y)}}$$

$$=\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}dxdy=\iint\limits_{\substack{\frac{4c^2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5c^2}{3}\\ \frac{c^2}{3}\leqslant\mu\leqslant\frac{2c^2}{3}}}\frac{\lambda-\mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2-\mu)(\lambda-c^2)}}d\lambda\,d\mu$$

$$=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{u-v}{\sqrt{uv(1-v)(u-1)}}du\,dv$$

$$=\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{u-1}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}}$$

$$-\frac{c^2}{4}\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{1-v}}.$$

由于

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u-1}}du=\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{2}{3}+\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}=2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

故最后得

$$S = \frac{c^2}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$-\frac{c^2}{4}\left[\left(2\lg\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{c^2}{6}(\sqrt{10} - 2)\arcsin\frac{1}{3}.$$

4001. 求由椭圆

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$$

（其中 $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$）所界的面积，

解 作变换：$a_1x + b_1y + c_1 = u$，$a_2x + b_2y + c_2 = v$，则椭圆所围成的域变为$u^2 + v^2 \leqslant 1$，且有

$$|I| = \frac{1}{|\delta|}.$$

于是，所求的面积为

$$S = \frac{1}{|\delta|}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} du\,dv = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

4002. 求由椭圆

$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2 u}=c^2 \quad (u=u_1,\ u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2 \quad (v=v_1,\ v_2)$$

$$(0<u_1<u_2;\ 0<v_1<v_2;\ x>0,\ y>0)$$

所界的面积.

解 作变换：$x=c\,\mathrm{ch}u\cos v$，$y=c\,\mathrm{sh}u\sin v$，则有

$$|I|=|c^2\mathrm{ch}^2u-c^2\cos^2 v|.$$

因为$\mathrm{ch}^2u\geqslant 1\geqslant\cos^2 v$，故所求的面积为

$$S=c^2\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}(\mathrm{ch}^2u-\cos^2 v)\,du\,dv$$

$$=c^2\Big[(v_2-v_1)\int_{u_1}^{u_2}\frac{1+\mathrm{ch}2u}{2}du-(u_2-u_1)\cdot\int_{v_1}^{v_2}\cos^2 v\,dv\Big]$$

$$=\frac{c^2}{4}\big[(v_2-v_1)(\mathrm{sh}2u_2-\mathrm{sh}2u_1)-(u_2-u_1)\cdot(\sin 2v_2-\sin 2v_1)\big].$$

4003. 求用平面$x+y+z=b$与曲面$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$相截所得截断面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程，作变量代换：

$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z,$$

$$z'=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z,$$

这是一个正交变换，故 $Ox'y'z'$ 成为一新的直角坐标系．在新的坐标系下，平面方程为

$$z'=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)=\frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$y=\frac{-\sqrt{6}}{3}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

故有

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz&=\frac{1}{2}[(x-y)^2\\&\quad+(y-z)^2+(z-x)^2]\\&=\frac{3}{2}(x'^2+y'^2).\end{aligned}$$

从而，曲面方程变为

$$x'^2+y'^2=\frac{2}{3}a^2.$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{x'^2+y'^2\leq\frac{2}{3}a^2}dx'dy'=\frac{2}{3}\pi a^2.$$

4004．求用平面$z=1-2(x+y)$与曲面$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$相截所得截断面之面积．

解 平面被曲面所截部分记为S，它在Oxy平面上的投影记为D．由于平面$z=1-2(x+y)$的法线之方向余弦为$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{1}{3}$，故$D=S\cos\gamma$

$=\frac{1}{3}S$，从而$S=3D$，显然D为Oxy平面上由曲线$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$+\frac{1}{1-2(x+y)}=0$（也即$2x^2+2y^2+3xy-x-y=0$）所界的区域．作变量代换

$$x=u+v+\frac{1}{7},\quad y=u-v+\frac{1}{7}.$$

于是，$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$，且曲线$2x^2+2y^2+3xy-x-y=0$变为$7u^2+v^2-\frac{1}{7}=0$，这是一个椭圆（在uv平面上）．从而，即得

$$D=\iint\limits_D dxdy=2\iint\limits_{49u^2+7v^2\leqslant 1}dudv$$

$$=2\cdot\pi\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=\frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

由此，最后得

$$S=3D=\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§3. 体积的计算法

设柱体上顶是连续的曲面 $z=f(x,y)$，下底是平面 $z=0$，侧面为从平面 Oxy 中的可求面积的区域 Ω（图8.38）竖起的垂直柱面所界定.

柱体的体积等于

$$V=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy.$$

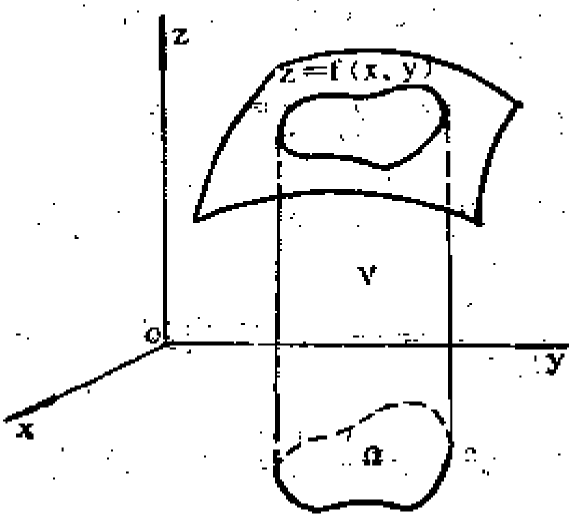

图 8.38

4005. 试绘出一物体，其体积等于积分

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy.$$

解 积分域为三角形

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1-x.$$

柱体上顶为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$. 物体的形状如图8.39所示.

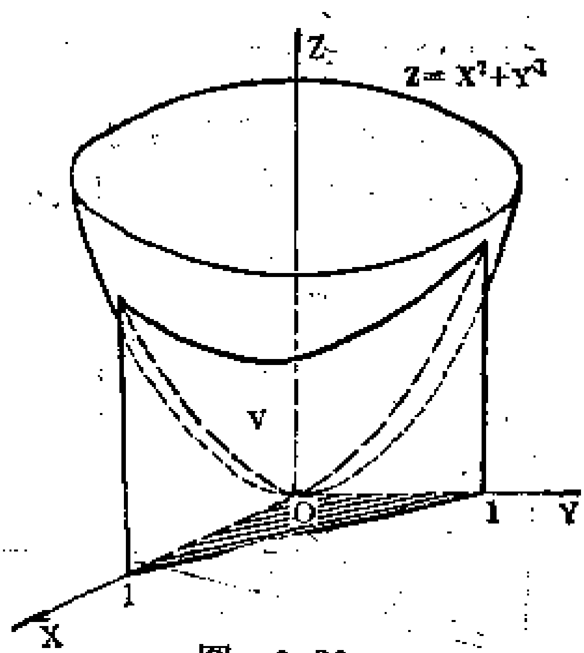

图 8.39

4006. 描出下列二重积分所表示的体积:

(a) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} (x+y)\,dx\,dy$;

(б) $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$;

(в) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$;

(г) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

(д) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}} \sqrt{xy}\,dx\,dy$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

解 (a) 积分域为三角形

$$0 \leqslant x+y \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

柱体的上顶为平面 $z=x+y$（图8.40）。

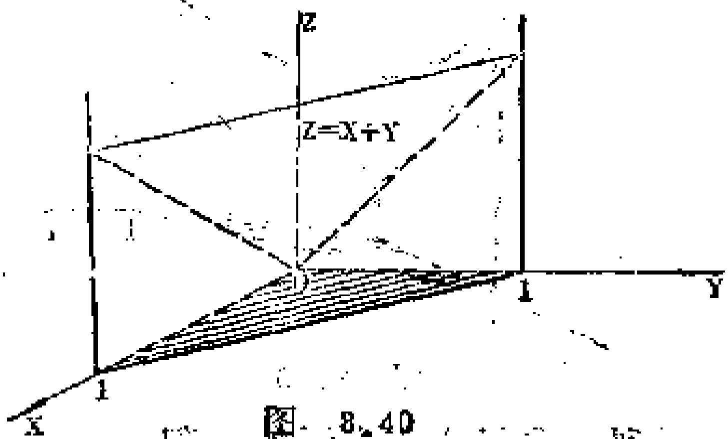

图 8.40

(б) 积分域为椭圆

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1,$$

即立体的底面，顶面为椭球面 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$（图8.41）。

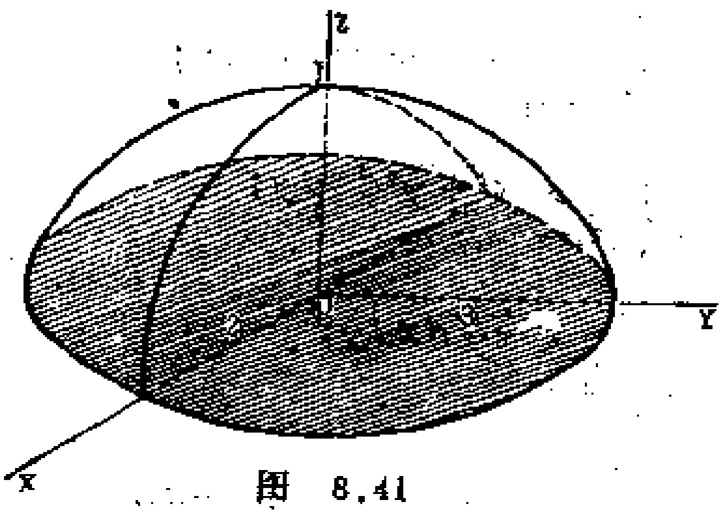

图 8.41

(в) 积分域为由直线

$x+y=1$，$x+y=-1$，$x-y=1$，$y-x=1$

围成的正方形．柱体的顶面为旋转抛物面$z=x^2+y^2$．图8.42中仅画了第一卦限部分的体积．

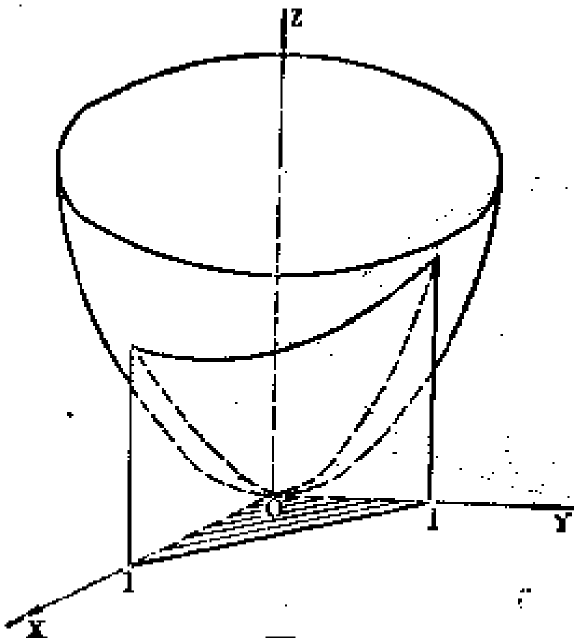

图 8.42

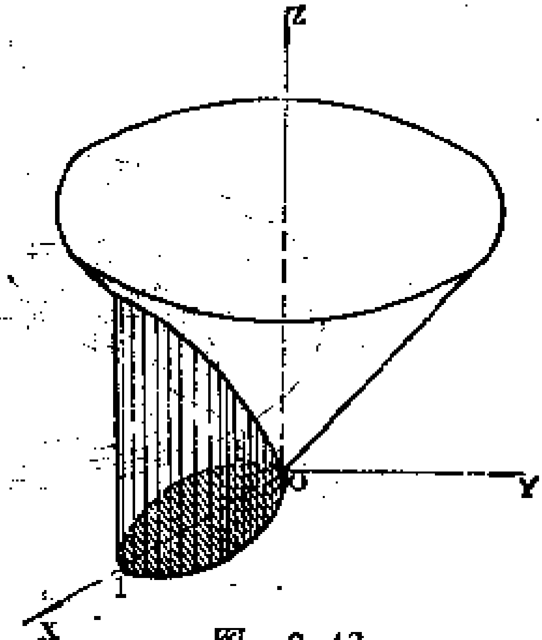

图 8.43

(Г) 积分域为圆

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

柱体的顶面为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$（图8.43）．

(Д) 积分域为梯形

$1\leqslant x\leqslant 2$，

$x\leqslant y\leqslant 2x$．

柱体的顶面为双曲抛物面$z=\sqrt{xy}$（图8.44）．

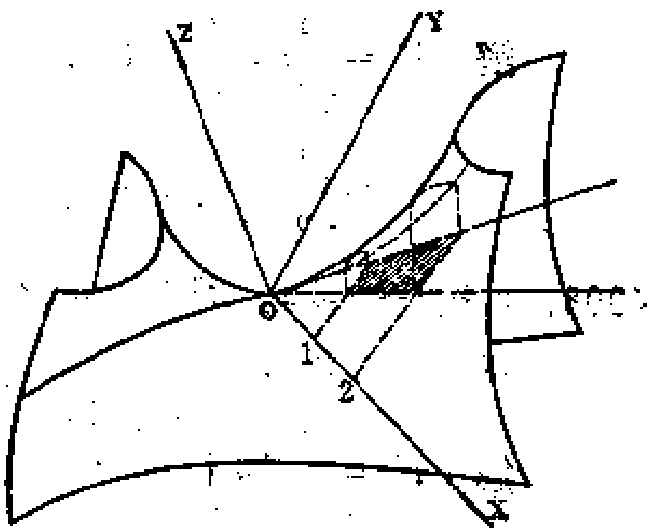

图 8.44

(e) 积分域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1.$$

即立体的底面，顶面是由正弦曲线$z=\sin\pi x$绕Oz轴旋转一周而得的旋转曲面（图8.45）.

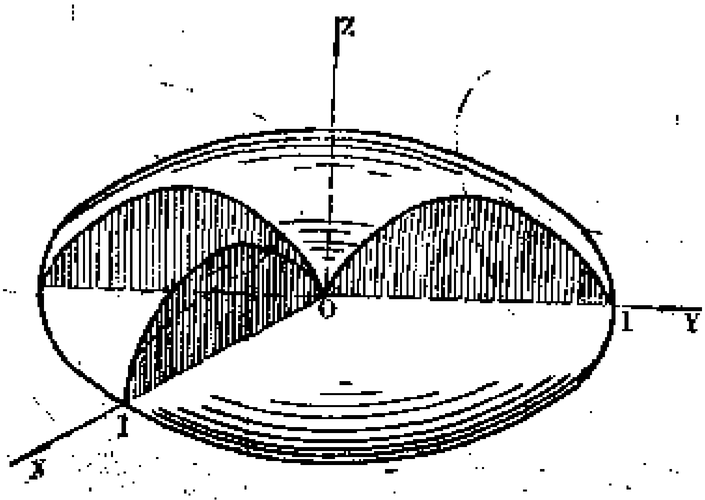

图 8.45

求由下列曲面所界的体积：

4007. $z=1+x+y$，$z=0$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$.

解 $V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1+x+y)dy$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{5}{6}.$$

4008. $x+y+z=a$，$x^2+y^2=R^2$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ $(a\geqslant R\sqrt{2})$.

解 $V=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(a-x-y)dy$

$$=\int_0^R\left[(a-x)\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R^2-x^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^R a\sqrt{R^2-x^2}\,dx-\int_0^R\left(x\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2-x^2}{2}\right)dx=\frac{\pi aR^2}{4}-\frac{2R^3}{3}.$$

4009. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

解 $V=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=\frac{88}{105}$.

4010. $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x+y|\leqslant\frac{\pi}{2}$, $|x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

解 因函数$z=\cos x\cdot\cos y$的图形关于Oyz平面对称，而积分域（图8.46）关于Oy轴对称，故所求的体积为

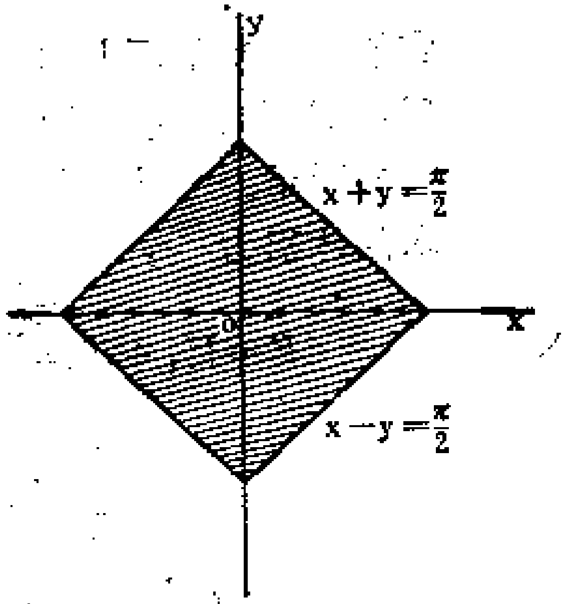

图 8.46

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos x\cdot\cos y\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=4\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x}$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=\pi$.

解 $V=\int_0^{\pi}dx\int_0^{x}\sin\frac{\pi y}{2x}dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$.

4012. $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

解 体积V由两部分组成:

V_1: $0\leqslant x\leqslant 1$,

$0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{1+x}$,

$z=xy$.

V_2: $0\leqslant x\leqslant 1$,

$\frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x$,

$z=1-x-y$.

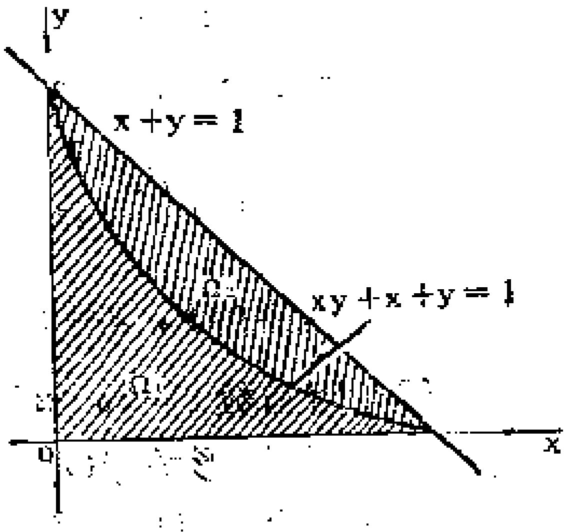

图 8.47

它们在Oxy平面上的射影域Ω_1及Ω_2如图8.47所示. 于是，所求的体积为

$$V=V_1+V_2=\int_0^1 x dx\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy$$

$$+\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)dy$$

$$=\left(-\frac{11}{4}+4\ln 2\right)+\left(\frac{25}{6}-6\ln 2\right)=\frac{17}{12}-2\ln 2.$$

变换成极坐标，以求由下列曲面所界的体积:

4013. $z^2=xy$, $x^2+y^2=a^2$.

解 因为$z=\sqrt{xy}$，故所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}\sqrt{xy}\,dxdy$$

$$= 4\int_0^a dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\cdot r^2 d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\sin^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)^{*)} = \frac{2}{3}a^3\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}a^3\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}a^3\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

*) 利用3856题的结果.

4014. $z=x+y$, $(x^2+y^2)^2=2xy$, $z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

解 令$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则方程

$$(x^2+y^2)^2=2xy\text{及}z=x+y$$

变为

$$r^2=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin2\varphi\text{及}z=r(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\sin2\varphi}}r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)dr$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{\frac{5}{2}}\varphi\cos^{\frac{3}{2}}\varphi+\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot B\left(\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\right)^{*)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

*) 利用3856题的结果.

4015. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

解 令$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则方程

$$x^2+y^2=x, \quad x^2+y^2=2x\text{及}z=x^2+y^2$$

变为

$$r=\cos\varphi, \quad r=2\cos\varphi\text{及}z=r^2.$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r^3dr$$

$$=\frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16\cos^4\varphi-\cos^4\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45}{32}\pi.$$

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\geqslant a|x|$ $(a>0)$.

解 只须计算由下列曲面所围成的体积:

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2\leqslant a|x|.$$

若引用极坐标，则

$$r^2+z^2=a^2, \quad r^2\leqslant a|r\cos\varphi|,$$

其体积为

$$V_1=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\cdot\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

$$=-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}-\left(\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}\right)=\frac{16a^3}{9}.$$

4017. $x^2+y^2-az=0$，$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，$z=0$ $(a>0)$.

解 若引用极坐标，则有

$$z=\frac{r^2}{a},\quad r^2=a^2\cos 2\varphi\ \ (a>0).$$

于是，利用对称性知，所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\frac{r^2}{a}\cdot r\,dr$$

$$=c^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{\pi a^3}{8}.$$

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$.

解 利用对称性，得所求的体积为

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-R^2}).$$

4019. $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $x^2+y^2=a^2$, $y=x\operatorname{tg}\alpha$, $y=x\operatorname{tg}\beta$

$(a>0,\ c>0,\ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$.

解 所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}dxdy$$

$$=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_0^a cr\cos\frac{\pi r}{2a}dr$$

$$=c(\beta-\alpha)\left[\frac{2ar}{\pi}\sin\frac{\pi r}{2a}+\frac{4a^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi r}{2a}\right]\Big|_0^a$$

$$=2a^2c(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\right)=\frac{2a^2c(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}.$$

4020. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

解 立体的射影域的围线为$x^2+y^2=x+y$或

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. 若引用代换$x=\frac{1}{2}$

$+r\cos\varphi$, $y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$, 则有

$$z=r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi),\ z=1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，所求的体积为

$$V=\iint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}}[(x+y)-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big\{[1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]$$

$$-\left[r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\Big\}rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{8}.$$

求由下列曲面所界的体积（假定参数是正的）：

4021. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

解 曲面的交线在Oxy平面上的射影为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$. 令$x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, 则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\text{及}z=cr\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega}\left[c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]dxdy.$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}abr(c\sqrt{1-r^2}-cr)dr$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)dr$$

$$=-\frac{1}{3}abc\int_0^{2\pi}\left[r^3-(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).$$

4022. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=\pm c\sqrt{1+r^2}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}2c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 2abcr\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc(2\sqrt{2}-1).$$

4023. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $z=0$.

解 立体在Oxy平面上的射影域的界线为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，即$\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. 若令$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}+r\cos\varphi$，$\frac{y}{b}=\frac{1}{2}+r\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}} c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r\left[\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2\right]dr$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{16}\right]d\varphi$$

$$=abc\cdot\frac{3\cdot2\pi}{16}=\frac{3}{8}\pi abc.$$

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1$, $z=0$.

解 若令$x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为

$$z=c(1-r^4)\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abc\,r(1-r^4)\,dr=\frac{2}{3}\pi abc.$$

4025. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$。

解 下面计算位于第一卦限部分的体积。

令 $x=ar\cos^2\varphi$，$y=br\sin^2\varphi$，则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 1\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega} c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 abc\sin 2\varphi\cdot\sqrt{1-r^2}\,rdr$$

$$=abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\right)$$

$$=\frac{abc}{3}.$$

4026. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

解 令

$x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，

则方程化为

$$z=\pm c\sqrt{1-r^2},$$

$$r^2=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$$

$$=\cos 2\varphi\ \Big(因 r^2=\cos 2\varphi\geqslant 0,$$

$$故 -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{4}\Big).$$

于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V=8c\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{1-r^2}\,rdrd\varphi$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}(1-\sqrt{8}\sin^3\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{8abc}{3}\left(\varphi+\sqrt{8}\cos\varphi-\frac{\sqrt{8}}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8abc}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\frac{2abc}{9}(3\pi+20-16\sqrt{2}).$$

4027. $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$.

解 由于 $z=\pm\sqrt{xy}$，又所界立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由直线 $x+y=a$，$x+y=b$，$x=0$ 及 $y=0$ 围成. 于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V=2\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}\,dxdy$$

$$=2\left(\int_0^a dx\int_{a-x}^{b-x}\sqrt{xy}\,dy+\int_a^b dx\int_0^{b-x}\sqrt{xy}\,dy\right)$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^a\left[\sqrt{x(b-x)^3}-\sqrt{x(a-x)^3}\right]dx$$

$$+\frac{4}{3}\int_a^b\sqrt{x(b-x)^3}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,dx$$

$$-\frac{4}{3}\int_0^a(a-x)\sqrt{a(a-x)}\,dx.$$

令 $x=b\sin^2 t$，可得

$$\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,dx$$

$$=2b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$

$$=2b^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\,dt\right)$$

$$=2b^3\left(\frac{3\cdot1}{4\cdot2}-\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}\pi b^3;$$

同理，有

$$\int_0^a(a-x)\sqrt{x(a-x)}\,dx=\frac{1}{16}\pi a^3.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi b^3}{16}-\frac{\pi a^3}{16}\right)=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).$$

4028. $z=x^2+y^2$，$xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=\frac{x}{2}$，

$y=2x$, $z=0$.

解 曲面所界的立体在Oxy平面上的射影域Ω由曲线$xy=a^2$、$xy=2a^2$和直线$y=\frac{x}{2}$、$y=2x$围成，利用对称性，曲面所界体积可表示为

$$V=2\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=2\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy.$$

作变量代换

$$xy=ua^2,\quad y=vx,$$

则积分域Ω变为长方形域

$$1\leqslant u\leqslant 2,\quad \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2,$$

且$|I|=\frac{a^2}{2v}$，$z=x^2+y^2=a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)$.

于是，所求的体积为

$$\begin{aligned}V&=2\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy\\&=2\iint\limits_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2}}a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)\frac{a^2}{2v}dudv\\&=a^4\int_1^2 udu\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)dv=\frac{9}{2}a^4.\end{aligned}$$

4029. $z=xy$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$, $z=0$.

解 曲面所界立体V在Oxy平面上的射影域Ω由曲线$x^2=y$、$x^2=2y$、$y^2=x$及$y^2=2x$围成.

我们有

$$V=\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=\iint_{\Omega} xy\,dx\,dy.$$

作变量代换

$$x=uy^2,\quad y=vx^2,$$

或

$$x=u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}},\quad y=u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}},$$

则积分域Ω变为正方形域

$$\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 1,\quad \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 1,$$

且$|I|=\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}$. 于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega} xy\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-3}v^{-3}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-3}du\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

4030. $z=c\sin\frac{\pi xy}{a^2}$, $z=0$, $xy=a^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<\alpha<\beta;\ x>0)$.

解 曲面所界的立体在Oxy平面上的投影域Ω由曲线$xy=a^2$和直线$y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(x>0)$围成. 于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=c\iint_{\Omega}\sin\frac{\pi xy}{a^2}\,dx\,dy.$$

作变量代换 $x=ar\cos\varphi$，$y=ar\sin\varphi$，则 $|I|=a^2r$. 于是，

$$V=\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=c\iint_{\Omega}\sin\frac{\pi xy}{a^2}\,dx\,dy$$

$$=a^2c\int_{\operatorname{arc\,tg}\alpha}^{\operatorname{arc\,tg}\beta}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}}\sin(\pi r^2\sin\varphi\cos\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{a^2c}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,tg}\alpha}^{\operatorname{arc\,tg}\beta}\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{a^2c}{\pi}\ln\operatorname{tg}\varphi\Big|_{\operatorname{arc\,tg}\alpha}^{\operatorname{arc\,tg}\beta}=\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

4031. $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$，$z=0$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 围成. 于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=\iint_{\Omega}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-x)+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{35}(1-x)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{4}{35}=\frac{8}{35}.$$

4032. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$，$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$，$z=0$.

解 令

$$x=ar\cos^3\varphi,\quad y=br\sin^3\varphi,$$

则方程化为

$$z=c[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)],$$

$$r=1\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

于是，利用对称性知，曲面所界的体积为

$$V=4\iint_{\Omega}z\,dxdy$$

$$=12abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1[1-r^2(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)]\cdot r\cos^2\varphi\sin^2\varphi drd\varphi$$

$$=12abc\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right]$$

$$=6abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right)$$

$$=6abc\left[\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{10}\cdot\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{3\pi abc}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{105}{1920}\right)=\frac{75}{256}\pi abc.$$

4033. $z=c\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$, $z=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=a\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$ $(y\geqslant 0)$.

解 令

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

则方程化为

$$z=c\varphi,$$

$$r=a\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲面所界的体积为

$$V=\iint_{\Omega}zdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\varphi}c\varphi rdrd\varphi$$

$$=\frac{a^2c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^3d\varphi=\frac{a^2c}{8}\varphi^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^4a^2c}{128}.$$

4034. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ $(n>0)$.

解 曲面方程可表示为

$$z=c\sqrt[n]{1-\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)}.$$

若令

$$x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,\quad y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

则曲面所界的体积为

$$V=c\iint_{\Omega}\sqrt[n]{1-\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)}dxdy$$

$$=\frac{2abc}{n}\int_0^1\sqrt[n]{1-r^n}rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi\sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi d\varphi.$$

若令$r^n=t$可得

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n}\, r dr=\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{2}{n}-1} dt$$

$$=B\left(\frac{1}{n}+1,\ \frac{2}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

令 $\sin^2\varphi=t$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}}\varphi \sin^{\frac{2-n}{n}}\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2n}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot B\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

于是，所求的体积为

$$V=\frac{abc}{n^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

4035. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ ($n>0$，$m>0$)。

解 令

$$x=ar\cos^2\varphi,\ \ y=br\sin^2\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

则曲面所界的体积为

$$V=c\iint\limits_{\Omega}\sqrt[m]{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n}\,dxdy$$

$$=2abc\int_0^1\sqrt[m]{1-r^n}\,rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=abc\int_0^1\sqrt[m]{1-r^n}\,rdr$$

$$=\frac{abc}{n}\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{2-n}{n}}dt$$

$$=\frac{abc}{n}\cdot B\left(\frac{1}{m}+1,\ \frac{2}{n}\right)$$

$$=\frac{abc}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$=\frac{abc}{n+2m}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}.$$

§4. 曲面面积计算法

1°曲面由显函数给出的情形　平滑曲面$z=z(x,y)$的面积由积分

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(其中Ω为已知曲面在Oxy平面上的射影)所表出.

2°曲面由参数方程给出的情形　若曲面的方程是用参数给出

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),$$

其中$(u,v)\in\Omega$，Ω为封闭可求积的有界区域，假定函数x，y和z为在域Ω内连续可微分的函数，则对于曲面的面积有公式

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

其中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. 求曲面$az=xy$包含在圆柱$x^2+y^2=a^2$内那部分的面积.

解　所求的面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{\frac{a^2+(x^2+y^2)}{a^2}}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$=\frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2+r^2}\,dr$$

$$=\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

4037．求由曲面 $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$ 所界物体的面积．

解　如图8.48所示．两曲面的交线在 Oyz 平面上的射影为圆

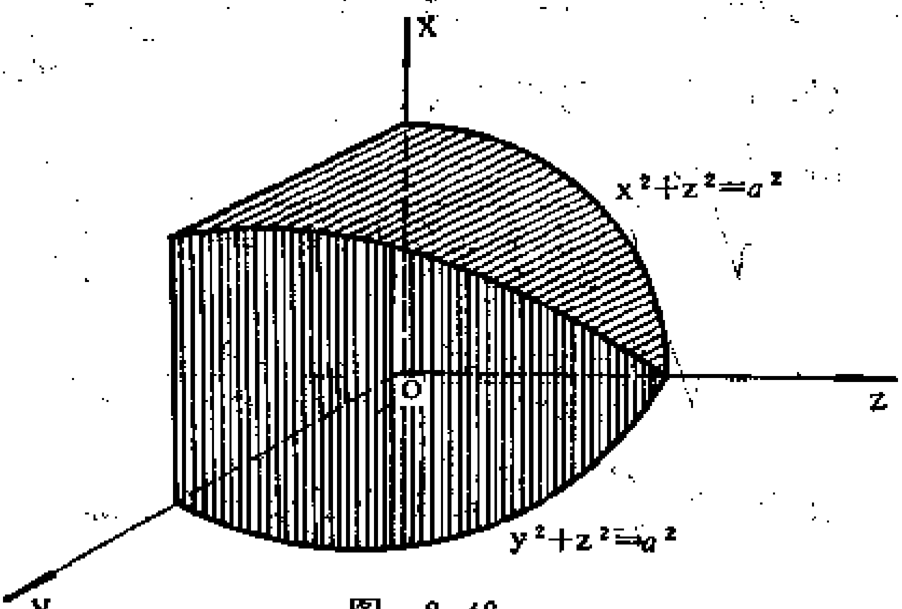

图 8.48

$$y^2+z^2=a^2,\quad x=0.$$

于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=4\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant a^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

$$=4\cdot 4\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{1+0^2+\left(-\frac{z}{x}\right)^2}dy$$

$$=16\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{\frac{x^2+z^2}{x^2}}dy$$

$$=16a\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$=16a\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\cdot\sqrt{a^2-z^2}dz=16a^2.$$

4038．求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$包含在柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b\leqslant a)$内那部分的面积．

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

又积分域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$位于第一象限部分为

$$0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=2\cdot 4\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy$$

$$=8a\int_0^a \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

4039．求曲面$z^2=2xy$被平面$x+y=1$，$x=0$，$y=0$所截下那部分的面积．

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x+y}{\sqrt{xy}},$$

于是，所求的面积为

$$S=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{x+y}{\sqrt{xy}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1\Big[2\sqrt{x(1-x)}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{x}}(1-x)\sqrt{1-x}\Big]dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\frac{2\sqrt{1-x}\,(1+2x)}{3\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-x}(1+2x)d\,(\sqrt{x})$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-t^2}(1+2t^2)dt$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4040. 求曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$在圆柱$x^2+y^2=\pm ax$外那部分的面积（维维安尼问题）.

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积. 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是，利用对称性知，割出部分的面积为

$$S=8\iint_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

因而，所求的面积为

$$A=4\pi a^2-S=4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2.$$

4041．求曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在圆柱$x^2+y^2=2x$内那部分的面积。

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2},$$

又积分域为：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi$，于是，所求的面积为

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{2}\,rdr$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=\sqrt{2}\pi.$$

4042. 求曲面$z=\sqrt{x^2-y^2}$包含在柱面$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$内那部分的面积。

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

又积分域由双纽线$r^2=a^2\cos2\varphi$所围成，于是，利用对称性知，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\sqrt{2}r\cdot\frac{r\cos\varphi}{r\sqrt{\cos2\varphi}}dr$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\,d\varphi$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\,d(\sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$=2a^2\left[\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2}\sqrt{1-2\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

4043. 求曲面$z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$被平面$x-y=\pm 1, x+y=\pm 1$所截那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2},$$

故所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy,$$

其中Ω为由直线$x-y=\pm 1$，$x+y=\pm 1$围成的正方形域. 为便于计算，作变换

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}u-\frac{\sqrt{2}}{2}v,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从面积分域变为由方程$u=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, v=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$围成的正方形，且$I=1$. 于是，注意利用对称性，即得所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}du\int_{-u}^{u}\sqrt{1+u^2+v^2}\,dv$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left\{u\sqrt{1+2u^2}+\frac{1+u^2}{2}\left[\ln\left(\sqrt{1+2u^2}+u\right)-\ln\left(\sqrt{1+2u^2}-u\right)\right]\right\}du$$

$$=\frac{2}{3}(1+2u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\ln\left(\sqrt{1+2u^2}+u\right)\right.$$

$$-\ln(\sqrt{1+2u^2}-u)]d\left(u+\frac{u^3}{3}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}4\left(u+\frac{u^3}{3}\right)$$

$$\cdot\frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{u^2}{3}}{1+u^2}$$

$$\cdot\frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2+5}{t^2+1}dt^{*)}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3-\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$$

$$-\frac{8}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$$

$$=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7\ln 3}{4}\right)+\frac{8}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*) 作代换$1+2u^2=t^2$.

4044. 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)},$$

又积分域由双纽线 $r^2=a^2\sin 2\varphi$ 围成，于是，利用对称性，即得所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+(x^2+y^2)}\ dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+r^2}rdr$$

$$=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a^3(1+\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}-a^3\right]d\varphi$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}d\varphi-\frac{\pi a^2}{3}.$$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1+\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right]^{\frac{3}{2}}d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 tdt=2\sqrt{2}\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{5}{3},$$

故最后得

$$S=\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{5}{3}-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

4045. 求曲面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0$，$x-z=0$ ($x>0$，$y>0$)所截那部分的面积．

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

于是，所求的面积为

$$S=\iint\limits_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz$$

$$=\int_0^a dx\int_{-x}^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz$$

$$=\int_0^a\frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2.$$

4046. 求由曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$，$x+y+z=2a\ (a>0)$ 所界物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在Oxy平面上的射影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

则方程变为

$$\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2}+\frac{y'^2}{(2a)^2}=1.$$

由此可见，曲面所界的物体在Oxy平面上的射影

域为以$2a$为短半轴、$2\sqrt{3}a$为长半轴的椭圆．

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成．对于$z=2a-x-y$，$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是，物体的表面积

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{3}\,dx\,dy+\iint\limits_{\Omega}2\,dx\,dy\\&=(\sqrt{3}+2)\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a\\&=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2.\end{aligned}$$

又所截圆锥之高为

$$H=\left|\frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

（即坐标原点到平面$x+y+z=2a$的距离）．于是，物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot A\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中A为截圆锥的底面积，

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{3}\,dx\,dy=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a\\&=12\pi a^2.\end{aligned}$$

因此，所求物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot 12\pi a^2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3.$$

4047. 求球壳被包含在两条纬线和两条经线间那部分的面积.

解 球壳的参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\psi,\ y=R\sin\varphi\cos\psi,\ z=R\sin\psi,$$

其中R为球的半径. 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi=R^2\cos^2\psi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2$$

$$=R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+R^2\cos^2\psi$$

$$=R^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi}$$

$$=R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi-R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi$$

$$+0=0,$$

故

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi d\psi$$

$$=(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2,$$

其中φ_1及φ_2为经线的经度，ψ_1及ψ_2为纬线的纬度.

4048. 求螺旋面

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=h\varphi,$$

其中 $0<r<a$, $0<\varphi<2\pi$那部分的面积.

解 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=r^2+h^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,$$

故

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{r^2+h^2}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\sqrt{r^2+h^2}dr$$

$$=2\pi\left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2}+\frac{h^2}{2}\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\pi a\sqrt{a^2+h^2}+\pi h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}.$$

4049. 求环面

$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$,

$z=a\sin\psi$ $(0<a\leqslant b)$

被两条经线$\varphi=\varphi_1$，$\varphi=\varphi_2$和两条纬线$\psi=\psi_1$，$\psi=\psi_2$所界那部分的面积．整个环的表面积等于什么？

解 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=(b+a\cos\psi)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2=a^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi}=0,$$

故

$$\sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\psi).$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}a(b+a\cos\psi)d\psi$$

$$=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)].$$

整个环的表面积

$$A=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi}^{\pi}a(b+a\cos\psi)d\psi=4\pi^2ab.$$

4050．求立体角ω，在这个角里从坐标原点看得见矩形

$$x=a>0,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c.$$

若a很大，对于ω推出近似公式．

解 以原点为球心作单位球，则ω即为该球面含于四面体$O—ABCD$内的面积，其中$ABCD$是以b、c为边长的矩形（图8.49）．

取球坐标系，由4047题知：

$$\sqrt{EG-F^2}=\cos\psi$$

又φ和ψ的变化域为

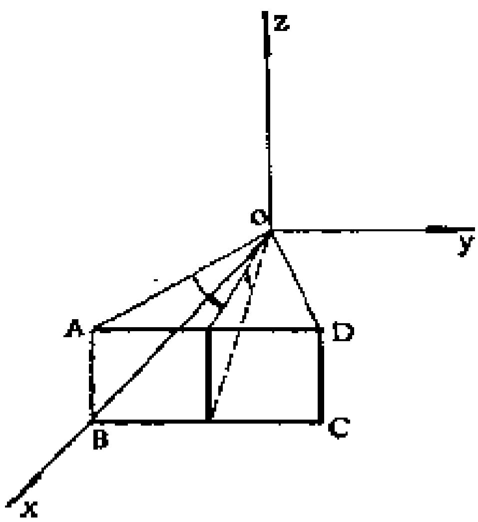

图　8.49

$$0\leqslant\varphi\leqslant\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant \arcsin \frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}.$$

于是，立体角

$$\omega = \int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} d\varphi \int_0^{\arcsin\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}}} \cos\psi d\psi$$

$$= \int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2+c^2\cos^2\varphi}} d\varphi$$

$$= \int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{d\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\varphi\right)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= \arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}.$$

当a很大时，有

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}} = \frac{bc}{a^2\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}} \doteq \frac{bc}{a^2},$$

于是，得ω的近似公式

$$\omega \doteq \frac{bc}{a^2}.$$

§5. 二重积分在力学上的应用

1°**重心** 若 x_0 和 y_0 为平面Oxy内薄板Ω的重心坐标，

$\rho=\rho(x,y)$为薄板的密度，则

$$x_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho x\,dx\,dy,\quad y_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho y\,dx\,dy,\qquad(1)$$

其中$M=\iint\limits_{\Omega}\rho\,dx\,dy$ 为薄板的质量。

若薄板是均匀的，则于公式（1）中应令$\rho=1$。

2°转动惯量　I_x和I_y分别为平面Oxy内薄板Ω对于坐标轴Ox和Oy的转动惯量——用公式来表示

$$I_x=\iint\limits_{\Omega}\rho y^2dx\,dy,\quad I_y=\iint\limits_{\Omega}\rho x^2dx\,dy,\qquad(2)$$

其中$\rho=\rho(x,y)$为薄板的密度。

于公式（2）中假定$\rho=1$，我们得到平面图形的几何转动惯量。

4051. 求边长为a的正方形薄板的质量，设薄板上每一点的密度与该点距正方形顶点之一的距离成比例且在正方形的中点等于ρ_0。

解　取坐标系如图3.50所示，则密度

$$\rho=k\sqrt{x^2+y^2}.$$

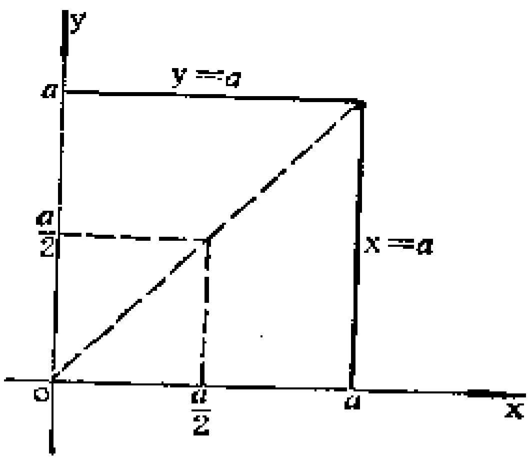

图　8.50

由于$\rho_0=k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，

故$k=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$，从而

$$\rho=\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}.$$

若引用极坐标，即得质量

$$M=\iint\limits_{\Omega}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^2dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}r^2dr\right]$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}\right]$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\,d(\mathrm{tg}\varphi)$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\left[\frac{\mathrm{tg}\varphi}{2}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\varphi+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})].$$

求由下列曲线所界均匀薄板的重心坐标：

4052. $ay=x^2$，$x+y=2a$ $(a>0)$.

解 密度ρ为常数. 积分域如图8.51所示. 质量

$$M=\rho\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy$$

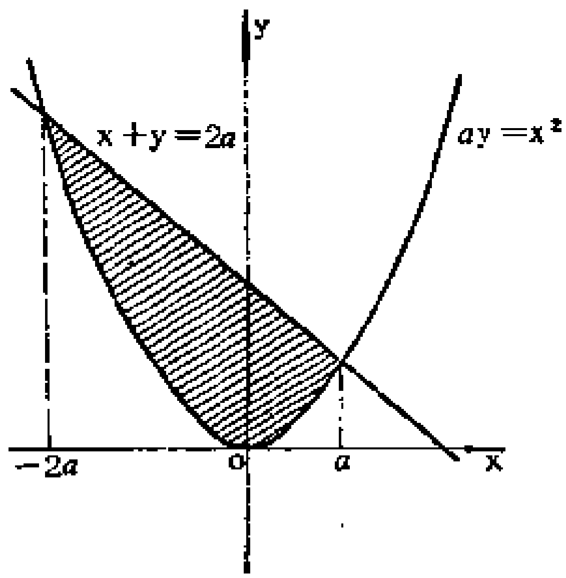

图 8.51

$$=\frac{9}{2}\rho a^2.$$

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y=\rho\int_{-2a}^{a}x\,dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=-\frac{9}{4}\rho a^3,$$

$$M_x=\rho\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}y\,dy=\frac{36}{5}\rho a^3.$$

于是，重心(x_0,y_0)为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{2},\quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{8}{5}a.$$

4053. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，$x=0$，$y=0$。

解 质量和对Oy轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{6}\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}dy=\frac{1}{30}\rho a^3.$$

于是，重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a}{5}.$$

由关于直线$y=x$的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{a}{5}.$$

4054. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0,\ y>0)$。

解 质量和对Oy轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2t\,dt^{*)}$$

$$=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)dt$$

$$=3a^2\rho\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^2\rho}{32},$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}dy=\rho\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=3a^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^5t\,dt=\frac{8a^3\rho}{105}.$$

于是，重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线$y=x$的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{256a}{315\pi}.$$

*) 作代换$x=a\cos^3t$.

4055. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$（线圈）.

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线，围成一图形Ω. 作变量代换

$$x=\frac{a^2b}{c^2}r\cos^4\theta\sin^2\theta,\quad y=\frac{ab^2}{c^2}r\cos^2\theta\sin^4\theta,\quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

则原曲线方程变为$r=1$。又容易算得

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{2a^3b^3}{c^4}r(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta),$$

故（利用3856题的结果）

$$M=\iint_{\Omega}\rho dxdy$$

$$=\frac{2a^3b^3}{c^4}\rho\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho\left[\frac{1}{2}B(3,4)+\frac{1}{2}B(4,3)\right]$$

$$=\frac{a^3b^3}{c^4}\rho B(3,4),$$

$$M_y=\iint_{\Omega}\rho xdxdy$$

$$=\frac{2a^5b^4}{c^6}\rho\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^2\theta(\sin^5\theta\cos^7\theta+\sin^7\theta\cos^5\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\frac{a^5b^4}{c^6}\rho\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^{11}\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta\cos^9\theta d\theta\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^5b^4}{c^6}\rho[B(4,6)+B(5,5)].$$

于是，

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{B(4,6)+B(5,5)}{B(3,4)}.$$

由于，

$$B(4,6)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)}=\frac{3!5!}{9!},$$

$$B(5,5)=\frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)}=\frac{(4!)^2}{9!},$$

$$B(3,4)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!3!}{6!},$$

代入，化简得

$$x_0=\frac{a^2b}{3c^2}\cdot\frac{6![3!5!+(4!)^2]}{2!3!9!}=\frac{a^2b}{14c^2}.$$

同理，可求得重心的纵坐标为

$$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{\Omega}\rho y\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega}\rho\,dx\,dy}=\frac{ab^2}{14c^2}.$$

4056. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$.

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\sin 2\varphi.$$

质量和对 Oy 轴的一次矩为

$$M=\iint\limits_{\Omega}\rho\,dx\,dy$$

$$=\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}r\,dr$$

$$=\frac{\rho a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=\frac{\rho a^2}{2},$$

$$M_y=\iint_\Omega \rho x dx dy$$

$$=\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}r\cdot r\cos\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^{\frac{3}{2}}2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\rho a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{5}{2}}\varphi\sin^{\frac{3}{2}}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4},\ \frac{5}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho a^3\frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\rho a^3\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{16}\pi\rho a^3.$$

于是，重心的横坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{\pi a}{8}.$$

由关于直线$y=x$的对称性知

$$x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}.$$

*) 利用3856题的结果。

4057. $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi=0$.

解 质量和一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr$$

$$=\frac{1}{2}\rho a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{3}{4}\pi\rho a^2,$$

$$M_y=\rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\cdot r\cos\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^4d\varphi\right.$$

$$\left.-\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3d\varphi\right]$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 tdt\right]$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\left[32\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.-16\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\frac{5\pi\rho a^3}{8},$$

$$M_x=\rho\int_0^\pi d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\cdot r\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\rho a^3}{3}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\frac{\rho a^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi=\frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{5}{6}a,\quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{16}{9\pi}a.$$

4058. $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$　$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，$y=0$.

解　质量和对Ox轴的一次矩为

$$M=\rho\int_0^{2\pi a}dx\int_0^y dy=\rho\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt$$

$$=3\pi\rho a^2.$$

$$M_x=\rho\int_0^{2\pi a}dx\int_0^y y\,dy=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi a}y^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\rho a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\frac{5}{2}\pi\rho a^3.$$

于是，

$$y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{5}{6}a.$$

由对称性知：$x_0=\pi a$.

4059. 求圆形薄板$x^2+y^2\leqslant a^2$的重心坐标，设它在点$M(x,y)$的密度与M点到$A(a,0)$点的距离成比例.

解　按题设，密度

$$\rho=k\sqrt{(x-a)^2+y^2}\quad(k\text{为常数}).$$

于是，质量为

$$M=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}k\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,dy$$

$$=k\int_{-a}^{a}\Big[y\sqrt{(x-a)^2+y^2}+(x-a)^2$$

$$\cdot \ln(y+\sqrt{(x-a)^2+y^2})\Big]\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= k\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}(a-x)\sqrt{a+x}\,dx$$

$$-k\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{2}\ln(a-x)\right](a-x)^2 dx$$

$$+k\int_{-a}^{a}(a-x)^2\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{2a})dx$$

$$=I_1-I_2+I_3.$$

由于

$$I_1=k\int_{-a}^{a}\sqrt{2a}[-(a+x)^{\frac{3}{2}}+2a(x+a)^{\frac{1}{2}}]dx$$

$$=\sqrt{2a}k\cdot\left[-\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{4a}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{32}{15}ka^3,$$

$$I_2=\frac{k}{2}\int_0^{2a}t^2\ln t\,dt=\frac{k}{6}t^3\ln t\Big|_0^{2a}-\frac{k}{6}\int_0^{2a}t^3\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{4}{3}ka^3\cdot\ln 2a-\frac{4}{9}ka^3,$$

$$I_3=k\cdot 2\int_0^{\sqrt{2a}}t(2a-t^2)^2\ln(t+\sqrt{2a})dt$$

$$=8a^2k\int_0^{\sqrt{2a}}t\ln(t+\sqrt{2a})dt$$

$$-8ka\int_0^{\sqrt{2a}}t^3\ln(t+\sqrt{2a})dt$$

$$+2k\int_0^{\sqrt{2a}} t^5\ln(t+\sqrt{2a})\,dt$$

$$=8ka^2\left(\frac{a}{2}+a\ln\sqrt{2a}\right)-8ka\left(\frac{7}{12}a^2+a^2\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$+2k\left(\frac{37}{45}a^3+\frac{4}{3}a^3\ln\sqrt{2a}\right)$$

$$=\frac{44}{45}ka^3+\frac{8}{3}ka^3\ln\sqrt{2a}=\frac{44}{45}ka^3+\frac{4}{3}ka^3\ln 2a.$$

因而最后得

$$M=\frac{32}{15}ka^3-\left(\frac{4}{3}ka^3\ln 2a-\frac{4}{9}ka^3\right)$$

$$+\left(\frac{44}{45}ka^3+\frac{4}{3}ka^3\ln 2a\right)$$

$$=\frac{32}{9}ka^3.$$

仿照上述方法可求得一次矩

$$M_y=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}kx\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,dy$$

$$=-\frac{32}{45}ka^4.$$

而由对称性知：$M_x=0$。

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=-\frac{a}{5},\quad y_0=\frac{M_x}{M}=0.$$

4060．求由变动的面积的重心所描写出来的曲线，所指的变动面积是被曲线

$$y=\sqrt{2px}, \quad y=0, \quad x=X$$

所界的.

解 变动面积的质量

$$M=\rho\int_0^X dx\int_0^{\sqrt{2px}} dy=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{3}X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩

$$M_y=\rho\int_0^X x dx\int_0^{\sqrt{2px}} dy=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{5}X^{\frac{5}{2}},$$

$$M_x=\rho\int_0^X dx\int_0^{\sqrt{2px}} y dy=\rho\frac{1}{2}pX^2.$$

于是，变动面积的重心为

$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}X, \quad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$$

因此，重心的轨迹方程为

$$y_0=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{p\cdot\frac{5}{3}x_0}=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0},$$

此即所求的曲线方程，其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所界的面积($\rho=1$)对于坐标轴Ox和Oy的转动惯量I_x和I_y：

4061† $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$，$\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$，$y=0$ ($b_1>0$, $b_2>0$, $h>0$).

解 若设$b_2>b_1$，则

$$I_x=\int_0^h y^2 dy\int_{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_2} dx=(b_2-b_1)$$

$$\cdot\int_0^h y^2\left(1-\frac{y}{h}\right)dy=\frac{(b_2-b_1)h^3}{12},$$

$$I_y=\int_0^h dy\int_{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_2} x^2dx=\frac{b_2^3-b_1^3}{3}\int_0^h\left(1-\frac{y}{h}\right)^3dy$$

$$=\frac{h(b_2^3-b_1^3)}{12};$$

若设$b_1>b_2$，则

$$I_x=\frac{(b_1-b_2)h^3}{12},\quad I_y=\frac{h(b_1^3-b_2^3)}{12}.$$

4062. $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.

解 $I_x=\int_0^a dx\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} y^2dy$

$$=\frac{1}{3}\int_0^a[a^3-3a^2\sqrt{2ax-x^2}+3a(2ax-x^2)$$

$$-(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[a^3x-3a^2\left(\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{2}\right)+3a^2x^2-ax^3\right]\Bigg|_0^a$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^a(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4\cos^4t\,dt^{*}$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\cos^4t\,dt$$

$$=a^4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{a^4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{a^4}{16}(16-5\pi).$$

利用图形的对称性，即得 $I_y=I_x=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$.

*) 作代换 $x-a=a\sin t$.

4063. $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 曲线所界的平面域可表示为

$$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi,\qquad 0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\varphi).$$

于是，

$$I_x=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\sin^2\varphi\cdot rdrd\varphi$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}a^4(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}(1+4\cos\varphi+6\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+\cos^4\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^4\cdot\frac{21}{16}=\frac{21}{32}\pi a^4,^{*)}$$

$$I_y=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos^2\varphi\cdot rdrd\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+6\cos^4\varphi+4\cos^5\varphi+\cos^6\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

*) 对于任意自然数 n，有

$$\int_0^{\pi}\cos^n\varphi d\varphi=\begin{cases}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi d\varphi, & 当n为偶数;\\ 0, & 当n为奇数.\end{cases}$$

为算出I_x、I_y的值，也可变换被积函数的形式，直接用换元法计算，这样较简单.

事实上，我们有

$$I_x=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=2^6a^4\int_0^{\pi}\cos^{10}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=2^6a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x(1-\cos^2x)dx$$

$$=2^6a^4\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}\left(1-\frac{11}{12}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{21}{32}\pi a^4.$$

$$I_y=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4d\varphi-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=2^4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8xdx-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=\frac{70}{32}\pi a^4-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

4064. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解 曲线的图形关于两坐标轴和直线$y=x$是对称的，参看1542题的图形. 曲线的极坐标方程为

$$r^2=\frac{a^2}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

根据对称性，只要算出从$\varphi=0$到$\varphi=\frac{\pi}{4}$部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果，并且显然有$I_x=I_y$. 于是，我们有

$$I_x=I_y=4\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}}r^3dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{(1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^4d\varphi}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\varphi\right)^2}$$

$$=16a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{(3+\cos4\varphi)^2}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)^2}\,{}^{*)}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\left[-\frac{\frac{1}{3}\sin x}{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cos x\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}\,{}^{**)}$$

$$=\frac{4a^4}{9}\cdot 2\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}.$$

*) 作代换$x=4\varphi$.

**) 利用2063题的结果.

4065. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0, y>0)$.

解 作代换$xy=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则$x=\sqrt{\frac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$

且雅哥比式的绝对值$|I|=\frac{1}{2v}$, 曲线所界的面积即积分域变为

$$a^2\leqslant u\leqslant 2a^2,\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2.$$

于是,

$$I_x=\iint\limits_{\Omega} y^2dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}dv\int_{a^2}^{2a^2}\frac{uv}{2v}\,du=\frac{9a^4}{8},$$

$$I_y=\iint\limits_{\Omega} x^2dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}dv\int_{a^2}^{2a^2}\frac{u}{2v^2}\,du=\frac{9a^4}{8}.$$

4066. 求面积S的极转动惯量

$$I_0=\iint_S(x^2+y^2)dxdy,$$

面积S是由曲线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

所界的.

解 引用极坐标，则面积S的界线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos 2\varphi,$$

这是双纽线. 利用对称性，得

$$I_0=\iint_S(x^2+y^2)dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}r^3dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^4\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{\pi a^4}{8}.$$

4067. 证明公式

$$I_l=I_{l_0}+Sd^2,$$

其中I_l，I_{l_0}是面积S对于二平行轴l和l_0的转动惯量，其中l_0是通过面积的重心，而d为两轴间的距离.

证 取l_0轴为Ox轴，面积的重心为坐标原点，则

$$I_l=\iint_S(y-d)^2dxdy=\iint_S y^2dxdy$$

$$-2d\iint_S ydxdy+d^2\iint_S dxdy.$$

因为l_0通过面积S的重心，故

$$y_0=\frac{1}{S}\iint_S ydxdy=0，即\iint_S ydxdy=0.$$

又

$$\iint_S y^2 dxdy = I_{l_0}, \quad \iint_S dxdy = S,$$

于是，

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2.$$

4068．证明面积S对于通过重心$O(0,0)$并与Ox轴组成α角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

其中I_x和I_y为面积 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及I_{xy}为离心惯量：

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy dxdy.$$

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$，使Ox'轴与Ox轴的夹角为α，则有

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

这就是旋转变换，雅哥比式的绝对值

$$|I| = \left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right| = 1.$$

于是，

$$I = \iint_S y'^2 \rho dx'dy' = \iint_S (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 \rho dxdy$$

$$= \cos^2\alpha\iint_S y^2\rho dxdy - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cdot \iint_S \rho xydxdy + \sin^2\alpha\iint_S \rho x^2 dxdy$$

$$= I_x\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha.$$

4069. 求以 a 为边的正三角形的面积对于通过三角形重心并与它的高成α角的直线的转动惯量。

解 利用上题的结果。取重心为坐标原点． 不妨取Ox轴平行于三角形的一条边，则过重心与高成α角的直线，即为过坐标原点与Ox轴成α角的直线。于是，要求的转动惯量为

$$I_\alpha=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程为

$$y=-\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad y=-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$y=\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以，根据对称性知：

$$I_x=2\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}}y^2dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^3\right]dy$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\sqrt{3}x^3+\sqrt{3}ax^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2x\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{24}\right)dx$$

$$=2\sqrt{3}a^4\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{64}\right)=\frac{a^4}{32\sqrt{3}},$$

$$I_{xy}=\iint\limits_{S} xy\,dx\,dy=0;$$

$$I_{y}=2\int_{0}^{\frac{a}{2}} dx\int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}} x^2 dy$$

$$=2\int_{0}^{\frac{a}{2}} x^2\left[\left(-\sqrt{3}x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right]dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{a}{2}} \left(-\sqrt{3}x^3+\frac{\sqrt{3}a}{2}x^2\right)dx$$

$$=\sqrt{3}a^4\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{32}\right)=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

于是，

$$I_{\alpha}=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\cos^2\alpha+\frac{a^4}{32\sqrt{3}}\sin^2\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

4070. 设有水平面为$z=h$的圆柱形容器$x^2+y^2=a^2$，$z=0$，求它侧壁上（$x\geqslant 0$）水的压力．

解 用X与Y分别表示压力在Ox轴与Oy轴上的投影．由对称性，显然有$Y=0$．下面求X．由于$dS=a\,d\theta\,dz$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，而在面元$dS$上的压力在$Ox$轴上的投影$dX$为$(z\,dS)\cos\theta$．于是，

$$X=\iint\limits_{S} z\cos\theta\,dS=\iint\limits_{S} az\cos\theta\,d\theta\,dz$$

$$=a\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_{0}^{h}z\,dz\right)=ah^2.$$

4071. 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中的深度为 h（由球心量起），这里 $h\geqslant a$. 求在球表面的上部和下部的液体压力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则在球面上的点 (x,y,z) 处沉入液体的深度 d 为

$$d=h-z \quad (-a\leqslant z\leqslant h).$$

于是，上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为：

$$d=h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},$$

$$d=h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$

根据对称性知，压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的射影均为零，故只要计算压力在 Oz 轴上的射影. 液体作用于球面上部和下部的压力分别记以 p_1 和 p_2，并设 γ 为球上各点处压力的方向（即内法线方向）与 Oz 轴正向的夹角，则

$$p_1=\iint\limits_{S_1} d\delta\cos\gamma ds$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]dxdy$$

$$=-h\pi a^2\delta+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1-r^2}rdr$$

$$=-h\pi a^2\delta+\left[\frac{-2\pi\delta}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\right]\Bigg|_0^a$$

$$=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{2a}{3}\right) \quad (p_1<0\text{表示压力向下}).$$

同理，我们有

$$p_2=\iint\limits_{S_2} d\delta\cos\gamma dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]dxdy$$

$$=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right)\quad (p_2>0\text{表示压力向上}).$$

4072. 底半径为 a 高为 b 的直圆柱完全沉入密度为 δ 的液体中，其中心在液面下的深度为 h，而圆柱的轴与铅垂线成 α 角，求在圆柱上底和下底的液体压力.

解 取圆柱的中心为坐标原点，取 Oxy 平面是水平的，再取圆柱的轴（朝上的方向）在 Oxy 平面上的投影所在的方向为 Ox 轴，取 Oz 轴垂直朝上，最后取 Oy 轴使 Ox 轴 Oy 轴和 Oz 轴构成右手系。

于是，液面方程为 $z=h$. 设圆柱上底为 S_1，下底为 S_2，则 S_1 所在平面的方程为

$$x\sin\alpha+z\cos\alpha=\frac{b}{2},\tag{1}$$

S_2 所在平面的方程为

$$x\sin\alpha+z\cos\alpha=-\frac{b}{2}.\tag{2}$$

在点 (x,y,z) 处 $(z\leqslant h)$ 液体的深度为 $h-z$. 用 X_1，Y_1 和 Z_1 分别表示液体在圆柱上底 S_1 上压力在 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 同样，用 X_2，Y_2 和 Z_2 分别表示在 S_2 上压力在 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 显然，$Y_1=Y_2=0$. 我们有

$$X_1=-\iint\limits_{S_1}\delta(h-z)\sin\alpha dS=-\delta\sin\alpha\iint\limits_{S_1}(h-z)dS,\tag{3}$$

$$Z_1=-\iint_{S_1}\delta(h-z)\cos\alpha dS=-\delta\cos\alpha\iint_{S_1}(h-z)dS. \tag{4}$$

由（1）式知，在S_1上有

$$z=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}-x\sin\alpha\right).$$

于是，注意到S_1的面积为πa^2，可知

$$\iint_{S_1}(h-z)dS=\iint_{S_1}\left[h-\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}-x\sin\alpha\right)\right]dS$$

$$=\left(h-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)\iint_{S_1}dS+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint_{S_1}xdS$$

$$=\left(h-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)\pi a^2+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\iint_{S_1}xdS.$$

由于$\frac{1}{\pi a^2}\iint_{S_1}xdS$是$S_1$的重心的$x$坐标，也即$\frac{b}{2}\sin\alpha$，

故$\iint_{S_1}xdS=\frac{1}{2}\pi a^2b\sin\alpha$。代入即得

$$\iint_{S_1}(h-z)dS=\left(h-\frac{b}{2\cos\alpha}\right)\pi a^2+\frac{1}{2}\pi a^2b\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

以此代入（3）式与（4）式，得

$$X_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$$

$$Z_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

同理，我们有

$$X_2=\iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\sin\alpha dS=\delta\sin\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)dS,$$

$$Z_2=\iint\limits_{S_2}\delta(h-z)\cos\alpha dS=\delta\cos\alpha\iint\limits_{S_2}(h-z)dS.$$

再注意到（2）式，类似地可计算得

$$\iint\limits_{S_2}(h-z)dS=\iint\limits_{S_2}\left[h+\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{2}+x\sin\alpha\right)\right]dS$$

$$=\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\pi a^2.$$

于是，

$$X_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha,$$

$$Z_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha.$$

4073. 求均匀的圆柱$x^2+y^2\leqslant a^2$，$0\leqslant z\leqslant h$对质点$P(0,0,b)$的引力，设圆柱的质量等于M，而点的质量等于m。

解 根据对称性知，引力在Ox轴和Oy轴上的射影等于零，故只要计算引力在Oz轴上的射影F_z.今取圆环，其体积为

$$dV=2\pi r dr dz,$$

则相应的质量为

$$dM=\frac{2\pi rM dr dz}{\pi a^2 h}=\frac{2Mr}{a^2h}dr dz,$$

吸引质点P的引力

$$dF_z=-\frac{2krmM(b-z)}{a^2h\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}}drdz.$$

于是，所求的引力

$$F_z=-\frac{2kmM}{a^2h}\int_0^h\int_0^a\frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}}drdz$$

$$=-\frac{2kmM}{a^2h}\left[\int_0^h \operatorname{sgn}(b-z)dz\right.$$

$$\left.-\int_0^h\frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}}dz\right]$$

$$=-\frac{2kmM}{a^2h}[|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}],$$

其中k为引力常数.

4074. 物体在椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

上压力的分布由公式

$$p=p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

所给出. 求物体在此面上的平均压力.

解 物体在椭圆面上的平均压力

$$p_{cp}=\frac{1}{\pi ab}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=\frac{4}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 p_0(1-r^2)abrdr$$

$$=\frac{4}{\pi ab}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p_0ab}{4}=\frac{p_0}{2}.$$

4075. 草地的形状为以a和b为边的矩形，均匀地盖上密度为p千克/平方米的砍倒的草.假设运送P千克重到距离为r远的地方所化的功为kPr（$0<k<1$）．要把所有的干草聚集在草地的中心，最少必须化多少功？

解 不妨将坐标原点取在矩形的中心，Ox轴平行于a边，Oy轴平行于b边.由于将面积$dxdy$上的草移到中心要化的功为

$$dW=kp\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

并利用对称性，便知所要求的功为

$$W=4kp\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=4kp\left[\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}\int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}}r^2drd\varphi\right.$$

$$\left.+\int_{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{b}{2\sin\varphi}}r^2dr\,d\varphi\right]$$

$$=\frac{kp}{6}\left[a^3\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}\frac{1}{\cos^3\varphi}d\varphi\right.$$

$$\left.+b^3\int_{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3\varphi}d\varphi\right].$$

但是，

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3\varphi}\,d\varphi = \left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]\Bigg|_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} {}^{*)}$$

$$= \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

$$\int_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3\varphi}\,d\varphi = \left[-\frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|\right]\Bigg|_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} {}^{**)}$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b};$$

于是，我们有

$$W = \frac{kp}{12}\left(2ab\sqrt{a^2+b^2} + a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right.$$

$$\left. + b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right).$$

*) 利用2000题的结果。

**) 利用1999题的结果。

§6. 三重积分

1°三重积分的直接计算法 设函数 $f(x,y,z)$ 是连续的，

且有界域V由下列不等式确定出来：

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$
$$z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),$$

其中$y_1(x)$，$y_2(x)$，$z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 皆为连续函数，则函数$f(x,y,z)$展布于域V内的三重积分可按公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

来计算．有时采用下面的公式也很方便

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\int_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz,$$

其中$S(x)$是用平面$X=x$截域V所得的截断面．

2°三重积分中的变量代换 若$Oxyz$空间的有界三维闭域V借助于下列连续可微分的函数双方单值地反应到$O'uvw$空间的域V'

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w),$$

并且当$(u,v,w)\in V'$时，

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0,$$

则下面的公式成立

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w),\,y(u,v,w),\,z(u,v,w)]\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

在特殊情况下，有：1)圆柱坐标系φ, r, h,其中

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,$$

及

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,r,h)}=r,$$

2）球坐标系φ,ψ,r,其中

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

及

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\psi,r)}=r^2\cos\psi.$$

计算下列三重积分：

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，此处$V$是由曲面$z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$所界的区域.

解 $$\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz$$

$$=\frac{1}{364}.$$

4077. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，此处$V$是由曲面$x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所界的区域.

解 $$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]\Bigg|_0^{1-x-y}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2(1+x+y)}\right]\Bigg|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{3}{8}+\frac{x}{8}+\frac{1}{2(1+x)}\right]dx$$

$$=\left[-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

4078. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$，此处$V$是由曲面$x^2+y^2+z^2=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所界的区域。

解 $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)\,dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\,dx=\frac{1}{48}.$$

4079. $\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$，此处$V$是由曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所界的区域。

解 设P_x，Q_y，R_z分别表示立体V与平面$x=$常数，$y=$常数，$z=$常数所截部分在Oyz，Ozx，Oxy平面上的射影，则有

$$\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}dx\iint\limits_{P_x}dydz+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}dy\iint\limits_{Q_y}dzdx$$

$$+\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}dz\iint\limits_{R_z}dxdy$$

$$\overset{*)}{=}\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx+\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=3\cdot\frac{4\pi abc}{15}=\frac{4\pi abc}{5}.$$

*) P_x在平面$X=x$上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

故其面积为

$$\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Q_y及R_z的面积类推.

4080. $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中$V$是由曲面

$$x^2+y^2=z^2,\ z=1$$

所界的区域.

解 曲面在Oxy平面上的射影Q为圆盘$x^2+y^2\leqslant 1$.于是,

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

$$=\iint\limits_Q dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(r-r^2)\,r\,dr=\frac{\pi}{6}.$$

于下列三重积分内用各种方法来配置积分的限:

4081. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)\,dz.$

解 有界域V如图3.52所示.

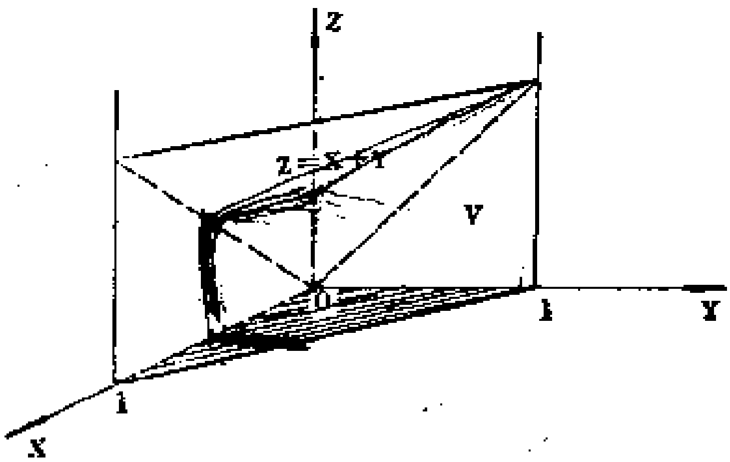

图 8.52

如果先对y积分，再对z、x积分，如图8.53所示，则积分域在Oyz平面上的射影域由诸直线

$z=0$，$z=x+y$，

$y=0$，$y=1-x$

（x固定）

围成．于是，我们有

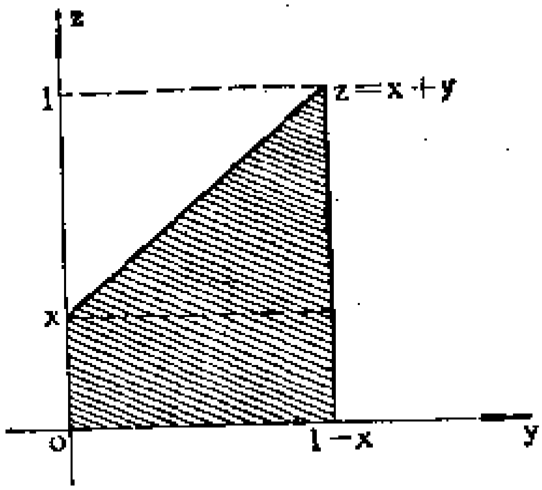

图 8.53

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy\right.$$

$$\left.+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\right\}^{*)}$$

如果先对x积分，再对y、z积分，如图8.54所示，则有

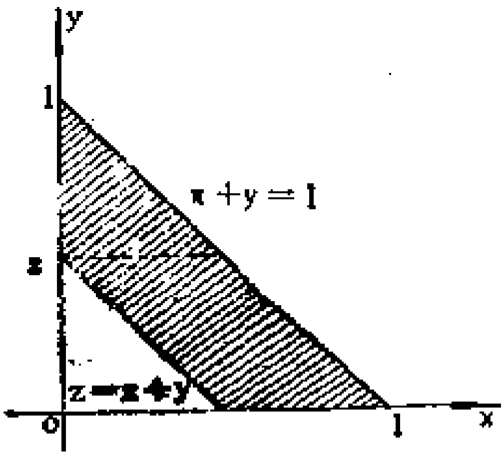

图 8.54

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx+\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\right\}.$$

*) 这里用的公式为$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

$$=\int_a^b dx\iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz.$$

4082. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz.$

解 有界域V如图8.55所示.

如果先对y积分，再对z、x积分，如图8.56所示，则积分域在Oyz平面上的射影域由不等式

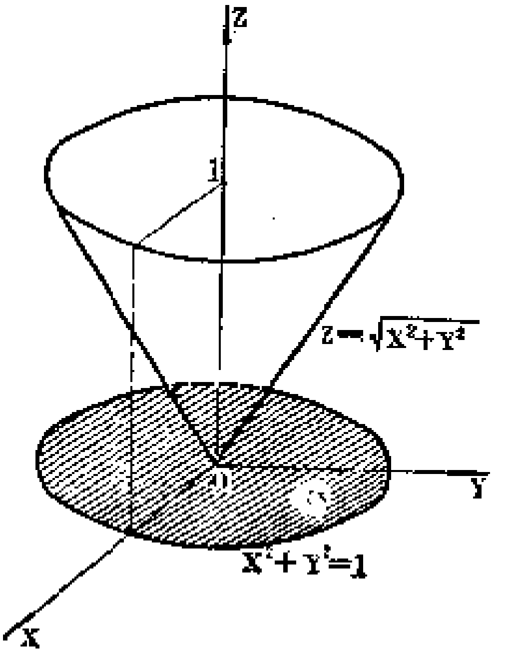

图 8.55

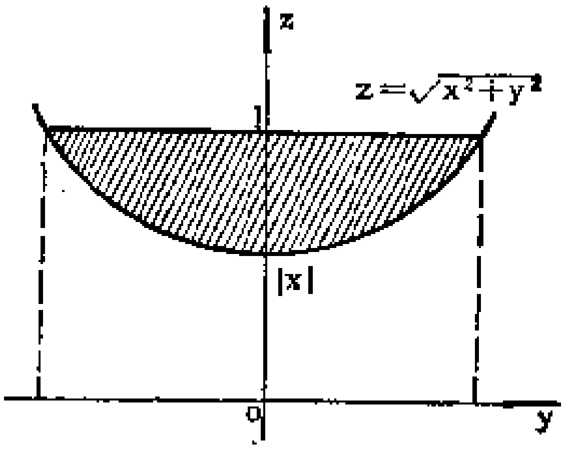

图 8.56

$|x|\leqslant z\leqslant 1$， $-\sqrt{z^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z^2-x^2}$ (x 固定)给出. 于是，我们有

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{1}dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy.$$

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，如图8.57所示，则有

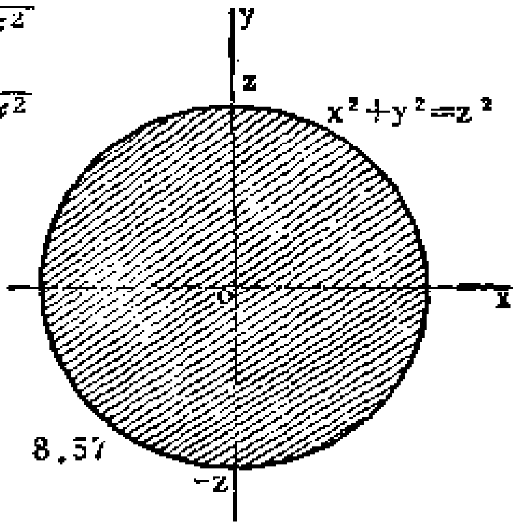

图 8.57

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_{0}^{1}dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx.$$

4083. $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz.$

解 如果先对y积分，再对z、x积分，则积分域在Oxy平面上的射影域[*)]由方程

$$x=1,\ z=0,\ z=x^2$$

及

$$x=0,\ x=1,\ z=x^2,\ z=x^2+1$$

所表示的线围成。于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dx\left[\int_0^{x^2}dz\int_0^1 f(x,y,z)dy\right.$$

$$+\int_{x^2}^{x^2+1}dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^{1}f(x,y,z)dy\Big].$$

如果先对x积分，再对 z、y积分，不难由轮换对称关系得出结果.

如果先对x积分，再对y、z积分，则积分域在 Oyz 平面上的射影域由方程

$$y=1\,,\quad z=0\,,\quad y=\sqrt{z}$$

及

$$y=0,\quad y=1,\quad y=\sqrt{z},\quad y=\sqrt{z-1}$$

所表示的线围成．于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\Big[\int_0^{\sqrt{z}}dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx$$

$$+\int_{\sqrt{z}}^{1}dy\int_0^1 f(x,y,z)dx\Big]$$

$$+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^{1}dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx.$$

*） 这里采用的投影方式与前两题不同，系用结果

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_S dxdz\int_{y_1}^{y_2}f(x,y,z)dy.$$

用一重积分以代替三重积分：

4084. $\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}d\eta\int_0^{\eta}f(\zeta)d\zeta.$

解 $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta = \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\zeta \int_\zeta^\xi f(\zeta) d\eta$

$$= \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\zeta)(\xi-\zeta) d\zeta$$

$$= \int_0^x d\zeta \int_\zeta^x f(\zeta)(\xi-\zeta) d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x f(\zeta)(x-\zeta)^2 d\zeta.$$

4085. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$

解 化为先对y积分，再对x、z积分，可将原积分表示成如下两部分：

$$\int_0^1 dz \left[\int_z^1 dx \int_0^1 f(z) dy + \int_0^z dx \int_{z-x}^1 f(z) dy\right]$$

$$= \int_0^1 dz \int_z^1 f(z)\, dx + \int_0^1 dz \int_0^z f(z)(1-z+x) dx$$

$$= \int_0^1 f(z)\ (1-z)\ dz + \int_0^1 f(z)(1-z)z dz$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 f(z) z^2 dz$$

$$= \int_0^1 f(z)\left(1-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)\, dz;$$

$$\int_1^2 dz \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 f(z) dy$$

$$= \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 f(z)(1-z+x) dx$$

$$=\int_1^2 \left[f(z)(1-z)x+\frac{1}{2}f(z)x^2\right]\Big|_{z-1}^{1} dz$$

$$=\int_1^2 f(z)\left[1-z+(z-1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(z-2)^2dz,$$

于是，

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x+y} f(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)(2-z^2)dz$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^2 f(z)(2-z)^2dz.$$

4086．设$f(x,y,z)=F'''_{xyz}(x,y,z)$及$a$，$b$，$c$，$A$，$B$，$C$为常数，求：

$$\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz.$$

解 $\int_a^A dx\int_b^B dy\int_c^C f(x,y,z)dz$

$$=\int_a^A dx\int_b^B\left[F''_{xy}(x,y,C)-F''_{xy}(x,y,c)\right]dy$$

$$=\int_a^A\left[F'_x(x,B,C)-F'_x(x,b,C)-F'_x(x,B,c)\right.$$

$$\left.+F'_x(x,b,c)\right]dx$$

$$=F(A,B,C)-F(a,B,C)-F(A,b,C)$$
$$+F(a,b,C)-F(A,B,c)+F(a,B,c)$$
$$+F(A,b,c)-F(a,b,c).$$

变换为球坐标以计算积分：

4087. $\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，此处$V$是由曲面

$$x^2+y^2+z^2=z$$

所界的区域.

解 令$x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，则曲面$x^2+y^2+z^2=z$化为$r=\sin\psi$. 从而

$$V: 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sin\psi.$$

$$|I|=r^2\cos\psi.$$

于是，

$$\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sin\psi}r\cdot r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\cos\psi d\psi=\frac{\pi}{10}.$$

4088. $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$.

解 变换为球坐标，积分域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}.$$

于是，

$$\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cos\psi\cdot r^2\sin^2\psi dr$$

$$=\frac{1}{5}4\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi d\psi$$

$$=\frac{\pi}{5}2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3\psi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

4089. 于积分中变换为球坐标

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz,$$

此处V是由曲面$z=x^2+y^2$，$x=y$，$x=1$，$y=0$，$z=0$所界的区域。

解 引用球坐标，由$x=y$，$x=1$，$y=0$知：$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$（图8.58）。

又从原点引半射线，由曲面$z=x^2+y^2$穿进，平面$x=1$穿出，于是，得r的下限为$r=\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，$r$的

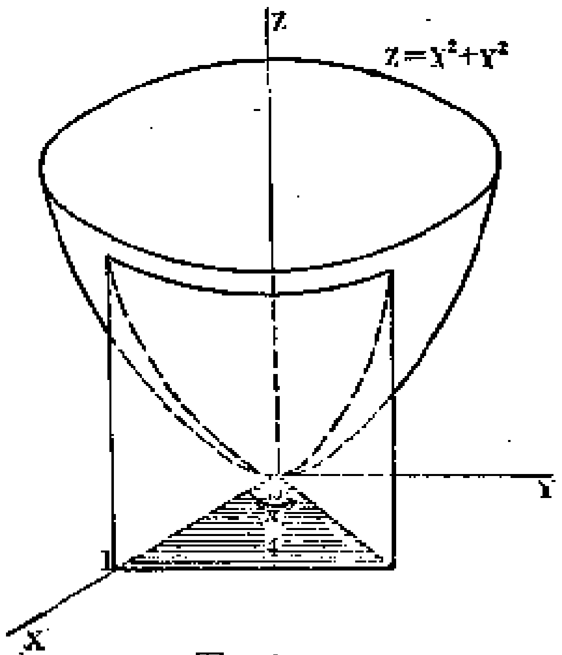

图 8.58

上限为 $r=\dfrac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$。而$\psi$的变化域由 $z=0$到 $z=x^2+y^2$，$x=1$ 所决定，即

$$0\leqslant\psi\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\cos\varphi}.\ ^{*)}$$

于是，

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi d\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}}r^2f(r)dr.$$

*) 因为$x=1$ 对应$r=\dfrac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$，$z=x^2+y^2$对应 $r=\dfrac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，故$\dfrac{1}{\cos\varphi\cos\psi}=\dfrac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$，即$\psi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

4090. 进行适当的变量代换，以计算三重积分

$$\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz,$$

此处V 为椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的内部。

解 作变量代换

$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则有$|I|=abcr^2\cos\psi$，且对于V 的$\dfrac{1}{8}$部分有

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant1.$$

于是，

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\sqrt{1-r^2}dr$$

$$=4\pi\int_0^1 abcr^2\sqrt{1-r^2}dr=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt$$

$$=\frac{\pi abc}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{\pi^2 abc}{4}.$$

4091．变换为圆柱坐标，以计算积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz,$$

此处V是由曲面$x^2+y^2=2z$，$z=2$所界的区域．

解 令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=z$，则$x^2+y^2=2z$化为$r^2=2z$，积分域

$$V: 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 2,\ \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2.$$

$$|I|=r.$$

于是，

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz$$

$$=\frac{16\pi}{3}.$$

4092．计算积分

$$\iiint\limits_V x^2dxdydz$$

此处V是由曲面$z=ay^2$，$z=by^2$，$y>0(0<a<b)$，$z=\alpha x$，$z=\beta x(0<\alpha<\beta)$，$z=h(h>0)$所界的区域.

解 作变换$\frac{z}{y^2}=u$，$\frac{z}{x}=v$，$z=w$，则$x=\frac{w}{v}$，

$y=\sqrt{\frac{w}{u}}$，$z=w$. 从而积分域变为

$$V: a\leqslant u\leqslant b,\ \alpha\leqslant v\leqslant\beta,\ 0\leqslant w\leqslant h,$$

且雅哥比行列式

$$I=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{-\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uw}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}\,v^2}.$$

于是，

$$\iiint\limits_V x^2dxdydz=\int_0^h w^{\frac{7}{2}}dw\int_\alpha^\beta\frac{1}{v^4}dv\int_a^b\frac{1}{2u\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}.$$

4093. 求积分

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz,$$

其中V位于$x>0$，$y>0$，$z>0$这一卦限内且由下列曲面所界：

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\quad z=\frac{x^2+y^2}{n},\quad xy=a^2,\quad xy=b^2,$$

$y=\alpha x$，$y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta;\ 0<m<n)$.

解 作变换$\frac{z}{x^2+y^2}=u$，$xy=v$，$\frac{y}{x}=w$，则$x=\sqrt{\frac{v}{w}}$，$y=\sqrt{vw}$，$z=uv\left(w+\frac{1}{w}\right)$，且

$$I=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2w\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ v\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & uv\left(1-\frac{1}{w^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

$$V: \frac{1}{n}\leqslant u\leqslant\frac{1}{m}, \ a^2\leqslant v\leqslant b^2, \ \alpha\leqslant w\leqslant\beta.$$

于是，

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{u}{2}du\int_{a^2}^{b^2}v^3dv\int_\alpha^\beta\left(w+\frac{1}{w^3}+\frac{2}{w}\right)dw$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

4094．求函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

在域$x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$内的平均值.

解 域$x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$ 即

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{4},$$

其体积$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

作变换：$x=r\cos\varphi\cos\psi+\frac{1}{2}$，$y=r\sin\varphi\cos\psi+\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{2}+r\sin\psi$，则有

$$f_{平均}=\frac{1}{V}\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\cdot\left(\frac{3}{4}+r^2+r\sin\psi+r\cos\varphi\cos\psi+r\sin\varphi\cos\psi\right)dr$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cos\psi\cdot\left(\frac{3}{4}+r^2\right)dr$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sqrt{3}}{20}\cos\psi d\psi$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\frac{3\sqrt{3}}{10}d\varphi$$

$$=\frac{1}{V}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi=\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\cdot\frac{3\sqrt{3}\pi}{5}=\frac{6}{5}.$$

4095．求函数

$$f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

在域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$内的平均值.

解 由于域V：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$为椭球，其体积等于$\frac{4}{3}\pi abc$，故平均值

$$f_{平均}=\frac{3}{4\pi abc}\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz.$$

若作变换：$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，并利用对称性，则

$$f_{平均}=\frac{3}{4\pi abc}\cdot 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abce^r r^2\cos\psi d\psi$$

$$=3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\right)\left(\int_0^1 r^2e^r dr\right)$$

$$=3(e-2).$$

4096．利用中值定理，估计积分

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

之值，其中$a^2+b^2+c^2>R^2$.

解 由积分中值定理，有

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3, \quad (1)$$

其中$\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$．由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

代表点(x,y,z)与点(a,b,c)之间的距离，显然在域$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$中此距离的最小值是$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R$，最大值是$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R$，并且只在一个点达到最小值，也只在一个点达到最大值．因此，函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

在域$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$中的最大值是$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$，最小值是$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}$，并且只在一个点达到最大值，也只在一个点达到最小值．我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值，也不可能是函数的最小值，事实上，例如，若是最大值，即

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

则由(1)式知

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=0, \quad (2)$$

其中$f(x, y, z)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R}$

$$-\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}}.$$

显然，在域$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$上$f(x,y,z)\geqslant 0$且$f(x,y,z)$为连续函数.于是，由(2)式知在域$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$上必有$f(x,y,z)\equiv 0$，这显然是不可能的。因此，

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R}<\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

即

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R<\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}$$

$$<\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R,$$

故

$$\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R,$$

其中$|\theta|<1$．于是，由(1)式得

$$u=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}.$$

4097．证明：若函数$f(x,y,z)$于域V内是连续的且对于任何的域$\omega\subset V$

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)dxdydz=0,$$

则当$(x,y,z)\in V$时，$f(x,y,z)\equiv 0$．

证 用反证法．若当$(x,y,z)\in V$时，$f(x,y,z)\not\equiv 0$．不失一般性，设对于V的某内点(x_0,y_0,z_0)，有$f(x_0,y_0,z_0)>0$，则由于$f(x,y,z)$的连续性，故存在点(x_0,y_0,z_0)的某个闭邻域$\omega'\subset V$，使当$(x,y,z)\in\omega'$时，

$$f(x,y,z)>0.$$

这样一来，利用中值定理，即有

$$\iiint\limits_{\omega'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V_{\omega'}>0,$$

其中$(\xi,\eta,\zeta)\in\omega'\subset V$．这与假设

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\equiv 0$$

矛盾．因此，当$(x,y,z)\in V$时，$f(x,y,z)\equiv 0$．

4098．求$F'(t)$，设：

(a) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$，其中$f$为可微分函数；

(б) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz$，其中$f$为可微分函数．

解 (a) 作球坐标变换得

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^t f(r^2) r^2 dr$$

$$= 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

于是，

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

(б) 作变换$x = t\xi$，$y = t\eta$，$z = t\zeta$得

$$F(t) = \iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\,dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f(t^3\xi\eta\zeta)\,t^3 d\xi d\eta d\zeta,$$

于是，

$$F\ (t) = 3 \iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} t^2 f(t^3\xi\eta\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta$$

$$+ 3 \iiint\limits_{\substack{0\leqslant \xi\leqslant 1\\0\leqslant \eta\leqslant 1\\0\leqslant \zeta\leqslant 1}} f'(t^3\xi\eta\zeta)\,t^6\xi\eta\zeta\, d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \frac{3}{t}\left[F(t) + \iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t\\0\leqslant z\leqslant t}} f'(xyz)\,xyz\,dxdydz\right] \qquad (t>0).$$

4099. 求

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz,$$

其中m, n, p为非负整数.

解 分两种情况:

i) 设m,n,p中至少有一个是奇数. 例如, 设p为奇数. 于是,

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$+\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\leqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz=I_1+I_2.$$

今在积分I_2中作变量代换$x=u$, $y=v$, $z=-\omega$, 则 $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)}=-1$, 从而, 注意到$p$为奇数, 可知

$$I_2=-\iiint\limits_{\substack{u^2+v^2+\omega^2\leqslant 1\\ \omega\geqslant 0}} u^m v^n \omega^p dudvd\omega=-I_1$$

于是, $I=I_1-I_1=0$.

ii) 设m,n,p均为偶数. 此时被积函数$x^m y^n z^p$关于三个坐标平面皆对称. 于是,

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$= 8 \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz.$$

引用球坐标，$x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，得

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x^m y^n z^p dxdydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+n+1}\psi\sin^p\psi d\psi$$

$$\cdot\int_0^1 r^{m+n+p+2}dr$$

$$=\frac{1}{m+n+p+3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}{}^{*)}$$

$$=\frac{1}{4(m+n+p+3)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4(m+n+p+3)}\cdot\frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}}\cdot\pi\sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+2}{2}}}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{\pi}{2(m+n+p+3)}\cdot\frac{(m-1)!!\cdot(n-1)!!\cdot(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},$$

故

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^n y^n z^p dxdydz$$

$$=\frac{4\pi}{m+p+n+3}\cdot\frac{(m-1)!!\cdot(n-1)!!\cdot(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$$

*) 利用3856题的结果.

4109. 计算迪里黑里积分

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s dxdydz$$

$(p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0)$,

此处V是由平面$x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所界的区域,假定

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\zeta.$$

解 由假设知

$$x=\xi(1-\eta),\ y=\xi\eta(1-\zeta),\ z=\xi\eta\zeta.$$

在此变换下可求得$|I|=\xi^2\eta$，并且积分域V变为:

$$0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1,\ 0\leqslant\zeta\leqslant 1.$$

于是,

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s dxdydz$$

$$=\int_0^1\xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s d\xi\int_0^1\eta^{q+r+1}(1-\eta)^p d\eta$$

$$\cdot\int_0^1\zeta^r(1-\zeta)^q d\zeta$$

$$=B(p+q+r+3,\ s+1)\cdot B(q+r+2,\ p+1)\cdot B(r+1,q+1)$$

$$=\frac{\Gamma(p+q+r+3)\cdot\Gamma(s+1)\cdot\Gamma(q+r+2)\cdot\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)\cdot\Gamma(p+q+r+3)\cdot\Gamma(q+r+2)}$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

§7. 利用三重积分计算体积法

域的体积V由下公式来表示

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$

求由下列曲面所界的体积：

4101. $z=x^2+y^2$，$z=2x^2+2y^2$，$y=x$，$y=x^2$。

解 域V为

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant x,\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x^2+2y^2,$$

故体积为

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{3}{35}.$$

4102. $z=x+y$，$z=xy$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$。

解 域V为

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ xy\leqslant z\leqslant x+y^{*)},$$

故体积为

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_{xy}^{x+y}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y-xy)dy$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^3}{2}\right]dx=\frac{7}{24}.$$

*) 因为$0\leqslant y\leqslant 1$，故有$xy\leqslant z\leqslant x+y$.

4103. $x^2+z^2=a^2$，$x+y=\pm a$，$x-y=\pm a$.

解 $$V=8\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dz$$

$$=8\int_0^a(a-x)\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=8a\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}\right]\Bigg|_0^a$$

$$+\frac{8}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{2a^3}{3}(3\pi-4).$$

4104. $az=x^2+y^2$，$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

解 对立体V在Oxy平面上的射影作极坐标变换

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$$

则域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ \frac{r^2}{a}\leqslant z\leqslant r,$$

且有$|I|=r$. 于是，体积为

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_{\frac{r^2}{a}}^{r}dz$$

$$=2\pi\int_0^a\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)dr=\frac{\pi a^3}{6}.$$

4105. $az=c^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0)$.

解 由$az=a^2-x^2-y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$所界的体积为

$$V_1=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,\, y\geqslant 0}}\left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}}dz\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\frac{a^2-r^2}{a}rdr=\frac{\pi a^3}{8}.$$

由$z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$所界的体积为

$$V_2=\iiint\limits_{\substack{x+y+z\leqslant a\\ x\geqslant 0,\, y\geqslant 0,\, z\geqslant 0}}dxdydz=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{a-x-y}dz$$

$$=\frac{a^3}{6}.$$

于是，所求的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{a^3}{24}(3\pi-4).$$

4106. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 引用圆柱坐标，则域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant2,\ r\leqslant z\leqslant6-r^2.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 rdr\int_r^{6-r^2}dz$$

$$=2\pi\int_0^2(6r-r^3-r^2)\,dr=\frac{32\pi}{3}.$$

变换为球坐标或圆柱坐标，以计算曲面所界的体积：

4107. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\leqslant z^2$.

解 变换为圆柱坐标，则有

$$r^2+z^2=2az\text{及}r^2\leqslant z^2.$$

因而域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2}\ ^{*)}.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^a r(a+\sqrt{a^2-r^2}-r)dr$$

$$=2\pi\left[\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

*) 球面的方程应该是$z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$，但因体积V的一部分为球$x^2+y^2+z^2=2az$的上半部，故取

$$z=a+\sqrt{a^2-r^2}.$$

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

解 变换为球坐标，则域V的$\frac{1}{8}$部分为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\cos 2\psi}.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\psi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}}r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\psi\cdot(\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}}d\psi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}d(\sin\psi)$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt^{*)}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}.$$

*) 作代换 $\sqrt{2}x=\sin t$.

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

解 立体在第一，第三，第六及第八卦限内，对于这些卦限分别有：

$x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ z\geqslant0;\ x\leqslant0,\ y\leqslant0,\ z\geqslant0;$

$x\leqslant0,\ y\geqslant0,\ z\leqslant0;\ x\geqslant0,\ y\leqslant0,\ z\leqslant0.$

立体在这四个卦限内的各部分，一对一对地对称于坐标轴之一。这是因为左端及右端当 x,y,z 中的任何两个同时变号时等式不变。

变换为球坐标，计算得体积

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt[3]{3\cos^2\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi}}r^2\cos\psi dr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\sin\psi d\psi$$

$$=4\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos^4\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

4110. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant0)(0<a<b)$.

解 变换为球坐标，得域V为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ \frac{\pi}{4}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ a\leqslant r\leqslant b.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_a^b r^2\cos\psi dr$$

$$=2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\right)\left(\int_a^b r^2dr\right)$$

$$=\frac{\pi(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)}{3}.$$

在下列各例中最好利用普遍的极坐标

r,φ及ψ $\left(r\geqslant0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

根据下列各式来引入它们

$$x=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,$$
$$y=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,$$
$$z=cr\sin^\beta\psi$$

$(a,b,c,\alpha,\beta$为常数），并且

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

计算下列曲面所界的体积：

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$, 则域的$\frac{1}{4}$部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}.$$

于是，体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}}abcr^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4a^2bc}{3h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi d\psi\right)$$

$$=\frac{\pi a^2bc}{3h}.$$

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$, 并利用对称性，即得体积

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos\psi}abcr^2\cos\psi dr$$

$$=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\psi d\psi$$

$$=\frac{4\pi abc}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}abc.$$

4113. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

解 令$x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $z=z$, 则r满足方程

$$r^4+r^2-1=0.$$

解得$r=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. 于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}abr\,dr\int_{cr^2}^{c\sqrt{1-r^2}}dz$$

$$=2\pi abc\int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}r(\sqrt{1-r^2}-r^2)dr$$

$$=2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

$$=\frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}.$$

4114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$.

解 令$x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $z=z$, 则得体积

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abr\,dr\int_{-c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}dz$$

$$=4\pi\,abc\int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{1}{4}}dr$$

$$=4\pi abc\left[-\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\right]\Big|_0^1=\frac{8}{5}\pi abc.$$

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1.$

解 令$x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$, $y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$, $z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$,

则有$|I|=\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$，且$\frac{1}{8}$域$V$(第一卦限内)为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi dr$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\psi d\psi$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi}^{**)}$$

$$=\frac{1}{3}abc\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

*) 利用3856题的结果。

**) 利用余元公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

利用适当的变量代换，以计算由曲面所界的体积（假定参数是正的）：

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

解 令 $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi$，$y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi$，$z=cr\sin^2\psi$，则有 $|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$，且域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi}4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\,dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\psi\sin\psi\,d\psi$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right.$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b^3}{k^3}\cos\varphi\sin^7\varphi d\varphi$$

$$+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi d\varphi$$

$$+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^5\varphi d\varphi\Big)$$

$$=\frac{2}{15}abc\left(\frac{a^3}{8h^3}+\frac{b^3}{8k^3}+3\cdot\frac{a^2b}{h^2k}\cdot\frac{1}{24}+3\cdot\frac{ab^2}{hk^2}\cdot\frac{1}{24}\right)^{*)}$$

$$=\frac{1}{60}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

*) 利用3856题的结果。

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

解 令$x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi$, $y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi$, $z=cr\sin^2\psi$, 则有$|I|=4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$, 且域$V$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi.$$

于是，体积为

$$V=4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi}r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\,dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{15}\psi\sin^7\psi d\psi$$

$$=\frac{4}{3}abc\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma(8)\Gamma(4)}{\Gamma(12)}^{*)}$$

$$=\frac{1}{3}abc\cdot\frac{3!3!}{7!}\cdot\frac{7!\cdot3!}{11!}=\frac{abc}{554400}.$$

*) 利用3856题的结果.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\quad(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

解 令$x=ar\cos^2\varphi\cos\psi, y=br\sin^2\varphi\cos\psi, z=cr\sin\psi$, 则有$|I|=2abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$，且域$V$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant1.$$

于是，体积为

$$V=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi dr$$

$$=\frac{2}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi=\frac{1}{3}abc.$$

4119. $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0, y>0)$.

解 令$z=u(x^2+y^2)$, $xy=v$, $x=yw$,则

$$x=\sqrt{vw},\ y=\sqrt{\frac{v}{w}},\ z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right).$$

变换的雅哥比式为

$$I=\begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}}\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}}\\ vw+\frac{v}{w} & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(v-\frac{v}{w^2}\right)\end{vmatrix}$$

$$=-\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right),$$

而域V为

$$1\leqslant u\leqslant 2,\quad a^2\leqslant v\leqslant 2a^2,\ \frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2.$$

于是，体积为

$$V=\int_1^2 du\int_{a^2}^{2a^2} dv\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right)dw$$

$$=\frac{3a^4}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{w^2}\right)dw$$

$$=\frac{9a^4}{4}.$$

4120. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0\ (x>0)$.

解 令$x=r\cos\varphi$, $y=y$, $z=r\sin\varphi$, 则域V为

$$a\leqslant r\leqslant b,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},$$

$$-r\sqrt{\cos 2\varphi}\leqslant y\leqslant r\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

于是，体积为

$$V=\int_a^b rdr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}}dy$$

$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}^{*)},$$

$$=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).\quad {}^{**)}$$

*) 利用3856题的结果.

**) 利用余元公式有

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}\pi.$$

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

解 采用球坐标：$x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，$z=r\sin\psi$，则域V的$\frac{1}{8}$部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant a\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}\psi.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{a\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}\psi}r^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi d\psi=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则域V的$\frac{1}{4}$部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{c}{h}\sin\psi\, e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于$z\geqslant 0$，故域V在Oxy平面的上方.

于是，体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int^{\left(\frac{c}{h}\sin\psi\, e^{-\sin^2\psi}\right)^{\frac{1}{3}}} abcr^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{4c^2ab}{3h}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cos\psi e^{-\sin^2\psi}d\psi$$

$$=-\frac{\pi abc^2}{3h}e^{-\sin^2\psi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1}).$$

4123. $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$

$x=0$，$x=a$.

解 令 $u=\frac{x}{a}$，$v=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，$w=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$，

则

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}\end{vmatrix}=\frac{1}{abc},$$

且域V变为

$$0\leqslant u\leqslant 1,\ \frac{2}{\pi}w\arcsin w\leqslant v\leqslant 1,\ -1\leqslant w\leqslant 1.$$

于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=abc$，且体积为

$$V=abc\int_0^1 du\int_{-1}^1 dw\int_{\frac{2}{\pi}w\arcsin w}^1 dv$$

$$=2abc\int_0^1[1-\frac{2}{\pi}w\arc\sin w]dw$$

$$=2abc-\frac{2abc}{\pi}\int_0^1 \arc\sin w d(w^2)$$

$$=abc+\frac{2abc}{\pi}\int_0^1 w^2(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}dw$$

$$=abc+\frac{abc}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=abc+\frac{abc}{\pi}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}abc.$$

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$，$x=0$，$z=0$，

$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

解　令 $u=\frac{x}{a}$，　$v=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，　$w=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$，则

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\frac{1}{abc},$$

且域V变为

$0\leqslant u\leqslant w$，$we^{-w}\leqslant v\leqslant w$，$0\leqslant w\leqslant 1$.

于是，$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=abc$，且体积为

$$V=abc\int_0^1 dw\int_0^w du\int_{we^{-w}}^{w} dv$$

$$=abc\int_0^1 (w^2-w^2e^{-w})dw$$

$$=abc\left(\frac{1}{3}-2+5e^{-1}\right)$$

$$=5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right).$$

4125．求曲面$x^2+y^2+az=4a^2$将球$x^2+y^2+z^2=4az$分成两部分的体积的比．

解 曲面$x^2+y^2+az=4a^2$与球面$x^2+y^2+(z-2a)^2=4a^2$的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2, \\ z=a, \end{cases}$$

且有公共的顶点 $(0,0,4a)$．球内位于曲面$x^2+y^2+az=4a^2$下方部分的体积为

$$V_1=\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4az-z^2} dxdy$$

$$+\int_a^{4a} dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4a^2-az} dxdy$$

$$=\int_0^a \pi(4az-z^2)\,dz+\int_a^{4a}\pi(4a^2-az)dz$$

$$=2\pi a^3-\frac{1}{3}\pi a^3+12\pi a^3-\frac{15}{2}\pi a^3$$

$$=\frac{37}{6}\pi a^3.$$

从而，另一部分的体积

$$V_2=\frac{4}{3}\pi(2a)^3-\frac{37}{6}\pi a^3=\frac{27}{6}\pi a^3.$$

于是，球被曲面所分的两部分体积之比为

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{37}{27}.$$

4126．求由曲面

$$x^2+y^2=az,\quad z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\quad(a>0)$$

所界的体积和表面积．

解 两曲面的交线为圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=a,\end{cases}$$

又曲面$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$的顶点为$(0,0,2a)$．于是，体积为

$$V=\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant az}dxdy+\int_a^{2a}dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2a-z)^2}dxdy$$

$$=\int_0^a \pi azdz+\int_a^{2a}\pi(2a-z)^2dz$$

$$=\frac{\pi a^3}{2}+\frac{\pi a^3}{3}=\frac{5\pi a^3}{6}.$$

由两曲面方程分别可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{a},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

于是，曲面的表面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,a^2rdr+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

4127．求由平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3.$$

所界平行六面体的体积，设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

解 令

$$a_1x+b_1y+c_1z=u,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=v,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=w,$$

则有$\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是，$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\dfrac{1}{\Delta}$，且体积为

$$V=\int_{-h_1}^{h_1}du\int_{-h_2}^{h_2}dv\int_{-h_3}^{h_3}\frac{1}{|\Delta|}dw=\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

4128. 求由曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2$$
$$+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$$

所界的体积，设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

解 令

$$a_1x+b_1y+c_1z=u,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=v,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=w,$$

则有$\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是，$\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\dfrac{1}{\Delta}$，且体积为

$$V=\frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant h^2}dudvdw=\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

4129. 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}\quad(n>1)$$

所界的体积.

解 令$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则有$|I|=abcr^2\cos\psi$，且域V的$\frac{1}{4}$为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}，\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}，$$

$$0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}.$$

于是，体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int^{\sqrt[3]{\frac{c}{h}\cdot\frac{\sin\psi\cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}}}abcr^2\cos\psi dr$$

$$=\frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi\cos^{2n-3}\psi d\psi}{\cos^{2n}\psi+\sin^{2n}\psi}$$

$$=\frac{2}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{t^{2n}+(1-t^2)^n}$$

$$=-\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{t^{2n-4}d(1-t^2)}{t^{2n}+(1-t^2)^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{(1-x)^{n-2}dx}{(1-x)^n+x^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^1\frac{\frac{1}{(1-x)^2}dx}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{3h}\pi abc^2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}\overset{*)}{=}\frac{1}{3h}\pi abc^2\cdot\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\overset{**)}{}$$

$$=\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{abc^2}{h}.$$

*) 作代换 $t=\frac{x}{1-x}$.

**) 利用3851题的结果.

4130. 求在正卦限$Oxyz$($x>0$, $y>0$, $z>0$)内由曲面

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1\ (m>0,\ n>0,\ p>0)$$

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

所界的体积.

解 令

$$x=ar^{\frac{2}{m}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\cos^{\frac{2}{m}}\psi,$$

$$y=br^{\frac{2}{n}}\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z=cr^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\psi,$$

则

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\frac{8abc}{mnp}r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi$$

$$\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi.$$

于是，体积为

$$V=\frac{8abc}{mnp}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{p}-1}\psi d\psi\int_0^1 r^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1}dr$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\ \frac{1}{p}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{2}{p}}\ ^{*)}$$

$$=\frac{8abc}{mnp}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$$

$$\cdot\frac{mnp}{2(mn+np+mp)}$$

$$=\frac{abc}{mn+np+mp}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}.$$

*) 利用3856题的结果.

§8．三重积分在力学上的应用

1° 物体的质量　若一物体占有体积V，$\rho=\rho(x,y,z)$为在点$(x,\ y,\ z)$的密度，则该物体的质量等于

$$M=\iiint\limits_V \rho\,dx\,dy\,dz.$$

2° 物体的重心　物体的重心坐标$(x_0,\ y_0,\ z_0)$按下列公式来计算

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\,dx\,dy\,dz,\\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\,dx\,dy\,dz,\\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

若物体是均匀的，则在公式（1）中可令$\rho=1$．

3° 转动惯量　积分

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2 dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2 dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2 dx\,dy\,dz$$

分别称为物体对于坐标平面的转动惯量．

积分

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2 dx\, dy\, dz$$

（其中 r 为物体的动点（x，y，z）与轴 l 的距离）称为物体对于某轴 l 的转动惯量．特别是，对于坐标轴 Ox，Oy，Oz 分别有

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\quad I_y=I_{yx}+I_{yz},\quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

积分

$$I_0=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2+z^2)dx\, dy\, dz$$

称为物体对于坐标原点的转动惯量．

显而易见，有

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4° 引力场的位　积分

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\ \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$$

（其中 V 为物体的体积，$\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$为物体的密度及

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\ )$$

称为物体在点 P（x，y，z）的牛顿位．

质量为 m 的质点被物体吸引的力在坐标轴 Ox，Oy，Oz 上的射影 X，Y，Z 等于

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint\limits_V \rho\frac{\xi-x}{r^3}d\xi\, d\eta\, dd\zeta,$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=km\iiint\limits_V \rho\frac{\eta-y}{r^3}d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Z = km\frac{\partial u}{\partial z} = km\iiint\limits_{V} \rho\frac{\zeta - z}{r^3}d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

其中 k 为引力定律常数.

4131. 设物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度由公式 $\rho = x + y + z$ 所给出，求占有单位体积 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ 之物体的质量.

解 质量以 M 表示，则按题设有

$$M = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)dz = \frac{3}{2}.$$

4132. 若物体的密度按规律 $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$（其中 $\rho_0 > 0$ 及 $k > 0$ 为常数）而变更，求占有无限域 $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$，则质量为

$$M = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_1^{+\infty} r^2\rho_0 e^{-kr}\cos\psi\, dr$$

$$= 4\pi\rho_0\int_1^{+\infty} r^2 e^{-kr}\, dr$$

$$= -\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty} r^2 de^{-kr}$$

$$= -\frac{4\pi\rho_0}{k}r^2 e^{-kr}\Big|_1^{+\infty}$$

$$+\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}2re^{-kr}\,dr$$

$$=\frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}r\,de^{-kr}$$

$$=\frac{4\pi\rho_0}{k}e^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}re^{-kr}\Big|_1^{+\infty}$$

$$+\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}e^{-kr}\,dr$$

$$=4\pi\rho_0 e^{-k}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).$$

求由下列曲面所界的均匀物体的重心坐标：

4133. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, $z=z$，则质量为

$$M=ab\int_0^c dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}r\,dr=\frac{\pi abc}{3}.$$

设重心坐标为 x_0, y_0, z_0，由对称性知 $x_0=y_0=0$，而

$$z_0=\frac{ab}{M}\int_0^c z\,dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{z}{c}}r\,dr$$

$$=\frac{3}{\pi abc}\cdot\frac{\pi abc^2}{4}=\frac{3c}{4}.$$

于是，重心为点$\left(0,\ 0,\ \frac{3c}{4}\right)$.

4134. $z=x^2+y^2$, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\frac{1}{6}a^4.$$

重心的横坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a xdx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}dz$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2a}{5}.$$

同理可求得 $y_0=\frac{2a}{5}$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}zdz$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^a\Big(\frac{a^5}{10}-\frac{1}{2}a^4x+\frac{4}{3}a^3x^2$$

$$-2a^2x^3+2ax^4-\frac{14}{15}x^5\Big)dx$$

$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{7}{180}a^6=\frac{7}{30}a^2.$$

于是，重心的坐标为 $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$，$z_0=\frac{7}{30}a^2$.

4135. $x^2=2pz$，$y^2=2px$，$x=\frac{p}{2}$，$z=0$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\frac{p}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{p^3}{28}.$$

重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}xdx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz$$

$$=\frac{p^4}{72}\cdot\frac{28}{p^3}=\frac{7}{18}p.$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}ydy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=0.$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{p}{2}}dx\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}dy\int_0^{\frac{x^2}{2p}}zdz$$

$$=\frac{p^4}{704}\cdot\frac{28}{p^3}=\frac{7}{176}p.$$

4136. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

解 若令

$x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$,

$z=cr\sin\psi$,

则质量为

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{1}{6}\pi abc.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi$$

$$\cdot ar\cos\varphi\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\,d\psi\int_0^1 a^2bcr^3dr$$

$$=\frac{1}{16}\pi a^2bc\cdot\frac{6}{\pi abc}=\frac{3}{8}a.$$

利用对称性知重心的坐标为 $x_0=\frac{3}{8}a$，$y_0=\frac{3}{8}b$，$z_0=\frac{3}{8}c$。

4137. $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$ $(z>0)$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^a dz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dx$$

$$=4\int_0^a(a^2-z^2)dz=\frac{8a^3}{3}.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a dz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}xdx=0.$$

同理可得 $y_0=0$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a z\,dz\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dy\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}dx$$

$$=a^4\cdot\frac{3}{8a^3}=\frac{3}{8}a.$$

于是，重心的坐标为 $x_0=y_0=0$，$z_0=\frac{3}{8}a$。

4138. $x^2+y^2=2z$，$x+y=z$。

解 由 $x^2+y^2=2z$，$x+y=z$ 所围成的立体在平面 $z=0$ 上的投影为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$。

若引用代换

$$x=1+r\cos\theta,\qquad y=1+r\sin\theta,$$

则质量为

$$M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\,dr\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{r^2}{2}\right)r\,dr=\pi.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\,dr$$

$$\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}(1+r\cos\theta)dz$$

$$=\frac{1}{M}\left[\pi+\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\left(1-\frac{r^2}{2}\right)dr\right]$$

$$=\frac{\pi}{M}=1.$$

同理可得 $y_0=1$，而

$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)}zdz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\Big[3+(\sin\theta+\cos\theta)(2r-r^3)$$

$$-\frac{1}{4}r^4-r^2\Big]rdr$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\pi}{3}=\frac{5}{3}.$$

于是，重心坐标为 $x_0=y_0=1$，$z_0=\frac{5}{3}$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{abc}$ $(x>0, y>0, z>0)$.

解 作代换：$x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则物体的质量为

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi}abcr^2\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{1}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\psi\sin^3\psi\,d\psi$$

$$=\frac{1}{3}abc\cdot\frac{1}{2}B(2,2)\cdot\frac{1}{2}B(4,2)$$

$$=\frac{1}{12}abc\cdot\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)}\cdot\frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{abc}{1440}.$$

于是，

$$x_0=\frac{1}{M}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi$$

$$\int_0^{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi}r^3\cos^2\psi\cos\varphi\,dr$$

$$=\frac{a^2bc}{4M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}\psi\sin^4\psi\,d\psi$$

$$=\frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}B\left(3,\frac{5}{2}\right)B\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{a^2bc}{4M}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)}$$

$$=\frac{18a^2bc\pi}{16\cdot16\cdot7!}\cdot\frac{1440}{abc}=\frac{9\pi}{448}a.$$

由对称性知，重心坐标为 $x_0=\frac{9\pi}{448}a$，

$$y_0=\frac{9\pi}{448}b,\quad z_0=\frac{9\pi}{448}c.$$

4140. $z=x^2+y^2$， $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$， $x+y=\pm1$，

$x-y=\pm1$。

解 作代换：$x-y=u$，$x+y=v$，则有

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{v-u}{2},$$

$$z=\frac{u^2+v^2}{4}\text{ 及 }z=\frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I|=\frac{1}{2}$ 及域 V 为：$-1\leqslant u\leqslant 1$，$-1\leqslant v\leqslant 1$，

$\frac{u^2+v^2}{4}\leqslant z\leqslant\frac{u^2+v^2}{2}$。于是，

$$M=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}dz=\frac{1}{3}.$$

$$x_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(u+v)dz=0,$$

$$y_0=\frac{1}{4M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}(v-u)dz=0,$$

$$z_0=\frac{1}{2M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}zdz$$

$$=\frac{3}{64}\cdot\frac{1}{M}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}(u^4+2u^2v^2+v^4)dv$$

$$=\frac{3}{64M}\int_{-1}^{1}\left(2u^4+\frac{4u^2}{3}+\frac{2}{5}\right)du$$

$$=\frac{7}{20},$$

即重心坐标为 $x_0=y_0=0$，$z_0=\frac{7}{20}$。

4141. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$

($n>0$，$x>0$，$y>0$，$z>0$)．

解　作代换：

$$x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,\quad y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi,$$

$$z=cr\sin^{\frac{2}{n}}\psi,$$

则有 $|I|=\frac{4}{n^2}abcr^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi$

$\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi$．于是，

$$M=\frac{4}{n^2}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi$$

$$\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\,dr$$

$$=\frac{4}{n^2}abc\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

重心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\frac{4}{n^2}a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi$$

$$\cdot\int_0^1 r\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\psi\, r^2\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi$$

$$\cdot\cos^{\frac{4}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\,dr$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{4}{n}-1}\varphi\,d\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{6}{n}-1}\psi\sin^{\frac{2}{n}-1}\psi\,d\psi$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{n^2}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{n},\ \frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{3n^2}{abc}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{a^2bc}{4n^2}$$

$$\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}a,$$

同理可求得

$$y_0=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}b,$$

$$z_0=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}c.$$

4142. 求形状为立方体:

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1$$

的物体的重心坐标，设此物体在点(x,y,z)的密度等于

$$\rho=x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}\ y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}\ z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$0<\gamma<1$.

解 物体的质量为

$$M=\int_0^1 x^{\frac{2\gamma-1}{1-\alpha}}dx\int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}dy\int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}dz$$

$$=\frac{1-\alpha}{\alpha}\ x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\Big|_0^1\cdot\frac{1-\beta}{\beta}\ y^{\frac{\beta}{1-\beta}}\Big|_0^1$$

$$\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}+1}dx\int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}dy$$

$$\cdot\int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}dz$$

$$=\frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

$$\cdot(1-\alpha)\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma}=\alpha,$$

同理可求得 $y_0=\beta$, $z_0=\gamma$.

求由下列曲面（参变量是正的）所界均匀物体对于坐标平面的转动惯量：

4143. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 $I_{xy}=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}z^2dz$

$$=\frac{c^3}{3}\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^3dy$$

$$=-\frac{bc^3}{12}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^4\Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx$$

$$=\frac{bc^3}{12}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^4dx$$

$$=\frac{abc^3}{60}.$$

利用对称性可得

$$I_{yz}=\frac{a^3bc}{60},\qquad I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}.$$

4144. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，

$z=cr\sin\psi$，则有

$$I_{xy}=abc^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^1 r^4\cos\psi\sin^2\psi\,dr$$

$$=\frac{abc^3}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi\,d\psi$$

$$=\frac{abc^3}{15}\cdot 2\pi\cdot\sin^3\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

利用对称性可得

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc,\quad I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

4145. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$，　$z=c$。

解　若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则有

$$I_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abrdr\int_{cr}^{c}z^2dz$$

$$=\frac{1}{5}\pi abc^3,$$

$$I_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abrdr\int_{cr}^{c}(ar\cos\varphi)^2dz$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^1(1-r)r^3dr$$

$$=\frac{1}{20}\pi a^3bc.$$

利用对称性可得

$$I_{zz}=\frac{1}{20}\pi ab^3c.$$

4146. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$.

解 若令 $x=ar\cos\varphi$，$y=br\sin\varphi$，则得域 V 为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,$$
$$-c\sqrt{1-r^2}\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-r^2}.$$

于是，

$$I_{xy}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}abrdr\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}z^2dz$$

$$=\frac{2}{3}abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}rdr$$

$$=\frac{2}{15}abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1-(\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}]d\varphi$$

$$=\frac{4}{15}abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^5\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{4}{15}abc^3(\varphi+\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos^3\varphi$$
$$+\frac{1}{5}\cos^5\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16).$$

$$I_{yz}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{\cos\varphi}abrdr\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(ar\cos\varphi)^2dz$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\int_{0}^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}\,r^3dr$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\sin t\cos^3t\,dt$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\left\{\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\sin t\cos^3t\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\sin t\cos^3t\,dt\right\}d\varphi$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{2}{15}\right.$$

$$\left.+\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\sin t\cos^3t\,dt\right\}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$=2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}\right.$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\int_{\varphi}^{0}\sin^2t\cos^3t\,dt\right)\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varphi}^{0}\sin^2t\cos^2t\,dt\right)\cos^2\varphi d\varphi\right\}$$

$$=2a^3bc\left\{\frac{\pi}{15}+\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos^2\varphi\,d\varphi\Big\}$$

$$=2a^3bc\left(\frac{\pi}{15}-\frac{92}{1575}\right)$$

$$=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92),$$

$$I_{zz}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}abr\,dr\int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}}(br\sin\varphi)^2dz$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}\,r^3\sin^2\varphi\,dr$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|$$

$$\cdot\sin t\cos^3t\,dt$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big\{\frac{2}{15}$$

$$+\int_{\varphi}^{0}|\sin t|\cdot\sin t\cos^3t\cdot dt\Big\}\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$=2ab^3c\Big\{\frac{\pi}{15}+\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}\sin^5\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin^2\varphi\,d\varphi\Big\}$$

$$=2ab^3c\left(\frac{\pi}{15}-\frac{272}{1575}\right)$$

$$=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272).$$

4147. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

解 两曲面在 Oxy 平面上的投影为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}=0$，即 $\left(\frac{x}{a}-1\right)^2+\left(\frac{y}{b}-1\right)^2=2$．若令

$$\frac{x}{a}=1+r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=1+r\sin\varphi,$$

则得域 V 为

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},$$

$$c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]$$

$$\leqslant z\leqslant c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)].$$

于是，

$$I_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}abrdr$$

$$\int_{c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}^{c[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]}z^2dz$$

$$=\frac{1}{3}abc^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\left[8+12r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right.$$

$$+6r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2-\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^3$$

$$-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right)^2 r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$-3\left(1+\frac{r^2}{2}\right) r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\Big]dr$$

$$=\frac{7}{2}\pi abc^3.$$

$$I_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}a^3br(1+r\cos\varphi)^2dr$$

$$\int_{c\left[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}^{c\left[2+r(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]}dz$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r(1+2r\cos\varphi$$

$$+r^2\cos^2\varphi)\left(1-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3bc.$$

利用对称性得 $I_{zx}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$.

求由下列曲面所界均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量：

4148. $z=x^2+y^2$，$x+y=\pm1$，$x-y=\pm1$，$z=0$.

解 曲面所界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量记以 I_z，则

$$I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

若令 $x+y=u$，$x-y=v$，则有

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},\quad z=\frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I|=\frac{1}{2}$. 于是,

$$I_z=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{0}^{\frac{u^2+v^2}{2}}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u+v}{2}\right)^2\right\}dz$$

$$=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}\frac{(u^2+v^2)^2}{8}dv=\frac{14}{45}.$$

4149. $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$.

解 若令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则有

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ r\leqslant z\leqslant\sqrt{2-r^2}.$$

于是,

$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}r^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(r^3\sqrt{2-r^2}-r^4)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{8\sqrt{2}-7}{15}-\frac{1}{5}\right)d\varphi^{*)}$$

$$=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5).$$

*) 作代换 $r=\sqrt{2}\sin t$.

4150. 设球在动点 $P(x, y, z)$ 的密度与该点至球心距离成

比例，求质量为M的非均匀球体$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$对于其直径的转动惯量.

解 不失一般性，取Oz轴在球内的一段作为直径．若令

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

则质量为

$$M=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^R r^2\cos\psi\cdot krdr=k\pi R^4,$$

由此得$k=\dfrac{M}{\pi R^2}$．从而密度$\rho=\dfrac{Mr}{\pi R^4}$．于是，所求的转动惯量为

$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^R r^2\cos^2\psi\cdot\frac{Mr^3}{\pi R^4}\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{2M}{R^4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\,d\psi\right)\left(\int_0^R r^5dr\right)=\frac{4MR^2}{9}.$$

4151．证明等式

$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$

其中I_l为物体对于某轴l的转动惯量，I_{l_0}为对于平行于l并通过物体重心的轴l_0的转动惯量，d为轴与轴之间的距离及M为物体的质量．

证 以重心为坐标原点O，z轴与l_0重合，l与Oxy平面的交点为$(\zeta,\eta,0)$，如图8.59所示，则

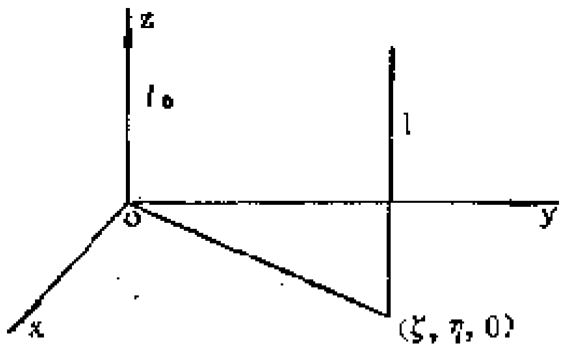

图 8.59

$$I_l=\iiint\limits_V[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\rho\,dv$$
$$=\iiint\limits_V(x^2+y^2)\rho dv+(\xi^2+\eta^2)$$
$$\cdot\iiint\limits_V\rho dv-2\xi\iiint\limits_V x\rho dv-2\eta\iiint\limits_V y\rho dv \qquad (1)$$

由于重心在原点，故 $x_0=y_0=0$，即

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V x\rho dv=0$$

及 $$y_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V y\rho dv=0,$$

并且 $M=\iiint\limits_V\rho dv$，$d^2=\xi^2+\eta^2$，代入（1）式，最后得

$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$

4152．证明：体积为V 的物体对于过其重心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α，β，γ 的轴 l 的转动惯量等于

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta$$
$$+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma.$$

其中 I_x，I_y，I_z 为物体对于坐标轴的转动惯量及

$$K_{xy}=\iiint\limits_V\rho xy\,dx\,dy\,dz,$$

$$K_{xz}=\iiint\limits_V\rho xz\,dx\,dy\,dz,$$

$$K_{yz}=\iiint\limits_{V}\rho yz\,dx\,dy\,dz$$

为离心距。

证 如图8.60所示。距离

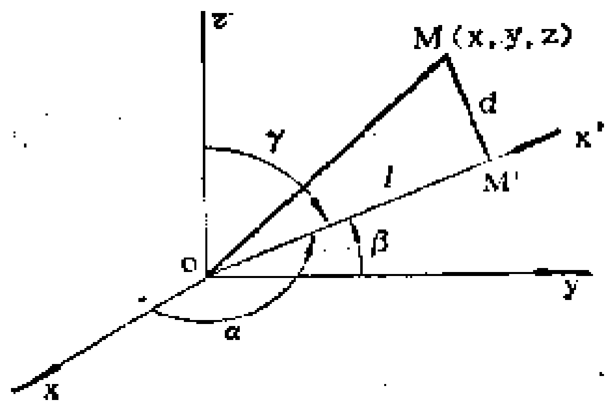

图 8.60

$$d=\frac{|\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OM'}|}{|\overrightarrow{OM'}|}$$

$$=\frac{1}{r}\sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r\cos\beta & r\cos\gamma\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ r\cos\gamma & r\cos\alpha\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ r\cos\alpha & r\cos\beta\end{vmatrix}^2}$$

其中 $r=|\overrightarrow{OM}|$。由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，故有

$$d^2=(x^2+y^2)\cos^2\gamma+(y^2+z^2)\cos^2\alpha$$
$$+(z^2+x^2)\cos^2\beta-2xy\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2yz\cos\beta\cos\gamma-2xz\cos\alpha\cos\gamma.$$

于是，

$$I_l=\iiint\limits_{V}\rho d^2\cdot dx\,dy\,dz$$

$$
\begin{aligned}
&=\cos^2\gamma\iiint\limits_V \rho\cdot(x^2+y^2)dx\,dy\,dz\\
&\quad+\cos^2\alpha\iiint\limits_V \rho\cdot(y^2+z^2)dx\,dy\,dz\\
&\quad+\cos^2\beta\iiint\limits_V \rho\cdot(x^2+z^2)dx\,dy\,dz\\
&\quad-2\cos\alpha\cos\beta\iiint\limits_V \rho xy\,dx\,dy\,dz\\
&\quad-2\cos\beta\cos\gamma\iiint\limits_V \rho yz\,dx\,dy\,dz\\
&\quad-2\cos\gamma\cos\alpha\iiint\limits_V \rho xz\,dx\,dy\,dz\\
&=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma\\
&\quad-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma\\
&\quad-2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.
\end{aligned}
$$

证毕。

4153．求密度为ρ_0的均匀圆柱$x^2+y^2\leqslant a^2$，$z=\pm h$对于直线$x=y=z$的转动惯量。

解 直线$x=y=z$通过圆柱的重心$O(0,0,0)$且具有方向余弦$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$。若取极坐标，则有

$$
\begin{aligned}
I_x&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0(r^2\sin^2\varphi+z^2)dz\\
&=\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3\right)\rho_0,
\end{aligned}
$$

$$I_y=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0(r^2\cos^2\varphi+z^2)dz$$

$$=\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3\right)\rho_0,$$

$$I_z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0r^2dz=\pi ha^4\rho_0,$$

$$K_{xy}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0r^2\cos\varphi\sin\varphi\,dz=0,$$

$$K_{yz}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0r\sin\varphi\cdot zdz=0,$$

$$K_{zx}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_{-h}^{h}\rho_0\cdot r\cos\varphi\cdot zdz=0,$$

于是，根据4152题结果即得

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma$$
$$-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$
$$-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma$$
$$=\frac{\rho_0}{3}\left(\frac{1}{2}\pi a^4h+\frac{2}{3}\pi a^2h^3+\frac{1}{2}\pi a^4h\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\pi a^2h^3+\pi a^4h\right)=\frac{2}{3}\pi\rho_0a^2h\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$$
$$=\frac{M}{3}\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right),$$

其中$M=2\pi\rho_0a^2h$为圆柱的质量。

4154. 求密度为ρ_0，由曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$$

所界的均匀物体对于坐标原点的转动惯量。

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi$，则对坐标原点的转动惯量为

$$I_0=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{a\cos\psi}\rho_0\cdot r^2\cdot r^2\cos\psi\,dr$$

$$=\frac{4\pi\rho_0a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\psi\,d\psi$$

$$=\frac{4\pi\rho_0a^5}{5}\cdot\frac{5\pi}{32}^{*)}=\frac{\pi^2a^5\rho_0}{8}.$$

*) 利用2282题的结果。

4155. 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 在点 (x,y,z) 的牛顿位。

解 由对称性显然可知，所求的牛顿位与 ξ，η，ζ 轴取的方向无关。今取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即得牛顿位

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\rho_0\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}}$$

$$=\rho_0\int_{-R}^{R}d\zeta\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

积分之，得

$$u(x,y,z)$$
$$=2\pi\rho_0\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}-|\zeta-r|)d\zeta.$$

由于

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{3r}\left[(R+r)^3-|R-r|^3\right]$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{3}R^3\cdot\frac{1}{r}+2rR, & (r>R);\\ \frac{2}{3}r^2+R^2, & (r\leqslant R),\end{cases}$$

及

$$\int_{-R}^{R}|\zeta-r|\,d\zeta=\begin{cases}2Rr & (r>R),\\ r^2+R^2 & (r\leqslant R).\end{cases}$$

因而，最后得

$$u(x,y,z)=\begin{cases}\frac{4}{3r}\pi R^3\rho_0 & (r>R),\\ 2\pi\rho_0\cdot\left(R^2-\frac{1}{3}r^2\right) & (r\leqslant R).\end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论：

1.在球外一点上的牛顿位，与将球的全部质量集中在它的中心处时一样；

2.如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球，则它在位于其空隙处的一点（$r<R$）上的牛顿位可表示成差

$$u(x,y,z)=u_2(x,y,z)-u_1(x,y,z)$$

$$=\left(R_2^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0$$

$$-\left(R_1^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0$$

$$=2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho_0.$$

它与 r 无关，故空心球体在其空隙范围内的位势保持一个常数值。

4156. 设密度 $\rho=f(R)$，其中 f 为已知函数，且 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$，求球壳层 $R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$ 在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿位。

解 取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即得牛顿位

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2} f(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})\cdot\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

若引入球坐标，即得

$u(x,y,z)$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2 f(\rho)\cos\psi\cdot\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}d\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 f(\rho)\cdot\frac{\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}}$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2 f(\rho)$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\rho r}\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\sin\psi}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\rho$$

$$=2\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho^2 f(\rho)\left\{-\frac{1}{\rho r}[|\rho-r|-(\rho+r)]\right\}d\rho$$

$$=\begin{cases}4\pi\int_{R_1}^{R_2}\rho f(\rho)d\rho, & \text{当 }\rho>r;\\ 4\pi\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{r}f(\rho)d\rho, & \text{当 }\rho\leqslant r.\end{cases}$$

合并之，最后得

$$u(x,y,z)=4\pi\int_{R_1}^{R_2}f(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r},\ \rho\right)d\rho.$$

4157. 求有固定密度 ρ_0 的圆柱 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$，$0\leqslant\zeta\leqslant h$ 在点 $P(0,\ 0,\ z)$的牛顿位.

解 若引用柱坐标，即得

$$u(x,\ y,\ z)$$

$$=\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h d\zeta\int_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}}$$

$$=2\pi\rho_0\int_0^h\sqrt{r^2+(\zeta-z)^2}\Big|_0^a d\zeta$$

$$=2\pi\rho_0\int_0^h[\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}-|\zeta-z|]d\zeta$$

$$=2\pi\rho_0\left[\frac{(\zeta-z)}{2}\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\right.$$

$$+\frac{a^2}{2}\ln|(\zeta-z)+\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}|$$

$$-\frac{(\zeta-z)|\zeta-z|}{2}\Big]_0^h$$

$$=\pi\rho_0\Big\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}$$

$$-[(h-z)|h-z|+z|z|]$$

$$+a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{-z+\sqrt{a^2+z^2}}\right|\Big\}.$$

4158. 半径为R和质量为M的均匀球体$\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$以怎样的力吸引质量为$m$的质点$P(0,\ 0,\ a)$？

解 引力在Ox轴和Oy轴上的射影为零，即$X=Y=0$，而在Oz轴上的射影为

$$Z=k\rho_0 m\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\frac{(\zeta-a)d\xi\,d\eta\,d\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)d\zeta$$

$$\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{d\xi\,d\eta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)d\zeta$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{R^2-\zeta^2}}\frac{r\,dr}{[r^2+(\zeta-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}(\zeta-a)\Big(\frac{1}{|\zeta-a|}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}\Big)d\zeta$$

$$=2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)d\zeta$$

$$-2\pi km\rho_0\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}},$$

其中 $\rho_0=\frac{3M}{4\pi R^3}$.

分别求上述两个积分：

当 $a\geqslant R$ 时，

$$\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)d\zeta=-\int_{-R}^{R}d\zeta=-2R,$$

当 $a<R$ 时，

$$\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(\zeta-a)d\zeta=-\int_{-R}^{a}d\zeta+\int_{a}^{R}d\zeta=-2a,$$

而

$$\int_{-R}^{R}\frac{(\zeta-a)d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{R^2+a^2-2a\zeta-(R^2+a^2)}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}d\zeta$$

$$-a\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2-2a\zeta+a^2}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,d\zeta$$

$$+\left(\frac{R^2+a^2}{2a}-a\right)\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}}$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\,d\zeta$$

$$+\frac{R^2-a^2}{2a}\int_{-R}^{R}\frac{d\zeta}{\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}},$$

当 $a\geqslant R$ 时，将上式右端分别积分，得结果：

$$\left[\frac{1}{4a^2}(R^2+a^2-2a\zeta)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{R^2-a^2}{2a}\left(-\frac{1}{2a}\right)\right.$$

$$\left.\cdot 2\sqrt{R^2+a^2-2a\zeta}\right]\Bigg|_{-R}^{R}$$

$$=\frac{1}{6a^2}[(a-R)^3-(a+R)^3]$$

$$-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(a-R)-(a+R)]$$

$$=\frac{2R^3}{3a^2}-2R;$$

当 $a<R$ 时，积分得结果：

$$\frac{1}{6a^2}[(R-a)^3-(a+R)^3]$$

$$-\frac{R^2-a^2}{2a^2}[(R-a)-(R+a)]$$

$$=-\frac{4a}{3}.$$

于是，当 $a\geqslant R$ 时，则

$$Z=2\pi km\rho_0\left(-2R+\frac{2R^3}{3a^2}+2R\right)$$

$$=-\frac{4}{3a^2}\pi km\rho_0R^3=-\frac{kMm}{a^2};$$

当 $a<R$ 时，则

$$Z=2\pi km\rho_0\left(-2a+\frac{4a}{3}\right)$$

$$=-\frac{4}{3}\pi akm\rho_0=-\frac{kMm}{R^3}a.$$

从以上结果可以得到两个推论：

1.位于球外的一点（$a\geqslant R$）因球体而受到的吸引力相当于将球体的全部质量 $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ 集中在它的中心处时受到的引力，引力的方向朝向球心；

2.对于在球里面的一点（$a<R$）来说，吸引力与 R 无关，其大小与 $R=a$ 时的情况一样，即在点 P 外面的球壳部分对 P 点的引力为零。

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$，$0\leqslant\zeta\leqslant h$ 对具有单位质量的质点 $P(0,0,z)$ 的吸引力。

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零，即 $X=Y=0$。若引用柱坐标，即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$Z=k\rho_0\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant a^2}d\xi\,d\eta\int_0^h\frac{(\zeta-z)d\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=k\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\,dr\int_0^h\frac{(\zeta-z)d\zeta}{[r^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi k\rho_0\int_0^a r\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right]dr$$

$$=2\pi k\rho_0\left(\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}\right.$$

$$\left.-|z|+|h-z|\right).$$

易知，

当 $0\leqslant z<\frac{h}{2}$ 时，$z>0$，此时吸引力朝着向上的铅垂线；

当 $\frac{h}{2}<z\leqslant h$ 时，$z<0$，此时吸引力朝着向下的铅垂线；

当 $Z=\frac{h}{2}$ 时，$Z=0$，引力为零。

4160. 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力，设球的半径为 R，而轴截面的扇形的角等于 2α。

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零，即 $X=Y=0$。若引用球坐标，即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$Z=\iiint\limits_V\frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}dx\,dy\,dz$$

$$=k\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin\psi\,d\psi\int_0^R dr$$

$$=k\pi R\rho_0\sin^2\alpha.$$

§9. 二重和三重广义积分

1° 无界限域的情形　若二维的域 Ω 是无界的及函数 $f(x,y)$ 在域 Ω 上连续，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (1)$$

其中 Ω_n 为域 Ω 中可求积的有界封闭子域的任意序列，这个叙列可以盖满域 Ω. 若在右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关，则对应的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

同样定义出连续函数展布在无界的三维域上的三重广义积分.

2° 不连续函数的情形　若函数 $f(x,y)$ 在有界封闭域 Ω 内除了点 $P(a,b)$ 而外处处是连续的，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Omega-U_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (2)$$

其中 U_ε 是点 P 的 ε 邻域，当极限存在的情形，所研究的积分称为收敛的；在相反的情形称为发散的.

假定在点 $P(a,b)$ 的邻近有等式

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{r^{\alpha}},$$

其中函数 $\varphi(x,y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间，且

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

则 1 ）当 $\alpha<2$ 时，积分（ 2 ）收敛； 2 ）当 $\alpha\geqslant 2$ 时，积分（ 2 ）发散.

若函数 $f(x, y)$ 有不连续的线，同样可定义出广义积分（ 2 ）.

不连续函数的广义积分定义易于引伸到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性（ $0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$ ）：

4161. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dx\,dy$.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dx\,dy$$

与积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}dx\,dy$ 同时收敛同时发散. 由于 $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^p}$ 是正的，故引用极坐标，得

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r}{r^{2p}}dr=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & 若\ p>1;\\ +\infty, & 若\ p\leqslant 1.\end{cases}$$

由此可知，原积分 $\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}dxdy$ 当 $p>1$

时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散。

4162. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$.

解 由于被积函数是正的，并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$=4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$=4\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^q}\right).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\frac{1}{1+x^p}=1$，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，$p<1$ 时发散，$p=1$ 时显然也发散 $\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}=+\infty\right)$。因此，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p}=\begin{cases}\text{有限数，当 } p>1 \text{ 时；}\\ +\infty\text{，当 } p\leqslant 1 \text{ 时。}\end{cases}$$

同理有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^q}=\begin{cases}\text{有限数，当 } q>1 \text{ 时；}\\ +\infty\text{，当 } q\leqslant 1 \text{ 时。}\end{cases}$$

由此可知，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 仅当 $p>1$

且 $q>1$ 时收敛，其它情形均发散。

4163. $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dx\,dy$.

解 仿4161题，可知积分 $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dx\,dy$

与积分 $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$ 同时收敛同时发散．由于被积函数是正的，故

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$=\int_0^1 dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$=2\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p};$$

由于，当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}\quad(\text{若 } p\geqslant 0),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}\quad(\text{若 } p<0),$$

故

$$2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\leqslant 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}\quad(p\geqslant 0),$$

若 $p<0$，则有相反的不等式.

对于 $a>0$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{2p}\frac{1}{(a^2+x^2)^p}=1.$$

故积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^p}$当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，$p<\frac{1}{2}$ 时发散. 实际上，此积分当 $p=\frac{1}{2}$时也发散，因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\Big|_0^{+\infty}=+\infty.$$

由此可知：积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$，从而积分 $\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}dx\,dy$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\frac{1}{2}$时发散.

4164. $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,\ q>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} = 4\iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x+y\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$$

$$= 4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q} + 4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}, \qquad (1)$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 1,\ x^p+y^q\leq 2\}$，$\Omega_2=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 1,\ x^p+y^q\geq 2\}$，令 $\Omega_3=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^p+y^q\geq 2\}$，易知，当 $x\geq 0$，$y\geq 0$，$x^p+y^q\geq 2$ 时必有 $x+y\geq 1$（因若 $x+y<1$，则必有 $0\leq x<1$，$0\leq y<1$，从而 $0\leq x^p<1$，$0\leq y^q<1$，这就会得出 $x^p+y^q<2$），故 $\Omega_2=\Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭区域，故（1）式右端第一个积分为常义积分，因此广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geq 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$ 的敛散性，在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是，注意到被积函数是非负的，得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\,d\theta$$

$$\cdot\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr.$$

由3856题的结果知，右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\,d\theta\quad(p>0,\ q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}\right)$；而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3<-1$ $\left(即\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1\right)$时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\geqslant-1$ $\left(即\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant1\right)$时发散。

综上所述，可知广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$$

仅当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$时收敛。

4165. $\displaystyle\iint\limits_{x+y\geqslant1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy.$

解 设此积分收敛，以I表其值．先设$p<1$．

令 $\Omega_n=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,$
$-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\}$，

$$\Omega_n' = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x+y \leqslant 2n\pi - \frac{\pi}{4},$$

$$-2n\pi \leqslant x-y \leqslant 2n\pi\},$$

$$\omega_n = \{(x,y) \mid 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant x+y \leqslant 2n\pi,$$

$$-2n\pi \leqslant x-y \leqslant 2n\pi\},$$

其中 $n=1, 2, 3, \cdots$，则显然有

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\, dy = I,$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_n'} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\, dy = I.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\, dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\iint\limits_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\, dy - \iint\limits_{\Omega_n'} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx\, dy \right]$$

$$= I - I = 0. \tag{1}$$

由于 $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$，今在（1）式左端的积分中作变量代换 $x+y=u$，$x-y=v$ $\left(\text{即 } x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}\right)$，并注意到

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{2}$$，得

$$\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}du\int_{-2n\pi}^{2n\pi}\frac{\cos v-\cos u}{u^p}dv$$

$$=-n\pi\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du;$$

而

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{du}{u^p}$$

$$\geqslant\begin{cases}\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{(2n\pi)^p}, & \text{当 } p>0 \text{ 时；}\\[2ex] \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{当 } p\leqslant 0 \text{ 时。}\end{cases}$$

由此可知（注意前面假定 $p<1$）

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy=-\infty,$$

此显然与（1）式矛盾。

现设 $p\geqslant 1$，令

$$\omega_n'=\{(x,y)\mid 2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,$$
$$-2\pi n^{[p]+2}\leqslant x-y\leqslant 2\pi n^{[p]+2}\},$$

仿上，应有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy=0. \qquad (2)$$

但另一方面，和上面一样，作代换 $x+y=u$，$x-y=v$ 后，有

$$\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy$$

$$=-\pi n^{[p]+2}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du.$$

同样，由

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^p}du\geqslant\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(2n\pi)^p},$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\omega_n'}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy=-\infty,$$

此显然与（2）式矛盾。

综上所述，可知：不论 p 为何值，积分

$$\iint\limits_{x+y\geq 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}dx\,dy$$

都发散。

4166．证明：若连续函数 $f(x,y)$ 不为负及 $S_n(n=1, 2, \cdots)$ 为有界闭域的任一叙列，这个叙列可以盖满域 S，则

$$\iint\limits_{S}f(x,y)dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)dx\,dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭域的叙列S'_n，它盖满S并且$S'_1\subset S'_2\subset\cdots\subset S'_n\subset\cdots\subset S$. 由于$f(x,y)$在$S$上非负，故积分叙列$\iint\limits_{S'_n}f(x,y)dx\,dy$是递增的，从而极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S'_n}f(x,y)dx\,dy \tag{1}$$

存在（是有限数或是$+\infty$）. 我们要证

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)dx\,dy=I. \tag{2}$$

先设I为有限数. 任给$\varepsilon>0$，由（1）式知，存在N，使当$n\geqslant N$时，恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S'_n}f(x,y)dx\,dy<I+\varepsilon. \tag{3}$$

又存在n_0，使当$n\geqslant n_0$时，$S_n\supset S'_N$. 从而，根据$f(x,y)$的非负性以及（3）式，得

$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)dx\,dy\geqslant\iint\limits_{S'_N}f(x,y)dx\,dy>I-\varepsilon.$$

另一方面，对每个固定的$n\geqslant n_0$又必存在某个充分大的$k_n(\geqslant N)$使$S'_{k_n}\supset S_n$. 于是，再由（3）式得

$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)dx\,dy\leqslant\iint\limits_{S'_{k_n}}f(x,y)dx\,dy<I+\varepsilon.$$

由此可知，当$n\geqslant n_0$时，恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy<I+\varepsilon,$$

故（2）式成立．

次设$I=+\infty$．任给$M>0$，由（1）式知，存在N_1，使

$$\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)\,dx\,dy>M.$$

又存在n_1，使当$n\geqslant n_1$时，恒有$S_n\supset S'_{N_1}$，从而此时

$$\iint\limits_{S_n} f(x,y)\,dx\,dy\geqslant\iint\limits_{S'_{N_1}} f(x,y)\,dx\,dy>M,$$

故（2）式成立．证毕．

4167．证明：

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\pi,$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2n\pi} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=0$$

（n为自然数）．

证 利用极坐标，我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2\pi n}} r\sin r^2\,dr$$

$$=\pi(1-\cos 2n\pi)=0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=0.$$

但由对称性，有

$$\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}} \operatorname{sis}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant n\\0\leqslant y\leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^n dy\int_0^n(\sin x^2\cos y^2+\cos x^2\sin y^2)\,dx$$

$$=4\left(\int_0^n\cos y^2dy\right)\left(\int_0^n\sin x^2dx\right)$$

$$+4\left(\int_0^n\cos x^2dx\right)\left(\int_0^n\sin y^2dy\right)$$

$$=8\left(\int_0^n\cos x^2dx\right)\left(\int_0^n\sin x^2dx\right).$$

根据3830题的结果，可知

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\sin x^2dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而，得

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leq n\\|y|\leq n}}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=8\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\pi\ .$$

4168. 证明纵使累次积分

$$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

及 $$\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

收敛，但积分

$$\iint\limits_{x>1,\ y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛．我们有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{2y}\cdot\frac{2y\,dy}{(x^2+y^2)^2}-\int_1^{+\infty}\frac{y}{2}\cdot\frac{2y\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2\,dy}{2y^2(x^2+y^2)}$$

$$+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{dy}{2(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{x^2}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)dy$$

$$-\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{x^2+1},$$

故 $$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$=-\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{\pi}{4};$$

同理（利用已算得的结果）

$$\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

$$=-\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

$$=-\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{y^2+1}\right)dy=\frac{\pi}{4},$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint\limits_{x>1,\ y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy \tag{1}$$

发散. 为此只要证积分

$$\iint\limits_{x>1,\ 1<y<x}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy \tag{2}$$

发散即可（因为如果积分（1）收敛，则绝对值积分

$$\iint\limits_{x>1,\ y>1}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx\,dy \tag{3}$$

必收敛．从而在小一点的区域上的积分

$$\iint\limits_{x\geq 1,\ 1\leq y\leq x}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx\,dy$$

更收敛．由此可知，积分（2）收敛）．由于，

$$I_n=\iint\limits_{\substack{1\leq x\leq n\\ 1\leq y\leq x}}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$$

$$=\int_1^n dx\int_1^x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy,$$

仿上，利用部分积分法，容易算得

$$\int_1^x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$=-\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=x}-\int_1^x\frac{x^2dy}{2y^2(x^2+y^2)}$$

$$+\frac{y}{2(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=1}^{y=x}-\int_1^x\frac{dy}{2(x^2+y^2)}$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x},$$

故

$$I_n=\int_1^n\left(-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg} n+\frac{1}{2}\ln n\to+\infty\ （当\ n\to\infty\text{时}），$$

由此可知积分（2）发散．

注意，也可用反证法证明积分（1）发散．假定

积分（1）收敛．于是积分（3）收敛．但恒有

$$\iint\limits_{x>1,\,y>1}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx\,dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|dx, \tag{4}$$

故（4）式中两个累次积分都收敛．又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

与

$$\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

都收敛，故知

$$\iint\limits_{x>1,\,y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=-\frac{\pi}{4},$$

$$\iint\limits_{x>1,\,y>1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$$

$$=\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{\pi}{4},$$

这是不可能的．证毕．

计算下列积分：

4169. $\iint\limits_{\substack{xy\geq 1\\ x\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}$.

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{\substack{xy\geq 1\\ x\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}.$$

而当 $q>1$ 时，

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{dy}{y^q}=\frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

（注意，当 $q\leqslant 1$ 时，此积分发散，从而 $I=+\infty$）；又当 $p>q$ 时，

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}x^{q-p-1}dx=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

（注意，当 $p\leqslant q$ 时，此积分发散，$I=+\infty$）.

综上所述，可知：当 $p>q>1$ 时，

$$\iint\limits_{\substack{xy\geq 1\\ x\geq 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

4170. $\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$.

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{+\infty}\frac{dy}{(x+y)^p}.$$

当 $p>1$ 时，

$$\int_{1-x}^{+\infty}\frac{dy}{(x+y)^p}$$

$$=-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(x+y)^{p-1}}\Bigg|_{y=1-x}^{y=+\infty}=\frac{1}{p-1}.$$

（注意，当 $p\leqslant 1$ 时，积分发散，$I=+\infty$），故

$$I=\int_0^1\frac{dx}{p-1}=\frac{1}{p-1}\quad（当\ p>1\ 时）.$$

4171. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$

解 采用极坐标．由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$$

$$=2\pi\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1}=2\pi.$$

4172. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}.$

解 采用极坐标．由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & \text{当 } p>1 \text{ 时；}\\ +\infty, & \text{当 } p\leqslant 1 \text{ 时。}\end{cases}$$

4173. $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$.

解 由于被积函数非负，故

$$I=\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}$$

$$=2\int_0^{+\infty}dx\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}.$$

由于

$$\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{dy}{x^4+y^2}=\frac{1}{x^2}\ \mathrm{arc\ tg}\frac{y}{x^2}\Bigg|_{y=x^2+1}^{y=+\infty}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\ tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right],$$

故

$$I=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\ tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]dx$$

$$=-\frac{2}{x}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\ tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$+2\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^3}}{1+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{-\frac{2}{x^3}}{1+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}}{1}$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}\right)=0.$$

下面计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$. 为简单计，记

$a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$， $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$\frac{1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(\sqrt{2}-1)x^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2+b)^2-(ax)^2}$$

$$=\frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)}$$

$$=\frac{1}{2ab}\left[\frac{x+a}{x^2+ax+b}-\frac{x-a}{x^2-ax+b}\right]$$

$$=\frac{1}{4ab}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}+\frac{a}{x^2+ax+b}\right.$$

$$\left.-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}+\frac{a}{x^2-ax+b}\right].$$

于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4ab}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}\right]dx$$

$$+\frac{1}{4b}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{x^2-ax+b}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4ab}\left(\ln\frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$+\frac{1}{4b}\left(\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}$$

$$=0+\frac{1}{4b}\ \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}}=\frac{\pi}{2b\sqrt{4b-a^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}\ \sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{\sqrt{2}-1}\ \sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2},$$

故

$$I=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}=\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

4174. $\iint\limits_{0<x<y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

解 由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{0<x<y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-(x+y)}\,dy$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx\int_x^{+\infty}e^{-y}\,dy=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}.$$

变换为极坐标而计算积分：

4175. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$.

解 由于被积函数非负，故采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=+\infty}=\pi.$$

4176. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dx\,dy$.

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ 收敛（参看4175题），

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 收敛. 从而，采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\cos r^2\,dr=\pi\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\,dt$$

$$=\pi\left(\frac{\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}e^{-t}\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

4177. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$.

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)|\leqslant e^{-(x^2+y^2)},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ 收敛(参看4175题),

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 收敛。

从而，采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\sin r^2dr=\pi\int_0^{+\infty}e^{-t}\ \sin t\,dt$$

$$=\pi\left(\frac{-\sin t-\cos t}{(-1)^2+1^2}e^{-t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

计算积分：

4178. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\ dx\,dy$,

其中 $a<0$，$ac-b^2>0$。

解 我们有$\left(令\ \delta=ac-b^2>0,\ t=x+\frac{b}{a}y\right)$

$$\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$

$$=a\left(x^2+\frac{2b}{a}xy+\frac{b^2}{a^2}y^2\right)$$

$$+\frac{ac-b^2}{a}y^2+2dx+2ey+f$$

$$=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{\delta}{a}y^2+2dx+2ey+f$$

$$=at^2+\frac{\delta}{a}y^2+2d\left(t-\frac{b}{a}y\right)+2ey+f$$

$$=a\left(t^2+\frac{2d}{a}t+\frac{d^2}{a^2}\right)$$

$$-\frac{d^2}{a}+\frac{\delta}{a}\left[y^2+\frac{2}{\delta}(ae-bd)y\right.$$

$$\left.+\frac{(ae-bd)^2}{\delta^2}\right]-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}+f$$

$$=a\left(t+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{\delta}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{\delta}\right)^2+\beta,$$

其中

$$\beta=f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}$$

$$=\frac{1}{a\delta}[af(ac-b^2)-d^2(ac-b^2)$$

$$-(ae-bd)^2]$$

$$=\frac{1}{\delta}(acf-b^2f-cd^2-ae^2+2bde)=\frac{\Delta}{\delta},$$

这里

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases} u=\sqrt{-a}\,x+\dfrac{b\sqrt{-a}}{a}y+\dfrac{d\sqrt{-a}}{a}, \\ v=\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\,y+\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\cdot\dfrac{ae-bd}{\delta}, \end{cases} \tag{1}$$

则 $\varphi(x,y)=-u^2-v^2+\beta$。又

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} \sqrt{-a} & \frac{b}{a}\sqrt{-a} \\ 0 & \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \end{vmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}>0,$$

故线性变换（1）是非退化的，它将（x，y）平面的点与（u，v）平面的点一一对应．于是，利用4175题的结果，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi(x,y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2+\beta}\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

4179. $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy.$

解 作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta,$$

由于被积函数非负，故

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}abre^{-r^2}dr$$

$$=2\pi ab\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_{r=1}^{r=+\infty}=\frac{\pi}{e}ab.$$

4180. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy\quad(0<|\varepsilon|<1)$.

解 作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta,$$

则有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}a^2b^2r^3\sin 2\theta\,e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr\,d\theta. \quad (1)$$

由于 $|r^3\sin 2\theta\,e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}|\leqslant r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}$，
而积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr$$

$$=2\pi\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1-|\varepsilon|)}dr<+\infty,$$

故（1）式中的二重广义积分收敛．于是，

$$I=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr. \quad (2)$$

但是

$$\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt$$

$$=-\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\left[te^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\right.$$

$$\left.-\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)}\int_0^{+\infty}e^{-t(1+\varepsilon\sin 2\theta)}dt$$

$$=\frac{1}{2(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2},$$

故

$$I=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon\sin 2\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du\right.$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\sin u}{(1+\varepsilon\sin u)^2}du\Bigg]$$

$$=\frac{1}{2}a^2b^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}\right]. \qquad (3)$$

但是$\left(作代换\ u=\frac{\pi}{2}-v\ \right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\sin u}-\frac{1}{(1+\varepsilon\sin u)^2}\right]du$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\cos v}-\frac{1}{(1+\varepsilon\cos v)^2}\right]dv,$$

同理，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-\varepsilon\cos v}-\frac{1}{(1-\varepsilon\cos v)^2}\right]dv.$$

根据 2028 题（a）和 2063 题的结果，可知（当 $0<|\varepsilon|<1$ 时）

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C, \qquad (4)$$

$$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$$

$$=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}$$

$$+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C. \qquad (5)$$

（注意，2028题（a）和2063题中假定 $0<\varepsilon<1$，但从其推导过程可以看出公式（4）、（5）当 $-1<\varepsilon<0$ 时也成立）.

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1+\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du}{(1-\varepsilon\sin u)^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].$$

从而，由（3）式得

$$I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\cdot\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right].$$

但对任何的 $x>0$，有

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

故最后得

$$I=\frac{1}{\varepsilon}a^2b^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

研究不连续函数的二重广义积分的收敛性（$0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$）：

4181. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$，式中域$\Omega$是由条件$|y|\leqslant x^2$，$x^2+y^2\leqslant 1$所确定。

解 显然，Ω为图8.61中的阴影部分．由于对称性以

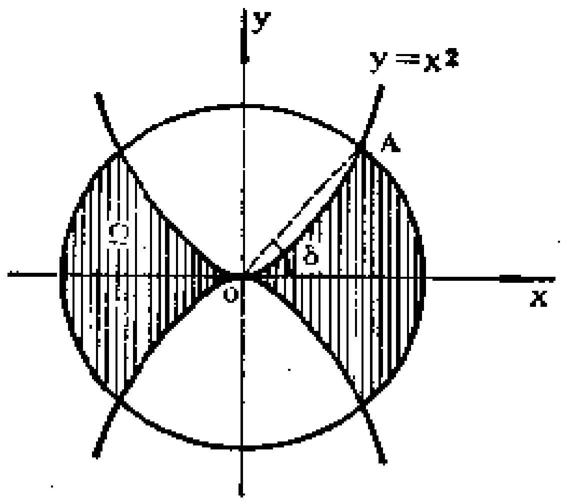

图 8.61

及被积函数的非负性，采用极坐标就有

$$\iint_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$$

$$=4\int_0^{\delta}d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{1}\frac{dr}{r}=4\int_0^{\delta}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta,$$

其中 δ 表图8.61中射线 OA 与 Ox 轴之间的夹角，抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$. 由于

$$\lim_{\theta\to+0}\theta^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\ln\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\left(\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}=0,$$

故积分 $\int_0^{\delta}\ln\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta$ 收敛，从而原积分

$\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$收敛.

4182. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dx\,dy$.

解 由于

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2>0$$

（当 $(x, y)\neq(0, 0)$时），

故

$$\frac{m}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

$$\leqslant\frac{M}{(x^2+xy+y^2)^p} \text{（当 } (x,y)\neq(0,0)\text{时）},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+xy+y^2}dx\,dy$ 与积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^p}$同时收敛或同时发散.

由于$\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p}>0$ （当$(x,y)\neq(0,0)$ 时），

采用极坐标即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-1}},$$

$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$为常义积分，其值为有限数，

而

$$\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-1}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-p)}, & \text{当 } p<1 \text{ 时；}\\ +\infty, & \text{当 } p\geqslant 1 \text{ 时.}\end{cases}$$

由此可知：原积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dx\,dy$

当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散.

4183. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,\ q>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$$

$$=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$$

$$=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q},\qquad(1)$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1,$ $x^p+y^q\geqslant 2^{-p-q}\}$，$\Omega_2=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,$

$x+y\leqslant 1$，$x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\}$．令 $\Omega_3=\{(x,y)\mid x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}\}$．易知，当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^p+y^q\leqslant 2^{-p-q}$ 时，必有 $x+y\leqslant 1$（因为 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^p+y^q\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}$，故 $x^p\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^p}$，$y^q=\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^q}$，从而 $x\leqslant\frac{1}{2}$，$y\leqslant\frac{1}{2}$，由此知 $x+y\leqslant 1$），故 $\Omega_3=\Omega_2$．由于函数 $\frac{1}{x^p+y^q}$ 在有界闭区域 Ω_1 上连续，故（1）式右端第一个积分为常义积分．因此，广义积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ 的敛散性取决于广义积分 $\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$ 的敛散性．在此积分中作变量代换

$$x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta,$$

则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是，注意到被积函数是非负的，得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\,d\theta$$

$$\cdot\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}dr.$$

由3856题的结果知右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\, d\theta \quad (p>0,\ q>0)$$

恒收敛，且其值为$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}\right)$；而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}-3}dr$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3>-1\left(\text{即}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1\right)$时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\leqslant-1\left(\text{即}\frac{2}{p}+\frac{2}{q}\leqslant1\right)$时发散。

综上所述，可知原积分$\iint\limits_{|x|+|y|<1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$时收敛，当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant1$时发散。

4184. $\int_0^a\int_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dx\,dy$.

解 由于

$$\frac{m}{|x-y|^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{|x-y|^p}\leqslant\frac{M}{|x-y|^p},$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛，可知积分$\int_0^a\int_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dx\,dy$与积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$同时收敛或同时发散。由对称性及被积函数的非负性，可知

$$\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy}{|x-y|^p} = 2\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le x}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p}. \tag{1}$$

当 $p<1$ 时，

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le x}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p} = \int_0^a dx\int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p}$$

$$=\int_0^a \frac{x^{1-p}}{1-p}dx = \frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

从而，由（1）式知

$$\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy}{|x-y|^p} = \frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

因此，当 $p<1$ 时积分$\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$收敛。

现设 $p\geq 1$．首先，我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le x}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\le x\le a\\0\le y\le x-\varepsilon}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p}. \tag{2}$$

若 $p=1$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\le x\le a\\0\le y\le x-\varepsilon}} \frac{dx\,dy}{(x-y)^p} = \int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{x-y}$$

$$=\int_\varepsilon^a (\ln x-\ln\varepsilon)dx = a\ln a - a + \varepsilon - a\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(a\ln a-a+\varepsilon-a\ln\varepsilon)=+\infty.$$

由此可知，此时$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$发散；若 $p=2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^2}$$

$$=\int_\varepsilon^a\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{a}{\varepsilon}-1-\ln a+\ln\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{a+\varepsilon\ln\varepsilon}{\varepsilon}-1-\ln a\right)=+\infty.$$

由此可知，此时积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$发散；最后，若 $p>1$，$p\neq 2$，则

$$\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^p}$$

$$=\frac{1}{p-1}\int_\varepsilon^a(\varepsilon^{1-p}-x^{1-p})\,dx$$

$$=\frac{1}{(p-1)\varepsilon^{p-1}}\left(a-\frac{p-1}{p-2}\varepsilon\right)$$

$$+\frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}}.$$

从而，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant x-\varepsilon}}\frac{dx\,dy}{(x-y)^p}=+\infty.$$

由此可知，此时积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$发散.

综上所述，可知积分$\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy}{|x-y|^p}$当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散.

4185. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dx\,dy.$

解 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p}$$

$$\leqslant\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dx\,dy$ 与积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^p}$同时收敛同时发散. 采用极

坐标，由于被积函数$\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$是正的，故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^p}dr$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{r\,dr}{(1-r)^p(1+r)^p}.$$

由于

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^p\cdot\frac{r}{(1-r)^p(1+r)^p}=2^{-p},$$

故积分$\int_0^1\frac{r\,dr}{(1-r)^p(1+r)^p}$当$p<1$时收敛，$p>1$时发散；当$p=1$时，有

$$\int_0^1\frac{r\,dr}{1-r^2}=-\frac{1}{2}\ln(1-r^2)\Big|_0^1=+\infty,$$

故积分也发散．由此可知，积分

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dx\,dy$当$p<1$时收敛；当$p\geqslant 1$时发散．

4186．证明，如果：1）函数$\varphi(x,y)$在有界域$a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$内是连续的；2）函数$f(x)$在闭区间$a\leqslant x\leqslant A$上连续；3）$p<1$，则积分

$$\int_a^A dx\int_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$$

收敛.

证 首先注意，由于 $p<1$，故积分 $\int_b^B \frac{dy}{|f(x)-y|^p}$ 对每个固定的 $x\in[a,A]$ 恒收敛（若 $f(x)\in[b,B]$，此为瑕积分，点 $f(x)$ 是瑕点，由于 $p<1$，它收敛；若 $f(x)\overline{\in}[b,B]$，则为常义积分，当然收敛）．再根据 $\varphi(x,y)$ 的有界性，即知：对每个固定的 $x\in[a,A]$，积分 $\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$ 都收敛．令

$$F(x)=\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy \quad (a\leqslant x\leqslant A)\ .$$

下面我们证明 $F(x)$ 是 $a\leqslant x\leqslant A$ 上的连续函数．若已获证，则积分

$$\int_0^A dx\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy=\int_0^A F(x)dx$$

显然是收敛的（右端为常义积分），于是本题即获证．令 $c=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant A}|f(x)|$．今将函数 $\varphi(x,y)$ 连续地延拓到有界闭矩形 $R(a\leqslant x\leqslant A,\ b-2c\leqslant y\leqslant B+2c)$ 上（只要规定

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi(x,B), & \text{当 } a\leqslant x\leqslant A,\ B<y\leqslant B+2c \text{ 时},\\ \varphi(x,b), & \text{当 } a\leqslant x\leqslant A,\ b-2c\leqslant y<b \text{ 时}\end{cases}$$

即可）．延拓后的函数仍记为 $\varphi(x,y)$．由于 $\varphi(x,y)$ 及 $|f(x)-y|^{1-p}$ 都在 R 上连续，故有界且一致连续：

存在常数M，使对一切$(x,y)\in R$，有

$$|\varphi(x,y)|\leqslant M,\quad |f(x)-y|^{1-p}\leqslant M. \tag{1}$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$ $\left(\text{取}\,\delta_1<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}\right)$，使当 $|x_1-x_2|<\delta_1$，$|y_1-y_2|<\delta_1$ $((x_1, y_1)\in R$，$(x_2, y_2)\in R)$时，恒有

$$|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)|<\varepsilon, \tag{2}$$

$$\left||f(x_1)-y_1|^{1-p}-|f(x_2)-y_2|^{1-p}\right|<\varepsilon. \tag{3}$$

又由 $f(x)$在$[a,A]$上的一致连续性可知，存在 $\delta_2>0$，使当$|x_1-x_2|<\delta_2$ $(x_1, x_2\in[a, A])$ 时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\delta_1. \tag{4}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. 于是，由（2）式可知：当 $|x_1-x_2|<\delta$ $(x_1,x_2\in[a,A])$ 时，对一切 $b-c\leqslant y\leqslant B+c$，恒有

$$|\varphi(x_1,y+f(x_1))-\varphi(x_2,y+f(x_2))|<\varepsilon. \tag{5}$$

现设 $|x_1-x_2|<\delta$，$(x_1, x_2\in[a, A])$．不失一般性，设 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，我们有

$$F(x_1)-F(x_2)$$

$$=\int_b^B \frac{\varphi(x_1,y)}{|f(x_1)-y|^p}dy-\int_b^B \frac{\varphi(x_2,y)}{|f(x_2)-y|^p}dy$$

$$=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}du$$

$$-\int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du$$

$$=\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))-\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du$$

$$-\int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{\varphi(x_1,u+f(x_1))}{|u|^p}du$$

$$+\int_{b-f(x_1)}^{b-f(x_2)}\frac{\varphi(x_2,u+f(x_2))}{|u|^p}du$$

$$=I_1-I_2+I_3, \tag{6}$$

其中 I_1，I_2，I_3 分别表上式中的三个积分．易知（$p<1$）

$$\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}[\beta^{1-p}-\alpha^{1-p}]，当 0\leqslant\alpha\leqslant\beta 时；\\ \dfrac{1}{1-p}[(-\alpha)^{1-p}-(-\beta)^{1-p}]，当 \alpha\leqslant\beta\leqslant 0 时；\\ \dfrac{1}{1-p}[\beta^{1-p}+(-\alpha)^{1-p}]，当 \alpha<0<\beta 时．\end{cases}$$

从而，在任何情形下均有

$$\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}\leqslant\frac{1}{1-p}(|\beta|^{1-p}+|\alpha|^{1-p}); \tag{7}$$

而当 α，β 同号时，有

$$\int_\alpha^\beta\frac{du}{|u|^p}=\frac{1}{1-p}\left||\beta|^{1-p}-|\alpha|^{1-p}\right|. \tag{8}$$

于是，由（5）式、（1）式及（7）式，得

$$|I_1|<\varepsilon\int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)}\frac{du}{|u|^p}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p}+|b-f(x_1)|^{1-p})$$

$$\leqslant \frac{2M\varepsilon}{1-p}. \tag{9}$$

下面估计 I_2：若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 同号，则由（1）式、（8）式及（3）式，有

$$|I_2| \leqslant M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p}$$

$$= \frac{M}{1-p}\left||B-f(x_2)|^{1-p}-|B-f(x_1)|^{1-p}\right|$$

$$< \frac{M\varepsilon}{1-p};$$

若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 异号，即 $B-f(x_1)<0<B-f(x_2)$. 由于

$[B-f(x_2)]-[B-f(x_1)]=f(x_1)-f(x_2)<\delta_1$,

故有 $|B-f(x_1)|<\delta_1$, $|B-f(x_2)|<\delta_1$.

于是，由（7）式并注意到 $\delta_1<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$，即得

$$|I_2| \leqslant M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p}$$

$$\leqslant \frac{M}{1-p}(|B-f(x_2)|^{1-p}+|B-f(x_1)|^{1-p})$$

$$< \frac{M}{1-p}(\delta_1^{1-p}+\delta_1^{1-p}) < \frac{M\varepsilon}{1-p}.$$

所以，在任何情形下均有

$$|I_2| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{10}$$

同理，可得（在任何情形下）

$$|I_3| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \tag{11}$$

于是，由（6）式、（9）式、（10）式及（11）式，即得

$$|F(x_1)-F(x_2)| < |I_1|+|I_2|+|I_3|$$
$$< \frac{4M\varepsilon}{1-p}.$$

由此可知，$F(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant A$ 上（一致）连续．证毕．

计算下列积分：

4187．$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy$.

解 采用极坐标，由于被积函数非负，故有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy$$
$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ln \frac{1}{r} dr = -2\pi \int_0^1 r \ln r\, dr$$
$$=-2\pi \left(\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr \right) = \frac{\pi}{2}.$$

4188．$\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ $(a>0)$.

解 $\int_0^a dx\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$

$$=\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx.$$

作变量代换 $x=au$，则

$$\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx=2a\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=2aB\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)=2a\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$=2a\cdot\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi a.$$

4189. $\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\,dx\,dy$，这里域 Ω 是由直线 $y=0$，$y=x$，$x=\pi$ 所界.

解 作变量代换 $x=u+v$，$y=u-v$，则 Oxy 平面上的域 Ω 变为 uv 平面上的域 Ω'. 显然 Ω' 由直线 $u=v$，$v=0$，$u+v=\pi$ 所界. 又有 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$.

于是，再注意到被积函数非正，即有

$$\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\,dx\,dy$$

$$=2\iint\limits_{\Omega'}\ln\sin 2v\,du\,dv$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_v^{\pi-v} \ln \sin 2v \, du$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin 2v \, dv$$

$$= 2\ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) dv$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v \, dv$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \cos v \, dv$$

$$= \pi^2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v \, dv$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \ln \sin t \, dt$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin v \, dv$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2\right)^{*)} = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2 .$$

*) 利用2353题（a）的结果.

4190. $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant x} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性，采用极坐标，有

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant x} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant x \\ y \geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 2 .$$

研究下列三重积分的收敛性：

4191. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx\,dy\,dz$，这里 $0 < m \leqslant |\varphi(x,y,z)| \leqslant M$。

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，可知积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx\,dy\,dz$ 与积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 同时收敛或同时发散.

由于被积函数 $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的，采用球坐标

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\psi,$$

得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}$$

$$=4\pi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然，$\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛，$p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散；

由此可知，$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz$

当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散。

4192. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz$，这里 $0<m$ $\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

解 和4191题完全类似（请参看4191题的解题过程），易得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}$$

$$=4\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然，$\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$ 时发散；

故 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}dx\,dy\,dz$ 当 $p<\frac{3}{2}$时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$时发散.

4193. $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ $(p>0,q>0,r>0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$$

$$=8\iiint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0,\,z\geqslant 0\\ x+y+z>1}} \frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$$

$$=8\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}+8\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}.$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r\leqslant 3\}$， $\Omega_2=\{(x,y,z)\,|\,x\geqslant 0，y\geqslant 0，z\geqslant 0，x+y+z>1，x^p+y^q+z^r>3\}$. 令 $\Omega_3=\{(x,y,z)\,|\,x\geqslant 0，y\geqslant 0，z\geqslant 0，x^p+y^q+z^r>3\}$. 由于当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，$x^p+y^q+z^r>3$ 时必有 $x+y+z>1$（否则，$x+y+z\leqslant 1$，就有 $x\leqslant 1$，$y\leqslant 1$，$z\leqslant 1$，从而 $x^p\leqslant 1$，$y^q\leqslant 1$，$z^r\leqslant 1$，于是 $x^p+y^q+z^r\leqslant 3$)，故 $\Omega_2=\Omega_3$. 显然，$\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$为常义积分，故积分

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$$的敛散性取决于

$$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$$的敛散性．对此积分，作变量代换

$$x=R^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi\cos^{\frac{2}{p}}\psi,$$

$$y=R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\cos^{\frac{2}{q}}\psi,$$

$$z=R^{\frac{2}{r}}\sin^{\frac{2}{r}}\psi,$$

则易知

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}$$

$$=\frac{8}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi$$

$$\cdot\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi.$$

于是，由被积函数的非负性，并利用3856题的结果，得

$$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$$

$$=\frac{8}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi\,d\psi$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\,d\varphi$$

$$\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$$

$$=\frac{8}{pqr}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{r},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}\right)\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$$

$$=\frac{2}{pqr}B\left(\frac{1}{r},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)B\left(\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}\right)$$

$$\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR.$$

由于积分$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}dR$当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3<-1$ $\left(即\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1\right)$时收敛，当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3\geqslant-1$时发散，故积分$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy\,dz}{x^p+y^q+z^r}$ $\Bigg($从而积分$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}\Bigg)$当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$时收敛，当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant1$时发散.

4194. $\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$，其中$0<m\leqslant|f(x,y,z)|\leqslant M$，而$\varphi(x)$和$\psi(x)$是在闭区间$[0,\ a]$上的连续函数.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$\leqslant \frac{|f(x,y,z)|}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$\leqslant \frac{M}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$与积分$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$同时收敛或同时发散．由被积函数$\frac{1}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$的非负性，我们有

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$=\int_0^a F(x)dx,$$

其中

$$F(x)=\int_0^a\int_0^a \frac{dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

$$(0\leqslant x\leqslant a).$$

作变量代换

$$u=y-\varphi(x),\quad v=z-\psi(x)\quad (x\text{ 固定}),$$

则

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(y,z)}}=1.$$

从而，有

$$F(x)=\iint\limits_{\substack{-\varphi(x)\leqslant u\leqslant a-\varphi(x)\\-\psi(x)\leqslant v\leqslant a-\psi(x)}}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}. \tag{1}$$

先设 $p<1$，令 $c=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}(|\varphi(x)|+|\psi(x)|)$，则由（1）式知

$$\begin{aligned}0<F(x)&\leqslant\iint\limits_{\substack{-c\leqslant u\leqslant a+c\\-c\leqslant v\leqslant a+c}}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}\\&<\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2(a+c)^2}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}(a+c)}\frac{dr}{r^{2p-1}}\\&=\frac{\pi}{1-p}[\sqrt{2}(a+c)]^{2-2p},\end{aligned}$$

即 $F(x)$有界（实际上，仿4186题的证明过程还可证明 $F(x)$在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上连续），从而$\int_0^a F(x)\,dx$是常义积分，显然收敛．由此可知，此时积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p} \tag{2}$$

收敛．

次设 $p\geqslant 1$，这时积分（2）可能收敛也可能发散，分两种情况讨论：

i）若不存在这样的 $x\in[0,a]$使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant a$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant a$ 同时成立（例如，$\varphi(x)$或 $\psi(x)$ 的值完

全位于$[0, a]$之外；这时，对一切$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$，均有：连续函数$\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p>0$．从而，积分（2）收敛（这时是常义积分）．

ii）若存在这样的点$x\in[0, a]$使$0<\varphi(x)<a$，$0<\psi(x)<a$同时成立；由$\varphi(x)$与$\psi(x)$的连续性，必存在正数ε及闭区间$I_0\subset[0, a]$，使当$x\in I_0$时，恒有$\varepsilon\leqslant\varphi(x)\leqslant a-\varepsilon$，$\varepsilon\leqslant\psi(x)\leqslant a-\varepsilon$，从而由（1）式知：当$x\in I_0$时，有

$$F(x)\geqslant\iint\limits_{\substack{-\varepsilon\leqslant u\leqslant\varepsilon\\-\varepsilon\leqslant v\leqslant\varepsilon}}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$\geqslant\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant\varepsilon^2}\frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$=2\pi\int_0^{\varepsilon}\frac{dr}{r^{2p-1}}=+\infty\quad（注意\ p\geqslant 1），$$

即当$x\in I_0$时恒有$F(x)=+\infty$，由此可知，积分$\int_0^a F(x)dx$发散．于是，积分（2）发散．

综上所述，可知：积分

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{f(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p}$$

当$p<1$时收敛；当$p\geqslant 1$时，若不存在$x\in[0, a]$

使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant a$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant a$，则收敛；若存在 $x\in[0,a]$，使 $0<\varphi(x)<a$，$0<\psi(x)<a$，则发散。

4195. $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$.

解 我们有（注意被积函数的非负性）

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1\\|z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$$

$$=2\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1,\ |z|\leqslant 1\\x+y-z>0}}\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y-z)^p}$$

$$=2\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\\-1\leqslant x+y\leqslant 1}}dx\,dy\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$+2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\\x+y\geqslant 1}}dx\,dy\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$=2I_1+2I_2,$$

其中 I_1 表第一个积分，I_2 表第二个积分。

若 $p<1$，则

$$\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{(x+y-z)^p}=\frac{(x+y+1)^{1-p}}{1-p},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dz}{(x+y-z)^p}$$

$$=\frac{(x+y+1)^{1-p}-(x+y-1)^{1-p}}{p-1}\quad (x+y\geqslant 1),$$

故

$$I_1=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1}}(x+y+1)^{1-p}\,dx\,dy,$$

$$I_2=\frac{1}{1-p}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ x+y\geqslant 1}}[(x+y+1)^{1-p}$$

$$-(x+y-1)^{1-p}]\,dx\,dy.$$

显然，I_1与I_2均为常义（二重）积分，当然收敛。因此，积分$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |y|\leqslant 1\\ |z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$收敛。

若 $p\geqslant 1$，则当 $x+y>-1$ 时，

$$\int_{-1}^{x+y}\frac{dz}{(x+y-z)^p}=+\infty,$$

故 $I_1=+\infty$，又显然有 $I_2>0$，故此时积分

$$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |y|\leqslant 1\\ |z|\leqslant 1}}\frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$$

发散。

计算积分：

4196. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$.

解 由于被积函数非负，故

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{x^p}\int_0^1 \frac{dy}{y^q}\int_0^1 \frac{dz}{z^r}$$

$$=\frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)} \text{（若 } p<1, q<1, r<1\text{）.}$$

注意，若 $p\geqslant 1$ 或 $q\geqslant 1$ 或 $r\geqslant 1$，则

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}=+\infty.$$

4197. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

解 采用球坐标．由于被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^4}$$

$$=2\pi\cdot 2\cdot \frac{1}{3}=\frac{4\pi}{3}.$$

4198. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

解 采用球坐标．由于被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr$$

$$=4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr.$$

作代换 $t=r^2$，则当 $p<1$ 时有

$$\int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}\, dt$$

$$=\frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right).$$

从而，当 $p<1$ 时有

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$=2\pi B\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right).$$

注意，若 $p\geqslant 1$，则$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}\, dt=+\infty$，故

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}=+\infty.$$

4199. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz.$

解 采用球坐标．由被积函数的非负性，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr$$

$$=4\pi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr.$$

作代换 $r^2=t$，则

$$\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

于是，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx\, dy\, dz = \pi^{\frac{3}{2}}.$$

4200．计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$ （$a_{ij}=a_{ji}$）为正定形．

解　用 A 表矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$ 是正定的，故由高等代数

中关于二次型的理论知：存在正交矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

使 $$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_3>0$；也即在线性(正交)变换

$$\begin{cases} x_1=b_{11}x'_1+b_{12}x'_2+b_{13}x'_3 \\ x_2=b_{21}x'_1+b_{22}x'_2+b_{23}x'_3 \\ x_3=b_{31}x'_1+b_{32}x'_2+b_{33}x'_3 \end{cases} \tag{3}$$

之下，二次型 $P(x_1, x_2, x_3)$ 化为平方和：

$$P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_i x_j$$

$$=\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2+\lambda_3 x_3'^2. \tag{4}$$

注意，由于 B 是正交矩阵，故 $B^{-1}=B'$ (B' 表 B 的转置矩阵)，从而 $|B|=|b_{ij}|=\pm 1$. 显然，

$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(x'_1,x'_2,x'_3)}=|b_{ij}|=\pm 1.$$

由（4）式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2}dx_1'dx_2'dx_3'.\tag{5}$$

再作变量代换 $x_1'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1$, $x_2'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2$, $x_3'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}u_3$, 则 $\frac{D(x_1',x_2',x_3')}{D(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}$.

于是（注意4199题的结果）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2-\lambda_2 x_2'^2-\lambda_3 x_3'^2}dx_1'dx_2'dx_3'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}du_1du_2du_3$$

$$=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}.\tag{6}$$

但由（2）式知（记 $\varDelta=|a_{ij}|=|A|$，注意，由于 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的，故 $\varDelta>0$）

$$\varDelta=|A|=|B^{-1}|\cdot|A|\cdot|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\tag{7}$$

于是，根据（5），（6），（7）诸式，最后得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

$$=\sqrt{\frac{\pi^3}{\varDelta}}.$$

§10. 多重积分

1° 多重积分的直接计算法 若函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在由下列不等式所确定的有界域 Ω 内是连续的：

$$\begin{cases} x_1' \leqslant x_1 \leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_2''(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant x_n''(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数及 $x_2'(x_1)$，$x_2''(x_1)$，$\cdots$，$x_n'(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$，$x_n''(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 为连续函数，则对应的多重积分可按下列公式来计算：

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x_n'(x_1, \cdots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \cdots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_n .$$

2° 重积分中的变量代换 若 1）函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在有界可测的域 Ω 内是均匀连续的；2）连续可微分的函数

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

把 $Ox_1, x_2, \cdots, x_n$ 空间的域 Ω 双方单值地映射成 $O'\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 空间内的有界域 Ω'；3）在域 Ω' 内雅哥比式

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\neq 0,$$

则下面的公式正确

$$\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint_{\Omega'}\cdots\int f(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)|I|d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

特别是，根据公式

$$x_1=r\cos\varphi_1,$$

$$x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

变换成极坐标时（r，φ_1，φ_2，$\cdots$，φ_{n-1}），有

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}$$

$$=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201．设 $K(x,y)$为域 $R[a\leqslant x\leqslant b;\ a\leqslant y\leqslant b]$ 内的连续函数及

$$K_n(x,y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots$$

$$\cdot K(t_n,y)dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

证明：

$$K_{n+m+1}(x,y)=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)dt.$$

证

$$K_{n+m+1}(x,y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)$$
$$\cdots K(t_n,t)K(t,z_1)K(z_1,z_2)\cdots K(z_m,y)dt_1dt_2$$
$$\cdots dt_n\,dt\,dz_1dz_2\cdots dz_m$$
$$=\int_a^b\left\{\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\right.\right.$$
$$\left.\cdots K(t_n,t)dt_1dt_2\cdots dt_n\right]$$
$$\cdot\left[\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(t,z_1)K(z_1,z_2)\right.$$
$$\left.\left.\cdots K(z_m,y)dz_1dz_2\cdots dz_m\right]\right\}dt$$
$$=\int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)dt.$$

4202. 设 $f=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为域 $0\leqslant x_i\leqslant x$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 内的连续函数，证明等式

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n$$
$$=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\,dx_1\quad(n\geqslant 2).$$

证 考虑下面三个有界闭域：

$\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant x,$
$i=1, 2, \cdots, n\}$,

$\Omega_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_1\leqslant x,$
$0\leqslant x_2\leqslant x_1, \cdots, 0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\}$,

$\Omega_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_n\leqslant x,$

$$x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x,\ \cdots,\ x_2 \leqslant x_1 \leqslant x\}.$$

由假定 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在域 Ω 上连续，显然，$\Omega_1 \subset \Omega$，$\Omega_2 \subset \Omega$，故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上连续．根据化 n 重积分为累次积分的公式，我们有

$$\iint\limits_{\Omega_1}\cdots\int f\,dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n, \tag{1}$$

$$\iint\limits_{\Omega_2}\cdots\int f\,dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^{x} dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^{x} f\,dx_1. \tag{2}$$

下证 $\Omega_1=\Omega_2$，事实上，若 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\Omega_1$，则

$$0\leqslant x_1\leqslant x,\ 0\leqslant x_2\leqslant x_1,\ \cdots,\ 0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}, \tag{3}$$

从而

$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant x. \tag{4}$$

于是，

$$0\leqslant x_n\leqslant x,\ x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\ \cdots,\ x_2\leqslant x_1\leqslant x. \tag{5}$$

由此可知 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\Omega_2$．反之，若 $(x_1,\cdots x_n)\in\Omega_2$，则（5）式成立，从而，（4）式显然成立，由此又知（3）式成立，故 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\Omega_1$，于是 $\Omega_1=\Omega_2$ 获证．由此，再根据（1）式与（2）式，即得

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n$$

$$=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\,dx_1.$$

证毕。

4203．证明

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n,$$

其中 f 为连续函数。

证 证法一

我们有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2$$

$$\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n.$$

令 $F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$．由于 f 是连续函数，故 $F'(s)=f(s)$。我们有（注意到 $F(0)=0$）

$$\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$=\int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1})F'(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}[F(t_{n-1})]^2\Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}}$$

$$=\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2,$$

由此

$$\int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2})dt_{n-2}\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^{t_{n-3}}\frac{1}{2}[F(t_{n-2})]^2F'(t_{n-2})dt_{n-2}$$

$$=\frac{1}{3!}[F(t_{n-3})]^3,$$

……………………………

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1})dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}.$$

于是，

$$\int_0^t f(t_1)dt_1\int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$=\int_0^t\frac{1}{(n-1)!}[F(t_1)]^{n-1}f(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t [F(t_1)]^{n-1}F'(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{n!}[F(t)]^n=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n.$$

从而

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^n. \text{ 证毕.}$$

证法二

用归纳法证明所述公式. 当 $n=1$ 时此公式显然成立，今设 $n=k$ 时成立，要证 $n=k+1$ 时也成立. 我们有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\int_0^t f(t_1)\left[\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}\right]dt_1.$$

由于假定公式当 $n=k$ 时成立，故

$$\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau\right\}^k.$$

从而$\left(\text{令 } F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau\text{，则 } F'(s)=f(s)\right)$

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\cdots\int_0^{t_k} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{k+1})dt_{k+1}$$

$$=\int_0^t f(t_1)\cdot\frac{1}{k!}\left\{\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau\right\}^k dt_1$$

$$=\frac{1}{k!}\int_0^t [F(t_1)]^k F'(t_1)dt_1$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}[F(t)]^{k+1}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}^{k+1},$$

因此，所述公式当 $n=k+1$ 时成立．于是，由归纳法知所述公式对一切自然数 n 均成立．证毕．

计算下列多重积分：

4204．(a) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$；

(б) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$．

解 (a) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_n$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1\Big(x_1^2+x_2^2+\cdots$$

$$+x_{n-1}^2+\frac{1}{3}\Big)dx_{n-1}$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1\left(x_1^2+x_2^2+\cdots\right.$$

$$\left.+x_{n-2}^2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)dx_{n-2}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{n}{3}.$$

(б) $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

$$+2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3$$

$$+\cdots+x_2x_n+x_3x_4+\cdots+x_3x_n+\cdots$$

$$+x_{n-1}x_n)]dx_n$$

$$=\frac{n}{3}^{*)}+2\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1[(x_1x_2+\cdots$$

$$+x_1x_n)+(x_2x_3+\cdots+x_2x_n)$$

$$+\cdots+x_{n-1}x_n]dx_n$$

$$=\frac{n}{3}+2\left(\frac{n-1}{4}+\frac{n-2}{4}+\cdots+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{n(3n+1)}{12}.$$

*) 利用本题（a）的结果.

4205. $I_n=\underset{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}{\iint\cdots\int}dx_1dx_2\cdots dx_n.$

解 解法一：

化为累次积分，有

$$I_n=\int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1}dx_2$$

$$\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n,$$

我们又知

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n$$

$$=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})dx_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots$$

$$-x_{n-2}-x_{n-1})^2\Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}}$$

$$=\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2,$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}dx_{n-2}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n$$

$$=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2dx_{n-2}$$

$$=\frac{1}{3!}(a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3,$$

……………………………………。

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{a-x_1}dx_2\int_0^{a-x_1-x_2}dx_3$$

$$\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}dx_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}.$$

于是，

$$I_n=\int_0^a\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}dx_1=\frac{a^n}{n!}.$$

解法二：

我们有

$$I_n=\int_0^a dx_1\int_0^{a-x_1}dx_2\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换：

$$x_1=a\xi_1,\quad x_2=a\xi_2,\quad\cdots,\quad x_n=a\xi_n,$$

即得

$$I_n=a^n\int_0^1 d\xi_1\int_0^{1-\xi_1}d\xi_2\cdots\int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}}d\xi_n$$

$$=a^n\underset{\substack{\xi_1\geqslant0,\xi_2\geqslant0,\cdots,\xi_n\geqslant0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant1}}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=a^n\cdot I_n(1),$$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a=1$ 时积分 I_n 的值。

另一方面，我们有

$$I_n(1)=\int_0^1 d\xi_n \underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\cdots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant 1-\xi_n}}{\iint\cdots\int} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}$$

$$=I_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}d\xi_n$$

$$=\frac{I_{n-1}(1)}{n}.$$

反复运用上述循环公式，可得

$$I_n(1)=\frac{1}{n!},$$

于是，最后得

$$I_n=\frac{a^n}{n!}.$$

4206. $\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} x_1x_2\cdots x_n\,dx_n.$

解 $\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} x_1x_2\cdots x_n\,dx_n$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}\frac{1}{2}x_1x_2\cdots x_{n-1}^3dx_{n-1}$$

$$=\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-3}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x_1x_2\cdots x_{n-2}^5dx_{n-2}$$

$=\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 x_1^{2n-1}dx_1$$

$$=\frac{1}{2\cdot4\cdots2n}=\frac{1}{2^n\cdot n!}.$$

注：也可利用4203题的结果直接得

$$\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1x_2\cdots x_n\,dx_n$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\int_0^1 \tau\,d\tau\right)^n=\frac{1}{n!\,2^n}.$$

4207. $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

解 作变换

$$\begin{aligned}x_1&=u_1(1-u_2),\\ x_2&=u_1u_2(1-u_3),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ x_{n-1}&=u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n),\\ x_n&=u_1u_2\cdots u_n,\end{aligned}$$

则由 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，…，$x_n\geqslant 0$，$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1$ 知

$$0\leqslant u_i\leqslant 1\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

且有

$$I=\begin{vmatrix}1-u_2 & u_2(1-u_3) & \cdots & u_2u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_2u_3\cdots u_n\\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \cdots & u_1u_3\cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\cdots u_n\\ 0 & -u_1u_2 & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & u_1u_2\cdots u_{n-2}(1-u_n) & u_1\cdots u_{n-2}u_n\\ 0 & 0 & \cdots & -u_1\cdots u_{n-1} & u_1\cdots u_{n-1}\end{vmatrix}.$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素，则在对角线下面的全部元素都等于零，而在对角线上

的元素就等于1，u_1，u_1u_2，…，$u_1\cdots u_{n-1}$。因此，得

$$I=u_1^{n-1}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}.$$

于是，最后得

$$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 u_1^{n-\frac{1}{2}}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}du_1du_2\cdots du_{n-1}du_n$$

$$=\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}.$$

4208. 求由平面

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\pm h_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

所界的 n 维平行$2n$面体的体积，这里设$\varDelta=|a_{ij}|\neq 0$.

解 令 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\xi_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，即得 $2n$ 面体的体积

$$V=\int_{-h_1}^{h_1}\int_{-h_2}^{h_2}\cdots\int_{-h_n}^{h_n}\frac{1}{|\varDelta|}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\frac{2^n h_1\cdots h_n}{|\varDelta|}.$$

4209. 求 n 维角锥

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$(a_i>0\ ,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

的体积。

解 令 $x_i=a_i\xi_i$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，即得体积

$$V=a_1a_2\cdots a_n\underset{\substack{\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\cdots,\xi_n\geqslant 0\\ \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}{}^{*)}.$$

*）利用4205题的结果。

4210．求由曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\quad x_n=a_n$$

所界的 n 维锥的体积。

解 作代换：

$x_1=a_1r\cos\varphi_1$,

$x_2=a_2r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$,

……………………………

$x_{n-2}=a_{n-2}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}$,

$x_{n-1}=a_{n-1}r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}$,

$x_n=a_nx_n'$,

则域 V 为

$0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi_2\leqslant\pi$，…，

$0\leqslant\varphi_{n-3}\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant 2\pi$，$r\leqslant x_n'\leqslant 1$，

并且 $|I|=a_1a_2\cdots a_nr^{n-2}\sin^{n-3}\varphi_1\sin^{n-4}\varphi_2\sin\varphi_{n-3}$.

于是，体积为

$$V=a_1a_2\cdots a_n\int_0^1 r^{n-2}dr\int_0^\pi\sin^{n-3}\varphi_1d\varphi_1$$

$$\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-3}d\varphi_{n-3}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-2}\int_r^1 dx'_n$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_1 d\varphi_1$$

$$\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-3}d\varphi_{n-3}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi_1 d\varphi_1$$

$$\cdots 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi_{n-3}d\varphi_{n-3}\ ^{*)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}$$

$$\cdot B\left(\frac{n-2}{2},\ \frac{1}{2}\right)B\left(\frac{n-3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\cdots B\left(\frac{2}{2},\ \frac{1}{2}\right)\ ^{**)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\pi a_1 a_2\cdots a_n}{n(n-1)}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a_1 a_2\cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{1}{\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a_1 a_2\cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1 a_2\cdots a_n.$$

*) 利用等式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\,d\varphi$ $(a>0)$，

即得

$$\int_0^{\pi}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\,d\varphi$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi.$$

**) 利用3856题的结果。

4211．求 n 维球体

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$$

的体积．

解 令 $x_i=a\xi_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，即得体积

$$V_n=\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2}{\iint\cdots\int}dx_1dx_2\cdots dx_n=a^nV_n(1),$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a=1$ 时的 n 维球体的体积．但是，

$$V_n(1)=\underset{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\leqslant 1}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

$$=\int_{-1}^{1}d\xi_n\underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}{\iint\cdots\int}d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}$$

$$=V_{n-1}(1)\int_{-1}^{1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi_n$$

$$=2V_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi$$

$$=2V_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

$$=V_{n-1}(1)\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

因为 $V_1(1)=2$，故由上述循环公式可得

$$V_n(1)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

因而，所求的体积为

$$V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数，分别可得公式

$$V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}a^{2m},$$

$$V_{2m+1}=\frac{2\cdot(2\pi)^m}{(2m+1)!}a^{2m+1}.$$

特别是，对于 V_1，V_2，V_3 可求得熟知的值：$2a$，πa^2，$\frac{4}{3}\pi a^3$。

4212. 求 $\iint\limits_{\Omega}\cdots\int x_n^2 dx_1 dx_2\cdots dx_n$，其中域 Ω 是由下列不等式所确定：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2, \qquad -\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

解 $\iint\limits_{\Omega}\cdots\int x_n^2 dx_1 dx_2\cdots dx_n$

$$=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x_n^2 dx_n \iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2}\cdots\int dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a^{n-1}\ ^{*)}.$$

*) 利用4211题的结果.

4213. 计算

$$\iint\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}.$$

解 $$\iint\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\iint\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$\int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}\frac{dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$=\pi\iint\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$=\pi\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}\overset{*)}{=}\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

*) 利用4211题的结果.

4214. 证明等式

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n$$

$$=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du.$$

证 $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_2}^x dx_1 \ ^{*)}$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots \int_{x_3}^x (x-x_2)dx_2$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2}(x-x_3)^2 dx_3$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2}$$

$$\cdots \int_{x_5}^x \frac{1}{2\cdot 3}(x-x_4)^3 dx_4$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\int_0^x f(x_n)dx_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!}(x-x_{n-1})^{n-2} dx_{n-1}$$

$$=\int_0^x \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_n)dx_n.$$

在上述积分中，将 x_n 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n$$

$$=\int_0^x f(u)\ \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du.$$

*) 利用4202题的结果。

4215．证明等式

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1}$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2-u^2)^n f(u)du.$$

证 利用4202题的结果，即得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1}$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots\int_{x_2}^x x_1 dx_1$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots\int_{x_3}^x \frac{1}{2}(x^2-x_2^2)x_2 dx_2$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1}dx_{n-1}$$

$$\cdots\int_{x_4}^x \frac{1}{2^2\cdot 2}(x^2-x_3^2)^2 x_3 dx_3$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$\cdot (x^2 - x_n^2)^{n-1} x_n \, dx_n$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2^n n!} f(x_{n+1})(x^2 - x_{n+1})^n \, dx_{n+1}.$$

于是，将 x_{n+1} 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$$

4216. 证明迪里黑里公式

$$\underset{\substack{x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1}}{\iint \cdots \int} x_1^{p_1 - 1} x_2^{p_2 - 1}$$

$$\cdots x_n^{p_n - 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 1)}$$

$$(p_1, \ p_2, \ \cdots, \ p_n > 0).$$

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n = 1$ 时，公式显然成立，即

$$\int\limits_{0 \leq x_1 \leq 1} x_1^{p_1 - 1} dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1 + 1)}.$$

其次，设公式对 $n-1$ 成立，今证公式对 n 也成立. 为此，将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1}dx_n \iint\limits_{\substack{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n\geqslant 0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1-x_n}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}$$

$$\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}.$$

在里面的 $n-1$ 重积分中进行代换：

$x_1=(1-x_n)\xi_1$，$x_2=(1-x_n)\xi_2$，$\cdots$，

$x_{n-1}=(1-x_n)\xi_{n-1}$，

即得 $$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot B(p_n,p_1+\cdots+p_{n-1}+1)$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(p_n)\cdot\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

这样一来，我们得知公式对 n 重积分也正确．从而对 n 为任意的自然数时，迪里黑里公式均成立．

4217．证明柳维耳公式

$$\iint\limits_{\substack{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\cdot x_1^{p_1-1}\ x_2^{p_2-1}\cdots\ x_n^{p_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$\cdot\int_0^1 f(u)\,u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}du$$

$$(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n>0),$$

式中 $f(u)$为连续函数.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n=1$ 时，公式显然成立. 当 $n=2$ 时，公式也成立，即

$$\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\\ x_1+x_2\leqslant 1}} f(x_1+x_2)\,x_1^{p_1-1}\ x_2^{p_2-1}dx_1dx_2$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u)\,u^{p_1+p_2-1}\,du.$$

事实上，令 Ω 表域：$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$. 作代换：

$$x_1=\xi_1,\quad x_1+x_2=\xi_2,\qquad 及\ t=\frac{\xi_1}{\xi_2},$$

则有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x_1+x_2)\,x_1^{p_1-1}\ x_2^{p_2-1}dx_1dx_2$$

$$=\int_0^1 f(\xi_2)d\xi_2 \int_0^{\xi_2} \xi_1^{p_1-1}(\xi_2-\xi_1)^{p_2-1}d\xi_1$$

$$=\int_0^1 f(\xi_2)d\xi_2 \int_0^1 t^{p_1-1}(1-t)^{p_2-1}\xi_2^{p_1+p_2-1}\, dt$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(\xi_2)\xi_2^{p_1+p_2-1}\, d\xi_2$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2-1}\, du.$$

其次，设公式对于 $n-1$ 成立．今证对于 n 公式也成立．为此，将公式左端写为

$$\underset{\substack{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{n-1}\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1}}{\iint\cdots\int} x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1}\cdots\, x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\, dx_1 dx_2$$

$$\cdots dx_n\int_0^{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\cdot\, x_n^{p_n-1}dx_n.$$

如令

$$\psi(t)=\int_0^{1-t} f(t+x_n)x_n^{p_n-1}dx_n$$

代入上式，并利用公式对 $n-1$ 成立的假定，得知上式为

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}$$

$$\cdot\int_0^1\psi(t)\, t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}dt.$$

利用上面已证的 $n=2$ 时的公式，于是即得

$$\underset{\substack{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n \geqslant 0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant 1}}{\iint\cdots\int} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\cdot x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1}\cdots\, x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1 dt\int_0^{1-t} f(t+x_n)$$

$$\cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}\, x_n^{p_n-1} dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}\underset{\substack{t,\, x_n\geqslant 0 \\ t+x_n\leqslant 1}}{\iint} f(t+x_n)$$

$$\cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1}\, x_n^{p_n-1} dt\, dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$\cdot\int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$\cdot\int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du,$$

即公式对于 n 成立．从而，公式对于任意自然数均成立．

4218⁺ 将展布于域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 上的 n 重积分 $(n\geqslant 2)$

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

化为单积分，其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 作代换:

$$x_1=Rr\cos\varphi,$$

$$x_2=Rr\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$

$$x_n=Rr\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$

则有

$$I=R^n r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

于是,

$$\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=R^n\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)dr\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1$$

$$\cdot\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}$$

$$=2\pi R^n\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\cdot\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)dr^{*)}$$

$$=R^n\frac{2\pi\cdot\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 r^{n-1}f(Rr)dr$$

$$=R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 (r^2)^{\frac{n}{2}-1}f(Rr)d(r^2)$$

$$=R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1}f(R\sqrt{u})du.$$

*) 参看4210题的计算过程.

4219. 计算半径为 R，密度为 ρ_0 的均匀球对自己的位，即求积分

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiiiiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}\frac{dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

解 我们有

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}dx_1dy_1dz_1$$

$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2} \frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}.$$

由4155题的结果可知

$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2} \frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}=2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$. 于是（利用球坐标）

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2\right)dx_1dy_1dz_1$$

$$=\frac{\rho_0}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\cdot\int_0^R\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r^2\right)r^2dr$$

$$=\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5.$$

4220. 设 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 为正定形，计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i=y_i+\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

其中诸常数 α_i 以下再确定. 于是易得(注意到 $a_{ij}=a_{ji}$)

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

$$= \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j + 2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right) + b_i\right]y_i$$

$$+ \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_i\,\alpha_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i + c.$$

由于 $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,x_j$ 是正定形,故必有 $\delta=|a_{ij}|>0$,从而线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_j + b_i = 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2}$$

有唯一的一组解 α_1, $\cdots$, α_n. 今取变换(1)式中的诸 α_i 即为方程组(2)的解. 于是,

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\,x_i + c$$

$$= \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,y_i\,y_j + c', \tag{3}$$

其中 $$c' = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right)\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i + c$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i + c$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i\,\alpha_i + c. \tag{4}$$

下面我们用诸 a_{ij} 和 b_i 及 c 来表出 c'。令

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & b_1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} & b_n \\ b_1\cdots b_n & c \end{vmatrix}$$

（$n+1$ 阶行列式，即 $|a_{ij}|$ 的加边行列式）．将此行列式的第一列乘上 α_1，第二列乘上 α_2，…，第 n 列乘上 α_n 都加到第 $n+1$ 列上去，并注意到（2）式与（4）式，得

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & b_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j+b_i \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ b_j & \vdots & \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\alpha_j+c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_j & \vdots & c' \end{vmatrix}=c'|a_{ij}|=c'\delta,$$

故

$$c'=\frac{\Delta}{\delta}. \tag{5}$$

由于 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j$ 是正定二次型，故由高等代数中二次型的理论知，存在正交矩阵

$$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix} p_{11}\cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}\cdots p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{6}$$

下，二次型变为平方和：

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\, y_i\, y_j=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2, \tag{7}$$

其中 $\lambda_i > 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，也即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由于 P 为正交矩阵，故 $P^{-1}=P'$（P' 表 P 的转置矩阵），且 $|P|=|p_{ij}|=\pm 1$．由（8）式又知

$$\delta=|a_{ij}|=|P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{9}$$

根据（1）式与（6）式，可知

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}=1,$$

$$\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)}=|p_{ij}|=|P|=\pm 1.$$

于是，利用广义 n 重积分的变量代换公式，并注意到被积函数的非负性，得（注意（3）式、（5）式与（7）式）

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i+c\right\}} \cdot dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j+c'\right\}}$$

$$\left|\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\right|dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j\right\}}dy_1dy_2\cdots dy_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iz_i^2}$$

$$\left|\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(z_1,\cdots,z_n)}\right|dz_1dz_2\cdots dz_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iz_i^2}dz_1dz_2\cdots dz_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1z_1^2}dz_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_2z_2^2}dz_2\right)$$

$$\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_nz_n^2}dz_n\right).$$

作代换 $z_i=\dfrac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$（$i$ 固定），得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_iz_i^2}dz_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\,du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\lambda_i}}\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

以此代入上式，并注意到（9）式，最后得

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}$$

$$\cdot dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=e^{-\frac{\Delta}{\delta}}\cdot\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}=\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}}e^{-\frac{\Delta}{\delta}}.$$

§11. 曲线积分

1° 第一型的曲线积分　若 $f(x,y,z)$ 在平滑曲线 C：

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T)\qquad (1)$$

的各点上有定义并且是连续的函数，ds 为弧的微分，则

$$\int_C f(x,y,z)ds$$

$$=\int_{t_0}^{T}f[x(t),y(t),z(t)]$$

$$\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

这个积分的特性在于它与曲线C 的方向无关.

2° 第一型曲线积分在力学方面的应用　若 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为曲线 C 在流动点 $(x,\ y,\ z)$ 的线密度，则曲线C的质量等于

$$M=\int_C\rho(x,y,z)ds.$$

此曲线的重心坐标 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 由下面的公式来表示

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)ds,$$

$$y_0=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)ds,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)ds.$$

3° 第二型的曲线积分 若函数 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 在曲线（1）上的各点上是连续的，这曲线的方向是使参数 t 增加的方向，则

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)$$
$$+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)$$
$$+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt. \qquad (2)$$

当曲线C环行的方向变更时此积分的符号也变更．在力学上积分（2）是当其作用点描绘出曲线C时变力 $\{P, Q, R\}$ 所作的功．

4° 全微分的情形 若

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du,$$

式中 $u=u(x,y,z)$为域 V 内的单值函数，则与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关，而有：

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=u(x_2, y_2, z_2)-u(x_1, y_1, z_1),$$

式中 (x_1, y_1, z_1) 为路径的始点，(x_2, y_2, z_2) 为路径的终点．最简单的情况是域 V 是单联通的而函数 P，Q，R 有连续的一级偏导函数，对于此事的充分而且必要的条件为：在域 V 内，下列条件恒满足：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时，函数 u 可按下面的公式来求得

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz,$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为域 V 内某一固定的点．

在力学上这个情况对应于位力所作的功．

计算下列第一型的曲线积分：

4221．$\int_C (x+y)ds$，其中 C 为以 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$ 和 $B(0, 1)$ 为顶点的三角形围线．

解 $\int_C (x+y)ds$

$$=\int_{OA}(x+y)ds+\int_{AB}(x+y)ds+\int_{BO}(x+y)ds$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1\sqrt{2}\,dx+\int_0^1 y\,dy=1+\sqrt{2}.$$

4222. $\int_C y^2 ds$，其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一拱。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

于是，

$$\int_C y^2 ds=2a^3\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}(1-\cos t)^2 dt$$

$$=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\,du$$

$$=\frac{256}{15}a^3.$$

4223. $\int_C (x^2+y^2)ds$，其中 C 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\,dt=at\,dt.$$

于是，

$$\int_C (x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2$$

$$+a^2(\sin t-t\cos t)^2]at\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} a^3 t(1+t^2)dt=2\pi^2 a^3(1+2\pi^2).$$

4224. $\int_C xy\,ds$，其中C为双曲线$x=a\,\mathrm{ch}\,t$，$y=a\,\mathrm{sh}\,t$（$0\leqslant t\leqslant t_0$）的弧。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 t+a^2\mathrm{ch}^2 t}\,dt=a\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt.$$

于是，

$$\int_C xy\,ds=a^3\int_0^{t_0}\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}\,t\,\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\mathrm{sh}\,2t\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt$$

$$=\frac{a^3}{4}\int_0^{t_0}\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,d(\mathrm{ch}\,2t)$$

$$=\frac{a^3}{6}(\sqrt{\mathrm{ch}^3 2t_0}-1).$$

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$，其中$C$为内摆线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的弧。

解 方法一

按直角坐标方程计算，弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx.$$

于是，

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+ y^{\frac{4}{3}})ds$$

$$=4\int_0^a \left[x^{\frac{4}{3}}+(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^2\right]\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a (2x+a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}})dx=4a^{\frac{7}{3}}.$$

方法二

按参数方程计算．若令 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，则

$$ds=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=3a\cos t\sin t\,dt \quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，

$$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+ y^{\frac{4}{3}})ds$$

$$=4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\cdot 3a\cos t\sin t\,dt$$

$$=24a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,d(\sin t)=4a^{\frac{7}{3}}.$$

4226．$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$C$为由曲线$r=a$，$\varphi=0$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$（$r$和$\varphi$为极坐标）所界的凸围线．

解 凸围线由三段组成，分别是：直线段 $\varphi=0$

$(0\leqslant r\leqslant a)$；圆弧段 $r=a\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$，直线段 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ $(0\leqslant r\leqslant a)$．弧长的微分相应地是：$ds=dr$；$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=a\,d\varphi$；$ds=dr$．于是，

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$$

$$=\int_0^a e^r\,dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\,a\,d\varphi+\int_0^a e^r\,dr$$

$$=2(e^a-1)+\frac{\pi a e^a}{4}.$$

4227．$\int_C|y|\,ds$，其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧．

解 双纽线的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos 2\varphi$，弧长的微分为

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi.$$

于是，

$$\int_C|y|\,ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi$$

$$=4a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2(2-\sqrt{2}).$$

4228．$\int_C x\,ds$，其中 C 为对数螺线 $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ 在圆

$r=a$ 内的部分.

解 弧长的微分为

$$ds=ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi \quad (-\infty<\varphi<0).$$

于是,

$$\int_C x\,ds=\int_{-\infty}^{0} ae^{k\varphi}\cos\varphi\cdot ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\frac{2k\cos\varphi+\sin\varphi}{1+4k^2}e^{2k\varphi}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.$$

4229. $\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 对于上半圆周,弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2}dx=\frac{a}{2y}dx$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx \quad (0\leqslant x\leqslant a).$$

于是,

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds=2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2.$$

4230. $\int_C\frac{ds}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}dx=\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx.$$

于是，

$$\int_C\frac{ds}{y^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}\frac{x}{a}}{a^2\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)}{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}$$

$$=\frac{1}{a}\mathrm{arc\ tg}\left(\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{a}.$$

求下列空间曲线的弧长（参数是正的）：

4231. $x=3t$，$y=3t^2$，$z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=3(2t^2+1)dt.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^1 3(2t^2+1)dt=5.$$

4232. $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$，$Z=e^{-t}$，当 $0<t<+\infty$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{e^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}}\,dt$$
$$=\sqrt{3}\,e^{-t}\,dt.$$

于是，弧长为

$$s=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt=\sqrt{3}.$$

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}}\,dx$$

$$=\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx \quad (|x_0|<a).$$

于是，当 $x_0\geqslant 0$ 时，有

$$s=\int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx$$

$$=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}+x_0=|z_0|+|x_0|;$$

当 $x_0<0$ 时，有

$$s=\int_{x_0}^{0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}dx$$

$$=-\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0=|z_0|+|x_0|.$$

总之，当 $|x_0|<a$，有 $s=|z_0|+|x_0|$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 由 $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ 可解得

$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}+\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right],$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^4}-\sqrt[3]{\frac{9a}{8}}\sqrt[3]{z^2}\right].$$

由于

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$$

$$=\frac{8}{9a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^4}\sqrt[3]{z^2}+\frac{2}{9}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2}\sqrt[3]{z^{-2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}},$$

故弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}\sqrt[3]{z^2}+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\sqrt[3]{z^{-2}}+1}\,dz$$

$$=\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\frac{1}{t}+1}$$

$$\cdot\frac{3\sqrt{t}}{2}dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t^2+t+\frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}}\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right).$$

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$.

解 取曲线的参数方程为

$$x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c},\quad y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c},\quad z=z,$$

则弧长的微分为

$$ds=\left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\cos\frac{z}{c}-\sqrt{\frac{z}{c}}\sin\frac{z}{c}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\sin\frac{z}{c}+\sqrt{\frac{z}{c}}\cos\frac{z}{c}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{c}{4z}+\frac{z}{c}+1}\,dz$$

$$=\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^{z_0}\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz$$

$$=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{z}{c}}dz+\int_0^{z_0}\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}dz$$

$$=\sqrt{cz_0}\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right).$$

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$，$\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)=a$ 从点 $A(a,\ 0,\ 0)$ 到点 $B(x,\ y,\ z)$.

解 令 $x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi$，$y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi$，不妨设 $z>0$，则有

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$

$$=\sqrt{a^2\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}\right)}=a\operatorname{th}\varphi.$$

而$\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{a^2(1-\operatorname{th}^2\varphi)}=\frac{a}{\operatorname{ch}\varphi}$，故

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},\quad y=\frac{a\sin\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},\quad z=a\operatorname{th}\varphi$$

为曲线的参数方程．弧长的微分为

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

$$=a\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\varphi+\operatorname{sh}^2\varphi+1}{\operatorname{ch}^4\varphi}}\,d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\,a\frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

于是，弧长为

$$s=\int_0^\varphi\sqrt{2}\,a\frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}=\sqrt{2}\,a\int_0^\varphi\frac{2}{e^\varphi+e^{-\varphi}}d\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^\varphi\frac{1}{1+(e^\varphi)^2}d(e^\varphi)$$

$$=2\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}e^\varphi\Big|_0^\varphi$$

$$=2\sqrt{2}\,a\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)^{*)}$$

$$=\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.^{**)}$$

容易推证，当 $z<0$ 时，弧长为

$$s=\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

总之，最后得

$$s=\sqrt{2}\,a\operatorname{arc\,tg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

*) 由 $z=a\operatorname{th}\varphi$ 知：

$$z(e^{\varphi}+e^{-\varphi})=a(e^{\varphi}-e^{-\varphi}),$$

$$z(e^{2\varphi}+1)=a(e^{2\varphi}-1),$$

从而

$$e^{2\varphi}=\frac{a+z}{a-z}\quad 或\quad e^{\varphi}=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

**) 由于

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

故在主值范围内有

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

计算沿空间曲线所取的第一型曲线积分:

4237. $\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$，其中C为螺线$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一段。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}dt.$$

于是，

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt$$

$$=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

4238. $\int_C x^2 ds$，其中C为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$。

解 方法一

作代换:

$$u=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\quad v=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},$$

$$w=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},$$

则圆周C化为

$$u^2+v^2+w^2=a^2,\ w=0.$$

于是，

$$\int_c x^2 ds=\int_c\left(-\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}+\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2 ds$$

$$=\int_c\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}\right)^2 ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_c(3u^2+v^2)ds+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_c uv\,ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_c a^2 ds+\frac{1}{3}\int_c u^2 ds+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_c uv\,ds$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^3\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}a^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{1}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

方法二

由对称性知：

$$\int_c x^2 ds=\int_c y^2 ds=\int_c z^2 ds.$$

于是，

$$\int_c x^2\,ds=\frac{1}{3}\int_c(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_c ds=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

4239. $\int_C z\,ds$，其中 C 为圆锥螺线 $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$（$0\leqslant t\leqslant t_0$）。

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt$$
$$=\sqrt{2+t^2}\,dt.$$

于是，

$$\int_C z\,ds=\int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right].$$

4240. $\int_C z\,ds$，其中 C 为曲线 $x^2+y^2=z^2$，$y^2=ax$ 上从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧。

解 由曲线方程得

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^4}{a^2}+y^2}$$
$$=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}.$$

从而，曲线的参数方程可取为

$$x=\frac{y^2}{a},\quad y=y,\quad z=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}.$$

弧长的微分为

$$ds=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\,dy$$

$$=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}dy.$$

于是，

$$\int_C z\,ds$$

$$=\int_0^a \frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}dy$$

$$=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a\sqrt{\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)^2-\frac{17a^4}{16^2}}$$

$$\cdot d\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{y^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right.$$

$$-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\left(y^2+\frac{9a^2}{16}\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\left(\frac{25a^4}{64}\sqrt{\frac{19}{2}}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}\right)$$

$$-\left(\frac{9a^4}{64}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{17a^2}{16}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot\frac{25a^4\sqrt{38}-18a^4}{128}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{a^2}\cdot\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}}$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\Bigg[100\sqrt{38}-72$$

$$-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\Bigg].$$

4241$^+$ 设曲线 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ($0\leqslant t\leqslant2\pi$) 在点 (x, y) 的线密度等于 $\rho=|y|$,求其质量.

解 质量 $m=\int_C|y|ds$, 其中 C 为椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ($0\leqslant t\leqslant2\pi$).

先设 $a>b$. 这时

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt$$
$$=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}\,dt,$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. 于是,

$$m=\int_0^\pi ab\sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}\,dt$$

$$+\int_\pi^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}\,dt$$

$$=-ab\int_0^{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$+ab\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$=ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du+ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du$$

$$=4\,ab\int_0^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}\,du$$

$$=\frac{4ab}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\varepsilon u\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}+\frac{1}{2}\arcsin(\varepsilon u)\right]\Bigg|_{u=0}^{u=1}$$

$$=2b^2+2ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}.$$

次设 $a<b$. 这时

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$
$$=a\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt,$$

其中 $\varepsilon_1=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. 仿前，有

$$m=\int_0^{\pi}ab\sin t\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=4\,ab\int_0^1\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}\,du$$

$$=\frac{4ab}{\varepsilon_1}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_1 u\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1 u+\sqrt{1+\varepsilon_1^2 u^2})\Big]\Big|_{u=0}^{u=1}$$

$$=2b^2+2ab\frac{\ln(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}.$$

最后，若 $a=b$，则椭圆退化成圆，这时 $ds=a\,dt$，故

$$m=\int_0^{\pi}a^2\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-a\sin t)a\,dt=4a^2$$

综上所述，可知

$$m=\begin{cases}2b^2+2ab\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}, & 若\ a>b；\\ 2b^2+2ab\dfrac{\ln(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}, & 若\ a<b；\\ 4a^2, & 若\ a=b，\end{cases}$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\ (a>b)$，

$\varepsilon_1=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\ (a<b)$．

4242．求曲线 $x=at$，$y=\dfrac{a}{2}t^2$，$z=\dfrac{a}{3}t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的弧之质量，其密度依规律 $\rho=\sqrt{\dfrac{2y}{a}}$ 而变化．

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2+a^2t^2+a^2t^4}\,dt$$
$$=a\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt,$$

而密度 $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}=t$. 于是，质量为(作代换 $u=t^2$)

$$m=\int_C\sqrt{\frac{2y}{a}}ds=a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+u+u^2}\,du$$

$$=\frac{a}{2}\left[\frac{u+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{1+u+u^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right].$$

4243. 计算均匀的曲线 $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 到点 $B(b,h)$ 的弧的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx.$$

质量为

$$m=\rho_0\int_0^b\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=a\rho_0\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}=\rho_0\sqrt{h^2-a^2}.^{*)}$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{\rho_0}{m}\int_0^b x\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx$$

$$=\frac{\rho_0}{m}\left[ab\ \mathrm{sh}\,\frac{b}{a}-a^2\left(\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\left[b\sqrt{h^2-a^2}-a^2\ \left(\frac{h}{a}-1\right)\right]$$

$$=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}};$$

$$y_0=\frac{\rho_0}{m}\int_0^b y\ \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}dx=\frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \mathrm{ch}^2\frac{x}{a}dx$$

$$=\frac{a\rho_0}{m}\int_0^b\frac{1+\mathrm{ch}\,2x}{2}dx$$

$$=\frac{a\rho_0}{m}\left[\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2x}{a}\right]\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{a\rho_0}{m}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)$$

$$=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}.$$

*) 由 $h=a\ \mathrm{ch}\,\frac{b}{a}$ 知：$\mathrm{ch}\frac{b}{a}=\frac{h}{a}$. 从而

$$\mathrm{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\mathrm{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}.$$

4244. 求摆线

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$

的弧的重心.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

质量为

$$m=2a\rho_0\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt=4a\rho_0.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=-at\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi+a\int_0^\pi\cos\frac{t}{2}dt$$

$$+\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{4a}{3}.$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt$$

$$-\frac{a}{4}\int_0^\pi\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{4a}{3}.$$

4245．计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2$；$x>0$，$y>0$，$z>0$ 的围线的重心的坐标．

解 作球坐标变换：

$x=r\cos\varphi\cos\psi$，$y=r\sin\varphi\cos\psi$，

$z=r\sin\psi$，

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是：

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=0;\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$x=a\cos\psi,\quad y=0,\quad z=a\sin\psi;\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$x=0,\quad y=a\cos\psi,\quad z=a\sin\psi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为

$$s=3\cdot\frac{\pi a}{2}=\frac{3\pi a}{2}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\cdot a\,d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\psi\cdot a\,d\psi}{\frac{3\pi a}{2}}$$

$$=\frac{2a^2}{\frac{3\pi a}{2}}=\frac{4a}{3\pi}.$$

利用对称性知：$x_0=y_0=z_0=\dfrac{4a}{3\pi}$．

4246．求均匀的弧 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$ $(-\infty<t\leqslant 0)$ 的重心的坐标．

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}}\,dt$$
$$=\sqrt{3}\,e^t\,dt.$$

质量为

$$m=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{3}\,e^t\,dt=\sqrt{3}.$$

于是，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\cos t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt$$
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\cos t\,dt$$
$$=\frac{2\cos t+\sin t}{5}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{2}{5}.$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\sin t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt$$
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\sin t\,dt$$
$$=\frac{2\sin t-\cos t}{5}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{5}.$$

$$z_0=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0}e^t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt$$
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\,dt=\frac{1}{2}.$$

4247. 求螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=\frac{h}{2\pi}t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的一枝对于坐标轴的转动惯量.

解 弧长的微分为

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt.$$

于是，转动惯量为

$$I_x=\int_C(y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\pi$$

$$+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

$$I_y=\int_C(x^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\pi$$

$$+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

$$I_z=\int_C(x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,dt$$

$$=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

4248．计算第二型的曲线积分

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx,$$

式中 O 为坐标原点，A 点的坐标为（1，2）并设：(a) OA 为直线段；(б) OA 为抛物线，其轴为 Oy；(в) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 所组成的折线．

解 (a) 直线段的方程为 $y=2x$．于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1(2x-2x)dx=0.$$

(б) 抛物线的方程为 $y=2x^2$．于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1(4x^2-2x^2)dx=\frac{2}{3}.$$

(в) 线段 OB 的方程为 $y=0$，BA 的方程为 $x=1$．于是，

$$\int_{OA}x\,dy-y\,dx=\int_0^1 0\cdot dx+\int_0^2 dy=2.$$

4249．对于上题中所指示的路径（а），（б），（в），计算

$$\int_{OA} x\,dy+y\,dx.$$

解 (а) $\int_{OA} x\,dy+y\,dx=\int_0^1(2x+2x)\,dx=2$．

(б) $\int_{OA} x\,dy+y\,dx=\int_0^1(4x^2+2x^2)\,dx=2$．

(в) $\int_{OA} x\,dy+y\,dx=\int_0^2 dy=2$．

在参数增加的方向，沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分：

4250．$\int_C(x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$，其中 C 为抛物线 $y=x^2$（$-1\leqslant x\leqslant 1$）．

解 由题设 $y=x^2$，从而 $dy=2x\,dx$．于是，

$$\int_C(x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$$

$$=\int_{-1}^1[(x^2-2x^3)+2x(x^4-2x^3)]\,dx$$

$$=-\frac{14}{15}.$$

4251．$\int_C(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$，其中 C 为曲线

$$y=1-|1-x|\ (0\leqslant x\leqslant 2).$$

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=1-(1-x)=x$，从而 dy

$=dx$；当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=1-(x-1)=2-x$，从而$dy=-dx$. 于是，

$$\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2[x^2+(2-x)^2-x^2+(2-x)^2]dx$$

$$=\frac{4}{3}.$$

4252. $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$，其中 C 为依反时针方向通过的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 利用椭圆的参数方程

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

则有

$$\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)$$
$$+(a\cos t-b\sin t)b\cos t]\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)dt=0.$$

4253. $\int_C (2a-y)dx+x\,dy$，其中 C 为摆线

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的一拱.

解 由题设知：$dx=a(1-\cos t)dt$，$dy=a\sin t\,dt$。于是，

$$\int_C (2a-y)dx+x\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)$$

$$+a(t-\sin t)a\sin t\Big\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2t\sin t\,dt$$

$$=-a^2(t\cos t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.$$

4254. $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 C 为依反时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$。

解 利用圆的参数方程

$x=a\cos t$，$y=a\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$），

则有

$$\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-(a\cos t+a\sin t)a\sin t-(a\cos t-a\sin t)a\cos t}{a^2}dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi.$$

4255. $\oint_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中 $ABCDA$ 为以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 为顶点的正方形的

围线.

解 正方形各边的方程分别为

AB: $y=1-x$;　　BC: $y=1+x$;

CD: $y=-1-x$;　DA: $y=-1+x$.

于是,

$$\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

$$=\int_{AB}\frac{dx+dy}{x+y}+\int_{BC}\frac{dx+dy}{-x+y}$$

$$+\int_{CD}\frac{dx+dy}{-x-y}+\int_{DA}\frac{dx+dy}{x-y}$$

$$=\int_1^0(1-1)dx+\int_0^{-1}2\,dx$$

$$+\int_{-1}^0(1-1)dx+\int_0^1 2\,dx$$

$$=0.$$

4256. $\int_{AB}\sin y\,dx+\sin x\,dy$, 其中 AB 为界于点 $A(0,\pi)$ 和点 $B(\pi,0)$ 之间的直线段.

解 AB 的方程为 $y=\pi-x$. 于是,

$$\int_{AB}\sin y\,dx+\sin x\,dy$$

$$=\int_0^\pi \sin(\pi-x)dx-\sin x\,dx$$

$$=\int_0^\pi(\sin x-\sin x)dx=0.$$

注：原题为$\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$，若把它理解为$\int_{AB} d(x\sin y)+d(y\sin x)$，其值仍为零，与原答案也符合.

4257. $\oint_{OmAnO} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx$，其中$OmA$为抛物线段$y=x^2$，$OnA$为直线段$y=x$.

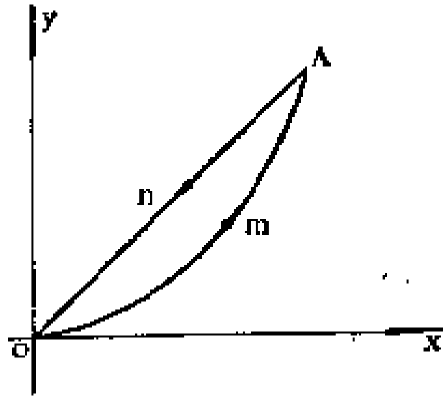

图 8.62

解 如图8.62所示．我们有

$$\oint_{OmAnO} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx$$

$$=\int_{OmA} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx+\int_{AnO} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dy-dx$$

$$=\int_0^1 2x\operatorname{arc\,tg} x\,dx-\int_0^1 dx$$

$$+\int_1^0 (\operatorname{arc\,tg} 1-1)dx$$

$$=x^2\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$-1+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)x\Big|_1^0$$

$$=\frac{\pi}{4}-(x-\operatorname{arc\,tg} x)\Big|_0^1-1-\left(\frac{\pi}{4}-1\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-1.$$

注：原题为$\oint_{OmAnO} dy \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-dx$，若把它理解为$\oint_{OmAnO} d\left(y \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)-dx$，则其值为零，与原答案不符.

验证被积函数为全微分，并计算下列曲线积分：

4258. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy+y\,dx$.

解 显然，$x\,dy+y\,dx=d(xy)$是全微分。于是，

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy+y\,dx$$

$$=\int_{(-1,2)}^{(2,3)} d(xy)=xy\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)}=8.$$

4259. $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx+y\,dy$.

解 显然，$x\,dx+y\,dy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$是全微分.

于是，

$$\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx+y\,dy$$

$$=\int_{(0,1)}^{(3,-4)} d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$=\frac{x^2+y^2}{2}\Big|_{(0,1)}^{(3,-4)}=12.$$

4260. $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$.

解 显然，我们有

$$(x+y)dx+(x-y)dy$$
$$=(y\,dx+x\,dy)+(x\,dx-y\,dy)$$
$$=d(xy)+d\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)$$
$$=d\left(xy+\frac{x^2-y^2}{2}\right),$$

即是全微分．于是，

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$$
$$=\int_{(0,1)}^{(2,3)}d\left(xy+\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$
$$=\left(xy+\frac{x^2-y^2}{2}\right)\Bigg|_{(0,1)}^{(2,3)}=4.$$

4261. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$.

解 显然，$(x-y)(dx-dy)=d\,\frac{(x-y)^2}{2}$是全微分．于是，

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$$
$$=\int_{(1,-1)}^{(1,1)}d\,\frac{(x-y)^2}{2}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{2}\Bigg|_{(1,-1)}^{(1,1)}=-2.$$

4262. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$，其中 $f(u)$为连续函数．

解 令 $F(x,y)=\int_0^{x+y} f(u)du$．由于 $f(u)$连续，故

$$F'_x(x,y)=f(x+y),\quad F'_y(x,y)=f(x+y),$$

并且它们都是 x，y 的连续函数．因此，$F(x,y)$ 可微，且

$$dF(x,y)=F'_x(x,y)dx+F'_y(x,y)dy$$
$$=f(x+y)(dx+dy),$$

故 $f(x+y)(dx+dy)$是全微分，并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x,y)(dx+dy)$$

$$=F(a,b)-F(0,0)=\int_0^{a+b} f(u)du.$$

4263. $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$沿着不与 Oy 轴相交的路径．(不太会)

解 显然，当 $x\neq 0$ 时，

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}=d\left(-\frac{y}{x}\right)$$

是全微分．于是，

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$$

$$=\int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x}\Bigg|_{(2,1)}^{(1,2)}=-\frac{3}{2}.$$

4264. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然，当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

是全微分．于是，

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\int_{(1,0)}^{(6,8)} d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\Bigg|_{(1,0)}^{(6,8)}=9.$$

4265. $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$，其中$\varphi$和$\psi$为连续函数.

解 由于φ，ψ是连续函数，故显然有

$$\varphi(x)dx+\psi(y)dy$$
$$=dF(x)+dG(y)=d[F(x)+G(y)],$$

其中 $F(x)=\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du$，$G(y)=\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv$．于是，$\varphi(x)dx+\psi(y)dy$是函数$F(x)+G(y)$的全微分，从而有

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy$$

$$=[F(x)+G(y)]\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$

$$=[F(x_2)+G(y_2)]-[F(x_1)+G(y_1)]$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y_2}\psi(v)dv.$$

4266. $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy.$

解 $P=x^4+4xy^3$，$Q=6x^2y^2-5y^4$.

显然，P，Q 在全平面上具有连续偏导数，并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2,$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 由于全平面是单连通区域，故在整个平面上表达式 $Pdx+Qdy$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，并且线积分 $\int_C Pdx+Qdy$ 与路径无关，因而可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=\int_{-2}^{3}(x^4+4x\cdot 0^3)dx+\int_{-1}^{0}[6(-2)^2y^2-5y^4]dy$$

$$=55+7=62.$$

注：也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来。我们有

$$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=d\left(\frac{x^5}{5}\right)+2y^3d(x^2)+2x^2d(y^3)-d(y^5)$$

$$=d\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right),$$

从而

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right)\Bigg|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62.$$

4267. $\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径。

解 $P=-\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q=\frac{x}{(x-y)^2}$ $(x\neq y)$.

容易验证

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}\quad(x\neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x>y\}$. 由于 Ω 是单连通区域且在其上$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上，$P\,dx+Q\,dy$是某函数$u=u(x,y)$的全微分，从而在Ω上线积分$\int_C P\,dx+Q\,dy$ 与路径无关. 因此，可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{-(-1)dx}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0\frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

注：也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来．我们有

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)dy-yd(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$=d\left(\frac{y}{x-y}\right),$$

从而

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}=\frac{y}{x-y}\Bigg|_{(0,-1)}^{(1,0)}=1.$$

4268. $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径．

解 当 $x\neq 0$ 时，有

$$P=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x},\quad Q=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

$$=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

考虑右半平面 $\Omega=\{(x,y)\mid x>0\}$. 由于 Ω 是单连通区域，且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上必是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，且可取

$$u(x,y)=\int_1^x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx$$

$$+\int_\pi^y(\sin y+y\cos y)dy$$

$$=\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\Big|_1^x+y\sin y\Big|_\pi^y$$

$$=x-1+y\sin\frac{y}{x}.$$

于是，

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx$$

$$+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$=\left(x-1+y\sin\frac{y}{x}\right)\Big|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=\pi+1.$$

4269. $\int_{(0,0)}^{(a,b)}e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$.

解 显然，有

$$e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)=d(e^x\cos y),$$

于是，

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$$

$$=\int_{(0,0)}^{(a,b)} d(e^x\cos y)=(e^x\cos y)\Big|_{(0,0)}^{(a,b)}$$

$$=e^a\cos b-1.$$

4270．证明：若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为逐段光滑的封闭曲线，则

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

证 令 $F(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2} f(u)du$。由于 $f(u)$ 是连续函数，故

$$F'_x(x,y)=xf(x^2+y^2),$$
$$F'_y(x,y)=yf(x^2+y^2),$$

并且显然 $F'_x(x,y)$，$F'_y(x,y)$都是 x，y 的连续函数．因此，$F(x,y)$可微，且

$$dF(x,y)=F'_x(x,y)dx+F'_y(x,y)dy$$
$$=f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy).$$

于是，任取 C 上一点(x_0,y_0)，有

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$$

$$=F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)}$$

$$=F(x_0,y_0)-F(x_0,y_0)=0.$$

证毕。

求原函数z，设

4271. $dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$.

解 $$z=\int_0^x(x^2+2xy-y^2)dx+\int_0^y(0-0-y^2)dy+C$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$$

4272. $dz=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

解 $$z=\int_0^x\frac{y\,dx}{3x^2-2xy+3y^2}+\int_1^y 0\,dy+C$$

$$=\frac{y}{3}\int_0^x\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2+\frac{8y^2}{9}}+C$$

$$=\frac{y}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}y}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\left(x-\frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}\,y}\Bigg|_0^x+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}+C_1.$$

4273. $dz=\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$.

解 $$z=\int_0^x\frac{x^2+2xy+5y^2}{(x+y)^3}dx+\int_1^y\frac{0-0+y^2}{(0+y)^3}dy+C$$

$$=\int_0^x \frac{(x+y)^2+4y^2}{(x+y)^3}dx+\int_1^y \frac{dy}{y}+C$$

$$=[\ln|x+y|]\Big|_0^x-\frac{2y^2}{(x+y)^2}\Big|_0^x$$

$$+[\ln|y|]\Big|_1^y+C$$

$$=\ln|x+y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+C_1.$$

4274. $dz=e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy.$

解 $z=\int_0^x[(x-y+2)e^{x+y}+ye^x]dx$

$$+\int_0^y(1-ye^y)dy+C$$

$$=[(x-y+1)e^{x+y}+ye^x]\Big|_0^x$$

$$+[y-ye^y+e^y]\Big|_0^y+C$$

$$=(x-y+1)e^{x+y}+ye^x+C_1.$$

4275. $dz=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy.$

解 因为

$$dz=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}dx+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}dy$$

$$=d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right)$$

故有

$$z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+C.$$

4276. $dz=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx$

$-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 易知（当$(x,y)\neq(0,0)$时）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{x}{r^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2x^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=-\frac{r^2-2y^2}{r^4},$$

故（当$(x,y)\neq(0,0)$时）

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)=0. \qquad (1)$$

令

$$P=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

$$Q=-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right),$$

则当$(x,y)\neq(0,0)$时，由（1）式知

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$
=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\partial y^{m}}\left[\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]=0\,.
$$

因此，在任何不含原点（0，0）的单连通区域中，$P\,dx+Q\,dy$ 都是某函数 z 的全微分，并且对上半平面的点（x，y）（即 $y>0$），可取

$$
\begin{aligned}
z(x,y)&=\int_{0}^{x}P(x,y)dx+\int_{1}^{y}Q(0,y)dy+C\\
&=\int_{0}^{x}\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx\\
&\quad-\int_{1}^{y}\left[\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}dy+C\\
&=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\\
&\quad-\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}\\
&\quad-\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}\\
&\quad+\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}+C\\
&=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n}\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r}\right)\\
&\quad-\frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m-1}}\left[\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{x=0}+C_{1}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}}\left(-\frac{x}{r^2}\right)+C_1$$

$$=\frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)+C_1$$

$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)+C_1,$$

其中 $C_1=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1}}+C$ 是任意常数.

同理，对下半平面的点 (x, y)（即 $y<0$），可取

$$z(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_{-1}^y Q(0,y)dy+C'.$$

经过和前面完全类似的计算，可得

$$z(x,y)=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)+C_2,$$

其中

$$C_2=\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\Bigg|_{\substack{x=0\\y=-1}}+C'$$

也是任意常数。

4277. 证明下面的估计对于曲线积分是正确的：

$$\left|\int_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant LM,$$

式中 L 为积分路径的长及 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$（在$\frown$弧C 上）.

证 由于

$$\left|\int_C P\,dx+Q\,dy\right|$$

$$=\left|\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds\right|$$

$$\leqslant\int_C |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|ds,$$

又因

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2$$

$$=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2$$

$$=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

故有 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2$. 从而

$$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M.$$

于是,

$$\left|\int_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant M\int_C ds=LM.$$

4278. 估计积分

$$I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

证明 $\lim\limits_{R\to\infty} I_R=0$.

解 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上, 有

$$P^2+Q^2=\frac{y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

$$+\frac{x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

$$=\frac{R^2}{(R^2+xy)^4}\leqslant\frac{R^2}{(R^2-|xy|)^4}$$

$$\leqslant\frac{R^2}{\left(R^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)^4}$$

$$=\frac{16}{R^6}.$$

于是，$M\leqslant\frac{4}{R^3}$。利用4277题的结果，即得 I_R 的估计式：

$$|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知：$\lim\limits_{R\to\infty} I_R=0$。

计算沿空间曲线所取的线积分（假定坐标系是右手的）：

4279. $\int_C (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2dz$，式中 C 为依参数增加的方向进行的曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$（$0\leqslant t\leqslant 1$）。

解 $\int_C (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2dz$

$$=\int_0^1[(t^4-t^6)+2t^5\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2]dt$$

$$=\int_0^1 (3t^6-2t^4)dt=\frac{1}{35}.$$

4280. $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$，式中 C 为依参数增加方向进行的纽形螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$．

解 $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$

$$=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin t\sin t+abt\cos t+ab\cos t)dt$$

$$=\left(-\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2\sin 2t}{4}+abt\sin t\right.$$

$$\left.+ab\cos t+ab\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-\pi a^2.$$

4281. $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，式中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$y=x\operatorname{tg}\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$，若从 Ox 轴的正向看去，这圆周是沿逆时针方向进行的．

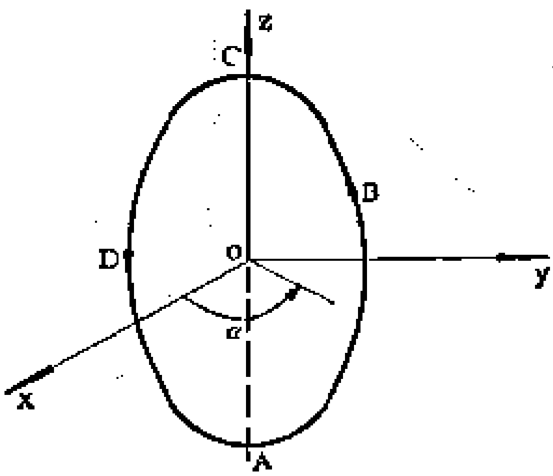

图 8.63

解 如图8.63所示．利用球面的

参数方程 $x=a\cos\varphi\cos\psi$，$y=a\sin\varphi\cos\psi, z=a\sin\psi$.
在 $\widehat{ABC}$ 上，$\varphi=\alpha$，因而有

$x=a\cos\alpha\cos\psi$，$dx=-a\cos\alpha\sin\psi\,d\psi$，

$y=a\sin\alpha\cos\psi$，$dy=-a\sin\alpha\sin\psi\,d\psi$，

$z=a\sin\psi$，　$dz=a\cos\psi\,d\psi$，

且

$$\int_{\widehat{ABC}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[-(\sin\alpha\cos\psi-\sin\psi)\cos\alpha\sin\psi$$

$$-(\sin\psi-\cos\alpha\cos\psi)\sin\alpha\sin\psi$$

$$+(\cos\alpha\cos\psi-\sin\alpha\cos\psi)\cos\psi]\,d\psi$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha-\sin\alpha)d\psi=\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$=\sqrt{2}\,a^2\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

在 $\widehat{CDA}$ 上，$\varphi=\alpha+\pi$. 同样可得

$$\int_{\widehat{CDA}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=-a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)d\psi$$

$$=\sqrt{2}\,\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

于是，最后得

$$\int_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

4282. $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$，式中C为维维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$（$z\geqslant 0$，$a>0$），若从Ox轴的正的部分（$x>a$）看去，此曲线是沿逆时针方向进行的。

解 柱面$x^2+y^2=ax$可变为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

故若令$x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t$，$y=\frac{a}{2}\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$），则

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$$

$$=\sqrt{a^2-\left[\frac{a^2(1+\cos t)^2}{4}+\frac{a^2\sin^2 t}{4}\right]}$$

$$=a\sin\frac{t}{2}.$$

从而，曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+\cos t)}{2},\quad y=\frac{a\sin t}{2},$$

$$z=a\sin\frac{t}{2}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是，

$$\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3\sin^3 t}{8}+\frac{a^3\sin^2\frac{t}{2}\cos t}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{a^3\cos^3\frac{t}{2}}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{8}(1-\cos^2 t)d(\cos t)$$

$$+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\cos t\,dt$$

$$+a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right)d\left(\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$=\frac{a^3}{8}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$+\frac{a^3}{4}\left[\sin t-\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$+a^3\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{\pi a^3}{4}.$$

4283. $\int_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中$C$为球面的一部分$x^2+y^2+z^2=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$的围线，当沿着它的正向进行时该曲面的外面保持在左方。

解 围线在Oxy平面部分的方程为

$$x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=0\quad\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

根据轮换对称性知，只要沿这部分计算线积分，再三倍之，便得要求的结果，即

$$\int_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\varphi\cdot(-\sin\varphi)-\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi]d\varphi$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi)$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)$$

$$=3\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi-\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-4.$$

利用全微分计算下列曲线积分：

4284. $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\,dx+y^2dy-z^3dz.$

解 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\,dx+y^2dy-z^3dz$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}z^4\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}$$

$$=-53\frac{7}{12}.$$

4285. $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$.

解 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$

$$=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=0.$$

4286. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中点$(x_1,y_1,z_1)$位于球$x^2+y^2+z^2=a^2$之上，而点$(x_2,y_2,z_2)$位于球$x^2+y^2+z^2=b^2$之上$(a>0,\ b>0)$.

解 由题设知：

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=a^2,\quad x_2^2+y_2^2+z_2^2=b^2.$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

$$=b-a.$$

4287. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$，式中$\varphi$，$\psi$，$\chi$为连续函数.

解 因为

$$\varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$$

$$=d\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv+\int_{z_1}^{z}\chi(w)dw\right),$$

故有

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$$

$$=\left(\int_{x_1}^{x}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y}\psi(v)dv\right.$$

$$\left.+\int_{z_1}^{z}\chi(w)dw\right)\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(u)du+\int_{y_1}^{y_2}\psi(v)dv+\int_{z_1}^{z_2}\chi(w)dw.$$

4288. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$，其中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z)=\int_0^{x+y+z} f(u)du$. 由于 $f(u)$是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=f(x+y+z),$$
$$F'_y(x,y,z)=f(x+y+z),$$
$$F'_z(x,y,z)=f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的．因此，$F(x, y, z)$ 可微，且

$$dF(x, y, z)$$
$$=F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy$$
$$+F'_z(x,y,z)dz$$
$$=f(x+y+z)(dx+dy+dz).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$$

$$=F(x,y,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$

$$=\int_0^{x_2+y_2+z_2} f(u)du-\int_0^{x_1+y_1+z_1} f(u)du$$

$$=\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)du.$$

4289. $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$, 式中 f 为连续函数.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v})dv$. 由于 f 是连续函数，故

$$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$
$$F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$
$$F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此, $F(x,y,z)$ 可微，且

$$dF(x,y,z)$$
$$=F'_x(x,y,z)dx+F'_y(x,y,z)dy$$
$$+F'_z(x,y,z)dz$$
$$=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx+y\,dy+z\,dz).$$

于是,

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\cdot (x\,dx+y\,dy+z\,dz)$$

$$=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2} f\left(\sqrt{v}\right)dv\ ^{*)}$$

$$=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)du,$$

*) 这里已作代换$\sqrt{v}=u$（$v=u^2$，$dv=2u\,du$）.

求原函数u，若：

4290. $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$.

解 $du=(x^2dx+y^2dy+z^2dz)$

$$-2(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)$$

$$=d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-2xyz\right).$$

于是，

$$u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

4291. $du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz$.

解 $du=dx+\left(-\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy\right)$

$$+\frac{1}{z}(y\,dx+x\,dy)-\frac{xy}{z^2}dz$$

$$=dx+\left[-\frac{1}{y}dx+x\,d\left(-\frac{1}{y}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{z}d(xy)+xy\,d\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$=dx+d\left(-\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{xy}{z}\right)$$

$$=d\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right).$$

于是，

$$u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C.$$

4292. $du=\dfrac{(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

解 由于

$$(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz$$

$$=(x\,dx+y\,dy)+(y\,dx+x\,dy)+(x+y)dz$$

$$-z(dx+dy)+z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}d\left[(x^2+y^2+2xy)+z^2\right]$$

$$+(x+y)dz-z\,d(x+y),$$

故

$$du=\frac{1}{2}\frac{d\left[(x+y)^2+z^2\right]}{(x+y)^2+z^2}$$

$$+\frac{(x+y)dz-z\,d(x+y)}{(x+y)^2+z^2}$$

$$=\frac{1}{2}d\ln[(x+y)^2+z^2]$$

$$+d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}\right)$$

$$=d\left[\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}\right].$$

于是,

$$u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}+C.$$

4293. 求当质量为 m 的点从位置 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 移动到位置 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 时,重力所产生的功(Oz 轴的方向垂直向上).

解 设 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 为各坐标轴上的单位矢量,则重力 $\vec{F}=-mg\,\vec{k}$,而

$$d\vec{s}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}.$$

从而功的微分为

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=-mg\,dz=d(-mg\,z).$$

于是,重力的功为

$$A=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}-mg\,dz$$

$$=(-mg\,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=-mg(z_2-z_1).$$

4294$^+$ 弹性力的方向向着坐标原点，力的大小与质点距坐标原点的距离成比例．设此点依反时针方向描绘出椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的正四分之一，求弹性力所作的功．

解 弹性力

$$\vec{F}=-k(x\vec{i}+y\vec{j}),$$

功的微分为

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$=-k(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j})$$

$$=-k(x\,dx+y\,dy)$$

$$=d\left[-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\right].$$

于是，功为

$$A=-k\int_{(a,0)}^{(0,b)}x\,dx+y\,dy$$

$$=-\frac{k}{2}(x^2+y^2)\Big|_{(a,0)}^{(0,b)}$$

$$=\frac{k}{2}(a^2-b^2).$$

4295$^+$ 当单位质量从点$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$移动到点

M_2 (x_2, y_2, z_2) 时，求作用于单位质量的引力 $F=\frac{k}{r^2}$ (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 所做的功。

解 引力指向坐标原点，故它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{r},\quad \cos\beta=-\frac{y}{r},$$

$$\cos\gamma=-\frac{z}{r},$$

而引力的射影为

$$X=-\frac{kx}{r^3},\quad Y=-\frac{ky}{r^3},$$

$$Z=-\frac{kz}{r^3}.$$

于是，功为

$$\begin{aligned}A&=-k\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{r^3}\\&=-\frac{k}{2}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\\&=k\left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\right).\end{aligned}$$

当然，这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的，上式表明功与路径无关，仅决定于起始点的坐标。

§12. 格林公式

1°曲线积分与二重积分的关系　设C为逐段光滑的简单封闭围线，它围成单联通的有界域S，这围线的方向是这样的：域S保持在左边，函数$P(x, y)$，$Q(x, y)$与它们自己的一阶偏导函数在域S内及其边缘上皆是连续的，则有格林公式

$$\oint_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (1)$$

若把域S的边界C了解为一切边界围线的和，而围线绕转的方向是选择来使得域S保持在左边，则公式（1）对于由几个简单围线所界的有界域S也真确。

2°平面域的面积　由逐段光滑的简单围线C所界的面积S等于：

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx .$$

在这一节中，若没有相反的约定，则假定积分的封闭围线是简单的（无自交点），并选择它们的正方向使所界不含无穷远点的域是保持在曲线的左边。

4296．利用格林公式变换曲线积分

$$I=\oint_C\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy,$$

式中围线C包含有界的域S。

解　此处$P=\sqrt{x^2+y^2}$，$Q=xy^2+y\ln(x$

$+\sqrt{x^2+y^2}$）. 从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2.$$

于是，

$$I=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_S y^2dxdy.$$

注：这里应假定C不与Ox轴的左半部分（即$x\leqslant 0$，$y=0$）相交，从而这时在S中$x+\sqrt{x^2+y^2}>0$.

4297. 应用格林公式，计算曲线积分

$$I=\oint_k(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy.$$

其中k依正方向经过以$A(1, 1)$，$B(3, 2)$，$C(2, 5)$为顶点的三角形ABC的围线. 直接计算积分，以验证所求得的结果.

解 如图8.64所示. AB，BC及CA的方程分别为

$y=\frac{1}{2}(x+1)$，$y=-3x+11$，$y=4x-3$.

由于$P=(x+y)^2$，$Q=-(x^2+y^2)$，故

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2\cdot(x+y)=-4x-2y.$$

通过顶点C引直线垂直于Ox轴，它把三角形域S分成S_1和S_2两部分. 于是，

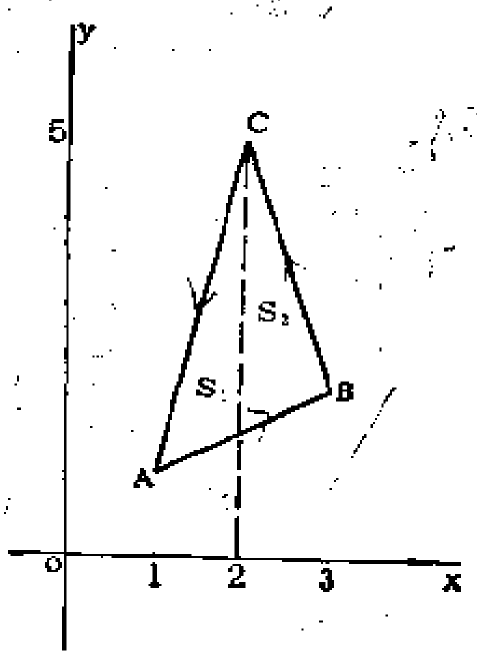

图 8.64

$$I=\iint\limits_{S}(-4x-2y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_1}(-4x-2y)dxdy+\iint\limits_{S_2}(-4x-2y)dxdy$$

$$=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)dy$$

$$+\int_2^3 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x-2y)dy$$

$$=\int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4}\right)dx+\int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4}\right)dx$$

$$=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-46\frac{2}{3}.$$

如果直接计算，则

$$I=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$$

$$=\int_1^3\left[\left(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]dx$$

$$+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)(x^2+9x^2$$

$$-66x+121)]dx$$

$$+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\right)dx+\int_3^2(34x^2-242x$$

$$+484)dx$$

$$+\int_2^1(-43x^2+66x-27)dx$$

$$=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-46\frac{2}{3}.$$

应用格林公式计算下列曲线积分：

4298. $\oint_C xy^2dy-x^2ydx$，式中C为圆周 $x^2+y^2=a^2$。

解 由于$P=-x^2y$，$Q=xy^2$，故有

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

如果直接计算，可令$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，则

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=a^4\int_0^{2\pi}(\cos^2t\sin^2t$$

$$+\cos^2t\sin^2t)dt$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{\pi a^4}{2}.$$

4299. $\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy$，式中 C为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

解 由于$P=x+y$，$Q=-(x-y)$，故有

$$\oint_C(x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(-1-1)dxdy=-2\pi ab.$$

如果直接计算，则

$$\oint_C (x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-b\sin t)\cdot(b\cos t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[(b^2-a^2)\cos t\sin t-ab]dt=-2\pi ab.$$

4300. $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$，其中 C 为域 $0<x<\pi$，$0<y<\sin x$ 的正方向的围线。

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x(\sin y-y)-e^x\sin y=-ye^x,$$

故有

$$\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

$$=-\iint\limits_{\substack{0<x<\pi\\0<y<\sin x}} ye^x dxdy=-\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} ydy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin^2 xdx=-\frac{1}{4}\left(\int_0^\pi e^x dx-\int_0^\pi e^x\cos 2xdx\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(e^\pi-1)-\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}e^x\Big|_0^\pi\right]$$

$$=-\frac{1}{5}(e^\pi-1).$$

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$.

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-(x^2-y^2)}[(-2x\sin 2xy+2y\cos 2xy)$$

$$-(2y\cos 2xy-2x\sin 2xy)]=0,$$

故有

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} 0\,dx\,dy=0.$$

4302. 积分

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$$

和

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$$

（其中AmB为连接点$A(1,\ 1)$和点$B(2,\ 6)$的直线，AnB是其轴为垂直的抛物线，并通过A，B及坐标原点）相差多少？

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x-y)-2(x+y)=-4x,$$

故I_1与I_2之差为（利用格林公式）

$$I_2-I_1=\oint_{AnBmA}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$$

$$=\iint_S(-4x)dxdy=\int_1^2 dx\int_{2x^2-x}^{5x-4}(-4x)dy$$

$$=-\int_1^2 4x(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=(2x^4-8x^3+8x^2)\Big|_1^2=-2,$$

或$I_1-I_2=2$.

4303. 计算曲线积分

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

其中AmO为由点$A(a,\ 0)$至点$O(0,\ 0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax$.

解 在Ox轴上连接点$O(0,\ 0)$与点$A(a,\ 0)$，这样，便构成封闭的半圆形$AmOA$，且在线段OA上，

$$\int_{OA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0.$$

从而

$$\oint_{AmOA}=\int_{AmO}+\int_{OA}=\int_{AmO}.$$

另一方面，利用格林公式可得

$$\oint_{AmOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}mdxdy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

于是，

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\frac{\pi m a^2}{8}.$$

4304．计算曲线积分

$$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy,$$

式中$\varphi(y)$和$\varphi'(y)$为连续函数，AmB为连接点$A(x_1, y_1)$和点$B(x_2, y_2)$的任何路径，但与线段AB围成已知大小为S的面积$AmBA$。

解 首先，我们有

$$\oint_{AmBA}=\int_{AmB}+\int_{BA},$$

而

$$\oint_{AmBA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=\iint_S m\,dx\,dy=mS.$$

另一方面，

$$\int_{BA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=\int_{BA}d[e^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(y\,dx+dy)$$

$$=e^x\varphi(y)\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}-m\int_{x_2}^{x_1}\Big[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\cdot(x-x_1)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Big]dx$$

$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)-m\left(y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$$

$$\cdot(x_1-x_2)+\frac{m}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)^2$$

$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)+m(y_2-y_1)$$

$$+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

于是，

$$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)$$

$$-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

注：利用此题的结果可计算 4303 题．事实上，由于 $\varphi(y)=\sin y$，$x_1=a$，$y_1=0$，$x_2=y_2=0$，$S=\frac{\pi a^2}{8}$，代入即得

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi m a^2}{8}.$$

4305$^+$ 求两个二次连续地可微分的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$，使得线积分

$$I=\oint_C P(x+\alpha,\ y+\beta)dx+Q(x+\alpha,\ y+\beta)dy$$

对于任何封闭的围线C与常数α和β无关．

解 由格林公式，得

$$I=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial x}-\frac{\partial P(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial y}\right]\cdot dxdy=\tau\ . \qquad (1)$$

由假定τ为一常数，它与α、β无关（只与围线C有关），上式中的S表围线C所围成的闭区域．由假定

P，Q 具有连续的二阶偏导数，故（1）式中二重积分的被积函数具有关于 α，β 的一阶连续偏导数．因此，可以在积分号下关于α，β 求偏导数，得

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial y}\right] \cdot dxdy = \frac{\partial}{\partial\alpha}\tau = 0 . \qquad (2)$$

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial y}\right] \cdot dxdy = \frac{\partial}{\partial\beta}\tau = 0 . \qquad (3)$$

于是，（2）式和（3）式对任何α，β以及任何S都成立．再注意到（2）式和（3）式中二重积分的被积函数都是连续的，故被积函数必恒为零（参看4097题，此题对二重积分也成立）：

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial y} \equiv 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\beta\partial y} \equiv 0 \quad (5)$$

（对任何 x，y，α，β）．记 $x+\alpha=u$，$y+\beta=v$，显然有

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial x} = \frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial\alpha\partial y} = \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial\beta\partial x}=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial\beta\partial y}=\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2}.$$

于是，（4）式与（5）式为

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u\partial v}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial v\partial u}-\frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v^2}\equiv 0$$

（对任何u，v），由此可知：

$$\frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}\equiv k\ （常数）.$$

将u，v改记为x，y，则上式为

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv k\ （常数）.\qquad(6)$$

令 $u(x,y)=\int_0^x P(t,y)dt$，则 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，且

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y).\qquad(7)$$

由（6）式知：

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=k+\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

$$=k+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$=k+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right).$$

两端积分，得

$$Q(x,y)=kx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\varphi(y), \tag{8}$$

其中$\varphi(y)$为具有二阶连续导数的任意函数．由（7），（8）两式又知$u(x, y)$具有连续的三阶偏导数．

反之，若$u(x,y)$是任一具有三阶连续偏导数的函数，而$\varphi(y)$是任一具二阶连续导数的函数，则由（7）式和（8）式确定的$P(x, y)$与$Q(x, y)$必具连续二阶偏导数，且使（6）式成立，从而使

$$I=\oint_c P(x+\alpha,\ y+\beta)dx+Q(x+\alpha,\ y+\beta)dy$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial Q(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial x}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial P(x+\alpha,\ y+\beta)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_S kdxdy=kS,$$

故I是与α、β无关的常数（对于任意固定的C）．

综上所述，可知：使线积分I对于任何封闭围线C与常数α、β无关的二阶连续地可微的函数$P(x,y)$

与$Q(x,y)$的全体由公式（7）与（8）给出，其中k为常数，$u(x, y)$为三阶连续地可微的任一函数，$\varphi(y)$为二阶连续地可微的任意一个一元函数。

4306. 为了使线积分

$$\int_{AmB} F(x,y)(ydx+xdy)$$

与积分路径的形状无关，则可微分函数$F(x,y)$应满足怎样的条件？

解 由于$P=yF(x,y)$，$Q=xF(x,y)$，故由格林公式知所求的条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)],$$

即

$$xF'_x(x,y)=yF'_y(x,y).$$

4307. 计算

$$I=\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

其中C为依正方向进行而不经过坐标原点的简单封闭围线。

解 令$P=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$。易知，当$(x,y)\neq(0, 0)$时，恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论：

（1） 坐标原点在围线C之外，这时，在由C围成的有界闭区域S上，P与Q以及它们的偏导数都连续，

故可应用格林公式，得

$$I=\oint_{C}Pdx+Qdy=\iint_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0\,.$$

（2） 围线C包围坐标原点．这时，由于P，Q在原点无定义，故不能直接对由C围成的区域应用格林公式。今取$a>0$充分小，使中心在原点半径为a的圆周L_a（L_a：$x^2+y^2=a^2$）完全位于围线C之内。用S_a表界于C和L_a之间的环形闭区域．显然，在S_a上，P、Q及其偏导数均连续，故可应用格林公式，得

$$\left(\oint_{C}+\oint_{-L_a}\right)Pdx+Qdy$$

$$=\iint_{S_a}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0\,,$$

其中$-L_a$表沿L_a的负方向（即顺时针方向）．
于是，

$$I=\oint_{C}Pdx+Qdy=\oint_{L_a}Pdx+Qdy,$$

其中L_a沿正方向（即逆时针方向）．利用L_a的参数方程$x=a\cos t$，$y=a\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$），即得

$$I=\oint_{L_a}Pdx+Qdy=\oint_{L_a}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(a\cos t)-a\sin t(-a\sin t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\,.$$

利用曲线积分计算由下列曲线所界的面积：

4308．椭圆$x=a\cos t$，$y=b\sin t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）．

解 面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\pi ab.$$

4309．星形线$x=a\cos^3 t$，$y=b\sin^3 t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）．

解 面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\cos^2 t\sin^4 t)dt$$

$$=\frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt=\frac{3}{8}\pi ab.$$

4310．抛物线$(x+y)^2=ax$ （$a>0$）和轴Ox．

解 作代换$y=tx$，则原方程化为$x^2(1+t)^2=ax$．从而得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2},\quad y=\frac{at}{(1+t)^2}\ (0\leqslant t<+\infty).$$

它与Ox轴的交点为$(a, 0)$与$(0, 0)$．在Ox轴上从点$(0, 0)$到点$(a, 0)$的一段上，有

$$xdy-ydx=0.$$

在抛物线上，有

$$xdy-ydx=\frac{a^2}{(1+t)^4}dt.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_{c} xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^4}$$

$$=-\frac{a^2}{6}\cdot\frac{1}{(1+t)^3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}.$$

4311. 笛卡儿叶形线$x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$.

解 作代换$y=tx$，则得曲线的参数方程为

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$dx=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt,\quad dy=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}dt,$$

从而

$$xdy-ydx=\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_{c} xdy-ydx=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]\Big|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

4312. 双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解 利用极坐标 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，得双纽线的方程为$r^2=a^2\cos2\varphi$，故

$$x=a\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi},\quad y=a\sin\varphi\sqrt{\cos2\varphi}.$$

从而 $xdy-ydx=a^2\cos2\varphi d\varphi$. 于是，面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\oint_{c} xdy-ydx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=a^2 .$$

4313．曲线$x^3+y^3=x^2+y^2$及坐标轴．

解　作代换$y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{1+t^2}{1+t^3},\quad y=\frac{t(1+t^2)}{1+t^3}\ (0\leqslant t<+\infty) .$$

曲线的起点为(1，0)，终点为(0，1)．在曲线上，

$$xdy-ydx=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}dt\ (0\leqslant t<+\infty).$$

在Ox轴上从点(0，1)到点(0，0)一段，以及在Ox轴上从点(0，0)到点(1，0)一段上，均有

$$xdy-ydx=0 .$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(1+t^3)^2}dt+2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^2}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}B\left(2-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}B(1,\ 1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\ 2-\frac{1}{3}\right)\right]^{*)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(2-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

*) 利用3853题的结果.

4314. 计算由曲线

$$(x+y)^{n+m+1}=ax^n y^m \quad (a>0,\ n>0,\ m>0)$$

所界的面积.

解 作代换$y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}},\quad y=\frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}}\ (0\leqslant t<+\infty).$$

从而

$$xdy-ydx=\frac{a^2t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}dt\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}B(2m+1,\ 2n+1).^{*)}$$

*) 利用3852题的结果.

4315. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1\quad(a>0,\ b>0,\ n>0)$$

1/4 和坐标轴所界的面积.

解 作代换$x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$，$y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

即得

$$xdy-ydx=\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点 $(a,\ 0)$ 和 点 $(0,\ b)$. 在 Oy 轴上，从点$(0,\ b)$ 到点$(0,\ 0)$一段，以及在Ox 轴上从点$(0,\ 0)$到点$(a,\ 0)$一段上，显然有

$$xdy-ydx=0.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{ab}{n}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)^{*)}=\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

*） 利用3856题的结果。

4316．计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a>0,\ b>0,\ n>0)$ 和坐标轴所界的面积。

解 作代换 $y=\frac{b}{a}t$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n},\quad y=\frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n}\ (0<t<+\infty).$$

易知

$$xdy-ydx=ab\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}dt.$$

又在两坐标轴上，显然有 $xdy-ydx=0$．于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{ab}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2}dt$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2}dt+2\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2}dt\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^n)^2}dt\right]$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{n}B\left(2-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}B(1,\ 1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\ 2-\frac{1}{n}\right)\right]^{*)}$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+B\left(2-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)}\right]$$

$$=\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right].$$

*) 利用3853题的结果．

4317．计算由纽形曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$$

$(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0)$所界的面积.

解 作代换 $y=\frac{b}{a}xt$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{act^n}{1+t^{2n+1}},\quad y=\frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}}\ (0\leqslant t<+\infty).$$

易知

$$xdy-ydx=\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt.$$

于是，面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{abc^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt$$

$$=-\frac{abc^2}{2(2n+1)}\cdot\frac{1}{1+t^{2n+1}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

4318. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆外面圆周滚动（而不滑动）时，由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为外摆线. 假定比值 $\frac{R}{r}=n$ 是整数 $(n\geqslant 1)$，求外摆线所界的面积. 研究特殊情况 $r=R$（心脏形线）.

解 取定圆的中心 O 作坐标原点，取 Ox 轴通过点 A，点 A 是动点的始点，即为两圆的公切点时的位置（图8.65）. 当动圆滚到如图的新位置时，点 A 移到点 M. 动点 M 的轨迹便是外摆线，其方程推导如下：设动圆的圆心为 C，两圆的切点为 B，记 $\angle MCB=t$（运动开始时，设 t 等于零）. 切点在定圆上所移过的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 应等于它在动圆上所移过的弧 $\overset{\frown}{MB}$，即

$$R\cdot\angle AOB=\frac{R}{n}\cdot\angle MCB=\frac{R}{n}t.$$

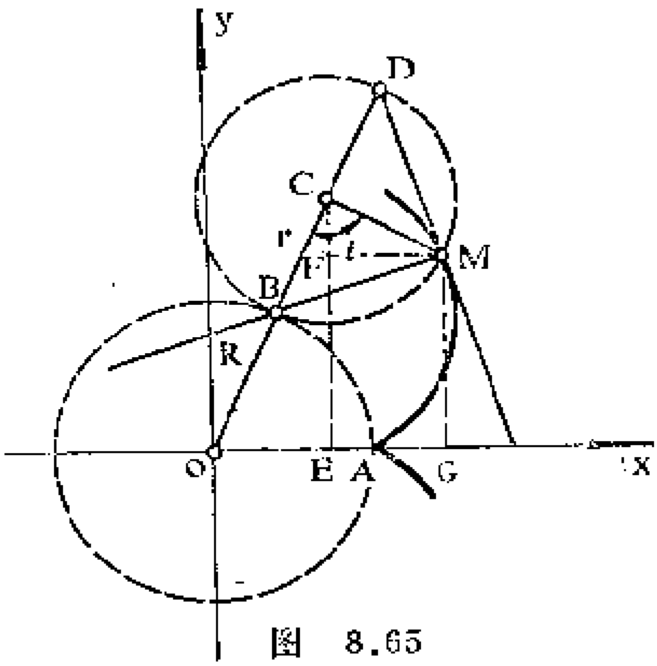

图 8.65

从而 $\angle AOB=\frac{t}{n}$，设动点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$x=OG=OE+FM$$

$$=\left(R+\frac{R}{n}\right)\cos\frac{t}{n}+\frac{R}{n}\sin\angle FCM,$$

但$\angle FCM=\angle BCM-\angle OCE$，且$\angle OCE=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{n}$，

从而

$$\angle FCM=\left(1+\frac{1}{n}\right)t-\frac{\pi}{2},$$

$$\sin\angle FCM=-\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

于是，最后得

$$x=R\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

类似地，可求得

$$y=R\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)t.$$

若记 $\varphi=\frac{t}{n}$，并注意到 $R=nr$，则外摆线可用如下的参数方程表示：

$$x=(n+1)r\cos\varphi-r\cos(n+1)\varphi,$$
$$y=(n+1)r\sin\varphi-r\sin(n+1)\varphi.$$

由$R=nr$知，当动圆滚n圈后，起点与终点重合，即φ的变化范围为 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 由于

$$xdy-ydx=r^2(n+1)(n+2)(1-\cos n\varphi)d\varphi,$$

故所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$
$$=\frac{r^2(n+1)(n+2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)d\varphi$$
$$=\pi r^2(n+1)(n+2).$$

特别是，当 $r=R$ 时，即 $n=1$，则得心脏形线的面积为$S=6\pi r^2$.

4319. 一个半径为r的圆沿着半径为 R 的定圆内面圆周滚动（而不滑动）时，由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为内摆线. 假定比值$\frac{R}{r}=n$是整数($n\geqslant 2$)，求内摆线所界的面积. 研究特殊情况$r=\frac{R}{4}$（星形线）.

解 仿上题，容易求得内摆线的参数方程为

$$x=R\left(1-\frac{1}{n}\right)\cos\frac{t}{n}+\frac{R}{n}\cos\left(1-\frac{1}{n}\right)t,$$

$$y=R\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{t}{n}-\frac{R}{n}\sin\left(1-\frac{1}{n}\right)t.$$

若以 $\varphi=\frac{t}{n}$ 为参数，并注意到 $R=nr$，则得

$$x=r(n-1)\cos\varphi+r\cos(n-1)\varphi,$$
$$y=r(n-1)\sin\varphi-r\sin(n-1)\varphi.$$

由于

$$xdy-ydx=r^2(n-1)(n-2)(1-\cos n\varphi)d\varphi,$$

故面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$
$$=\frac{r^2(n-1)(n-2)}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)d\varphi$$
$$=\pi r^2(n-1)(n-2).$$

特别是，当 $\frac{R}{r}=4$ 时，即 $n=4$，则得星形线所界的面积为 $S=6\pi r^2$.

4320. 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为

$$x^2+y^2=ax,\quad z^2=a^2-ax.$$

若将 Oxy 平面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 记以 C，其弧长记以 s，则所求的面积显然可表为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\,ds.$$

由于 $x^2+y^2=ax$ 即为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，故令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi,\quad y=\frac{a}{2}\sin\varphi,$$

从而弧长的微分为$ds=\frac{a}{2}d\varphi$。于是，面积为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\ ds=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos\varphi)}\cdot\frac{a}{2}d\varphi$$

$$=2\int_0^{2\pi}a^2\sin\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a^2.$$

4321． 计算

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2},$$

若 $X=ax+by$,$Y=cx+dy$,且 C 为包围坐标原点的简单的封闭围线（$ad-bc\neq 0$）．

解 首先注意，由于$ad-bc\neq 0$，故只有原点（0，0）使$X^2+Y^2=0$．易知

$$XdY-YdX=(ax+by)(cdx+ddy)$$
$$-(cx+dy)(adx+bdy)$$
$$=(ad-bc)(xdy-ydx),$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中

$$P=-\frac{(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},$$

$$Q=\frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

容易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(ad-bc)[(a^2+c^2)x^2-(b^2+d^2)y^2]}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^2}$$

$((x,y)\neq(0,0)$时$)$，

故由格林公式知

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\oint_{C'} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中 C' 可为包围原点 $(0,0)$ 的任一位于 C 内的围线．特别是，可取C'为围线 $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=r^2$（即$X^2+Y^2=r^2$），$r>0$ 充分小．于是，得（利用格林公式）

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\oint_{X^2+Y^2=r^2}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$
$$=\frac{1}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}XdY-YdX$$
$$=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}xdy-ydx$$
$$=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}2dxdy$$
$$=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\right|dXdY.$$

由于$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=ad-bc$，故$\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}$

$=\frac{1}{ad-bc}$。于是，代入上式得

$$I=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\frac{1}{|ad-bc|}dXdY$$

$$=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\cdot\frac{1}{|ad-bc|}\cdot\pi r^2=\operatorname{sgn}(ad-bc).$$

4322. 若简单的围线C包围坐标原点，$X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$，而曲线$\varphi(x,y)=0$和$\psi(x,y)=0$在围线C内面有几个单交点，计算积分I（参阅前题）。

解 设$\varphi(x,y)=0$，$\psi(x,y)=0$在C内的交点为$P_i(x_i,y_i)$（$i=1,2,\cdots,m$）。首先注意，本题应假定函数$\varphi(x,y)$与$\psi(x,y)$在C围成的区域内具有连续的二阶偏导数，并且在各点P_i（$i=1,2,\cdots,m$）处有$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\varphi_x'\psi_y'-\varphi_y'\psi_x'\neq 0$。容易算得

$$XdY-YdX=(\varphi\psi_x'-\varphi_x'\psi)dx+(\varphi\psi_y'-\varphi_y'\psi)dy,$$

从而

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中

$$P=\frac{\varphi\psi_x'-\varphi_x'\psi}{\varphi^2+\psi^2},\qquad Q=\frac{\varphi\psi_y'-\varphi_y'\psi}{\varphi^2+\psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2}[(\varphi\psi_{xy}''-\varphi_{xy}''\psi)(\varphi^2+\psi^2)$$
$$-(\varphi_x'\psi_y'+\varphi_y'\psi_x')\varphi^2+(\varphi_y'\psi_x'+\varphi_x'\psi_y')\psi^2$$
$$+2(\varphi_x'\varphi_y'-\psi_x'\psi_y')\varphi\psi]$$
$$((x,\ y)\neq(x_i,\ y_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)).$$

围绕点$P_i(x_i,\ y_i)$作围线C_i: $[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2=r^2$（即$X^2+Y^2=r^2$），取$r>0$充分小，使诸$C_i$互不相交且都位于$C$内（这是办得到的，因为在各点$P_i$，$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq 0$．从而由连续性知在$P_i$的某邻域内$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq 0$且保持定号，于是根据隐函数存在定理知变换$X=\varphi(x,y)$，$Y=\psi(x,y)$在点$(x,y)=(x_i,\ y_i)$邻近及点$(X,\ Y)=(0,\ 0)$邻近是双方单值双方连续的）并使$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$在$P_i$的邻近$X^2+Y^2\leqslant r^2$（记为$S_i$）上保持定号，将格林公式应用于诸围线$C$，$C_1$，…，$C_m$之间的区域，可得

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\oint_{c_i}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}. \qquad (1)$$

但

$$\oint_{c_i}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{c_i}XdY-YdX$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{c_i}(\varphi\psi_x'-\varphi_x'\psi)dx+(\varphi\psi_y'-\varphi_y'\psi)dy$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint_{S_i}2(\varphi_x'\psi_y'-\varphi_y'\psi_x')dxdy$$

$$=\frac{2}{r^2}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}dxdy$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}dxdy$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint_{X^2+Y^2\leqslant r^2}dXdY$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\cdot\pi r^2$$

$$=2\pi\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

代入（1）式，即得

$$I=\sum_{i=1}^{m}\left(\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

或写为

$$I=\sum \operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)},$$

其中的 Σ 是对曲线 $\varphi(x,y)=0$ 与 $\psi(x,y)=0$ 在 C 内的各交点相加.

注：显然，4321题是4322题的特例. 这时，曲线 $ax+by=0$ 与 $cx+dy=0$ 在 C 内只有一个交点，即原点(0，0)，而$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=ad-bc$.

4323. 证明，若C为封闭的围线且$\vec{l}$为任意的方向，有

$$\oint_C \cos(\vec{l},\vec{n})ds=0,$$

式中n为围线C的外法线.

证 如图8.66所示. 不妨规定C的方向为逆时针的，以$\vec{t}$表示. 由于夹角

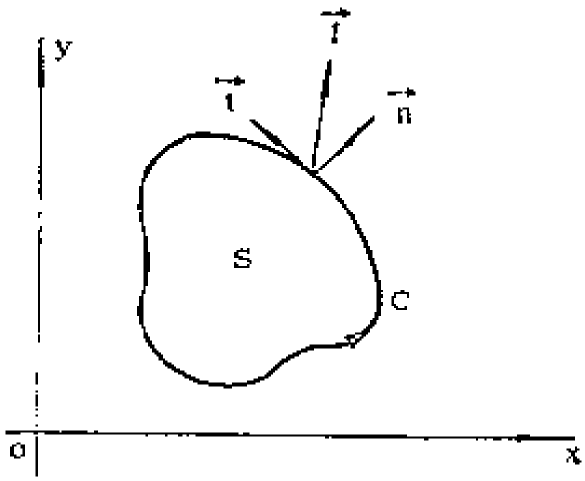

图 8.66

$$(\vec{l},\ \vec{n})=(\vec{l},\ x)-(\vec{n},\ x),$$

故得

$$\cos(\overrightarrow{l},\overrightarrow{n})=\cos(\overrightarrow{l},x)\cos(\overrightarrow{n},x)$$

$$+\sin(\overrightarrow{l},x)\sin(\overrightarrow{n},x).$$

但 $\sin(\overrightarrow{n},x)=\sin\left[(\overrightarrow{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\overrightarrow{t},x)$,

$\cos(\overrightarrow{n},x)=\cos\left[(\overrightarrow{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\overrightarrow{t},x)$, 且

$$\cos(\overrightarrow{t},x)=\frac{dx}{ds},\quad \sin(\overrightarrow{t},x)=\frac{dy}{ds},$$

因此，有

$$\cos(\overrightarrow{l},\overrightarrow{n})ds=\cos(\overrightarrow{l},x)dy-\sin(\overrightarrow{l},x)dx.$$

再利用格林公式，并注意到 $\sin(\overrightarrow{l},x)$ 和 $\cos(\overrightarrow{l},x)$ 均为常数，即得

$$\oint_C\cos(\overrightarrow{l},\overrightarrow{n})ds$$

$$=\oint_C[-\sin(\overrightarrow{l},x)dx+\cos(\overrightarrow{l},x)]dy$$

$$=\iint_S 0\,dxdy=0.$$

4324. 求积分

$$I=\oint_C[x\cos(\overrightarrow{n},x)+y\cos(\overrightarrow{n},y)]ds$$

之值，式中C为包围有界域S的简单封闭曲线，n为它的外法线.

解 如上题所述，已知

$$\cos(\overrightarrow{n},x)=\cos\left[(\overrightarrow{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\sin(\overrightarrow{t},x)=\frac{dy}{ds},$$

$$\cos(\overrightarrow{n},y)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\overrightarrow{n},x)\right]=\sin(\overrightarrow{n},x)$$

$$=\sin\left[(\overrightarrow{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\overrightarrow{t},x)$$

$$=-\frac{dx}{ds}.$$

于是，

$$I=\oint_C xdy-ydx=2\cdot\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=2S,$$

这里S表示有界域S面积的数值．

4325．求：

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C(\overrightarrow{F},\ \overrightarrow{n})ds,$$

其中S为包含点$(x_0,\ y_0)$的围线C所界的面积，$d(S)$为域S的直径，$\overrightarrow{n}$为围线C的外法线上的单位向量，$\overrightarrow{F}\{x,\ y\}$为在$S+C$上连续地可微分的向量．

解 由4324题的推导过程中知，矢量$\overrightarrow{n}$在坐标轴上的射影为

$$n_x=\cos(\overrightarrow{n},x)=\frac{dy}{ds},\quad n_y=\cos(\overrightarrow{n},\ y)=-\frac{dx}{ds}.$$

于是，

$$(\overrightarrow{F},\ \overrightarrow{n})ds=(Xn_x+Yn_y)ds=Xdy-Ydx,$$

因此，利用格林公式知

$$\oint_C(\overrightarrow{F},\ \overrightarrow{n})ds=\oint_C Xdy-Ydx$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\bigg|_{(\xi,\ \eta)}\cdot S,$$

其中点 $(\xi,\ \eta)\in$域S. 于是,

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C(\vec{F},\ \vec{n})\,ds=\lim_{d(S)\to 0}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\bigg|_{(\xi,\ \eta)}$$

$$=X'_x(x_0,\ y_0)+Y_y(x_0,\ y_0).$$

§13. 曲线积分的物理应用

4326. 均匀分布在圆$x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$ 的上半部的质量M以怎样的力吸引质量为m位于 (0, 0) 的质点?

解 由对称性知, 引力在Ox轴上的射影$X=0$, 故只要计算引力在Oy轴上的射影.

设圆心角为θ, 由$ds=ad\theta$知, 对于长为ds一段圆弧吸引质量为m的质点的力在Oy轴上的射影为

$$dY=\frac{km\dfrac{M}{\pi a}}{a^2}\sin\theta\cdot ad\theta$$

$$=\frac{kmM}{\pi a^2}\sin\theta d\theta,$$

其中k为引力常数.

于是, 所求的引力在Oy轴上的射影为

$$Y=\frac{kmM}{\pi a^2}\int_0^\pi\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2kmM}{\pi a^2}.$$

4327. 计算单层的对数位

$$u(x,y)=\oint_C \kappa \ln\frac{1}{r}ds,$$

式中κ=常数——密度，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$，设围线$C$是圆周$\xi^2+\eta^2=R^2$。

解 由对称性知，对数位

$$u(x,y)=2\kappa\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{r}\cdot Rd\theta$$

$$=2R\kappa\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}}d\theta$$

$$=-R\kappa\int_0^{\pi}\ln R^2\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta,$$

其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\xi x+\eta y=R\rho\cos\theta$，而$\theta$是矢量$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$与$\vec{r_1}=\xi\vec{i}+\eta\vec{j}$的正向夹角。

利用3733题（或2192题）的结果，可得

$$\int_0^{\pi}\ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta$$

$$=\begin{cases}0, & \rho\leqslant R;\\ 2\pi\ln\frac{\rho}{R}, & \rho>R.\end{cases}$$

于是，我们有

$$u(x,y)=-2R\kappa\int_0^{\pi}\ln Rd\theta$$

$$-R\kappa\int_0^{\pi}\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]d\theta$$

$$=\begin{cases} 2\pi R\kappa\ln\dfrac{1}{R}, & \rho\leqslant R, \\ 2\pi R\kappa\ln\dfrac{1}{\rho}, & \rho>R. \end{cases}$$

4328．采用极坐标系ρ和φ，计算单层的对数位

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}d\psi$$

和

$$I_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}d\psi,$$

式中r为点（ρ，φ）与动点（1，ψ）间的距离，m为自然数．

解 由于

$$r=\sqrt{(\rho\cos\varphi-\cos\psi)^2+(\rho\sin\varphi-\sin\psi)^2}$$
$$=\sqrt{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2},$$

于是，当$\rho<1$时，我们有

$$I_1=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ \ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\cos m\varphi\cos mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\sin m\varphi\sin mu\ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du.$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以2π为周期的函数，并注意到奇偶函数在对称区间上的积分

性质，则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\,\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$+\frac{\sin m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\,\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\,\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$=-(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}e^m\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi \ ^{*)}.$$

同理，我们有

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi\,\ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2]\,d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi}\sin(mu+m\varphi)\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$=-\frac{\cos m\varphi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mu\,\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$-\sin m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\,\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$=-\sin m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\,\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$=-(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m}\rho^m\right)=\frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi.$$

当$\rho>1$时，则有

$$I_1=-\cos m\varphi\int_0^{\pi}\cos mu\,\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)\,du$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu \ \ln\rho\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$=-\cos m\varphi\int_0^\pi \cos mu \ \ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$=-(\cos m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi \quad **) \ .$$

同理，我们有

$$I_2=-\sin m\varphi\int_0^\pi \cos mu \ \ln\left(1-2\frac{1}{\rho}\cos u+\frac{1}{\rho^2}\right)du$$

$$=-(\sin m\varphi)\left(-\frac{\pi}{m\rho^m}\right)=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi .$$

对于$\rho=0$，显然有

$$I_1=I_2=0 .$$

现在来研究当$\rho=1$的情况．首先，积分

$$I_1=\int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

对于ρ在区间〔1，$1+\delta$〕上是一致收敛的，其中δ为很小的正数．事实上，对于充分小的η，当u在$(0,\ \eta)$内取值时，有

$$1>1-2\rho\cos u+\rho^2=(1-\rho)^2+2\rho(1-\cos u)$$
$$\geqslant 2\ (1-\cos u)>0$$

于是，当$1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$，$u\in(0,\ \eta)$时，有

$$|\cos mu \ \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)|\leqslant|\ln 2(1-\cos u)| .$$

而积分

$$\int_0^\eta |\ln 2(1-\cos u)|\,du$$

是收敛的．这是由于当 $0<2\beta<1$ 时，有

$$\lim_{u\to+0} u^{2\beta}\left|\ln 2(1-\cos u)\right|$$

$$=\lim_{u\to+0} -[2(1-\cos u)]^{\beta}\ln[2(1-\cos u)]$$

$$\cdot\frac{u^{2\beta}}{2^{\beta}(1-\cos u)^{\beta}}$$

$$=0\cdot 1=0.$$

于是，积分

$$\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛，故知积分

$$I_1=\int_0^{\pi}\cos mu\ln(1-2\rho\cos u+\rho^2)du$$

在 $1\leqslant\rho\leqslant 1+\delta$ 上一致收敛．从而，I_1 作为参数 ρ 的函数在 $\rho=1$ 是右连续的．由此，根据上面已求出 $\rho>1$ 时 $I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$，得知：当 $\rho=1$ 时，

$$I_1=\lim_{\rho\to1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi=\frac{\pi}{m}\cos m\varphi.$$

同理，可得

$$I_2=\lim_{\rho\to1+0}\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi=\frac{\pi}{m}\sin m\varphi.$$

综上所述，得

$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{m}\cos m\varphi,\quad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^{m}\sin m\varphi,\quad 当 0\leqslant\rho\leqslant 1;$$

$$I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi,\quad I_2=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi,\quad 当 \rho>1.$$

*) 参看И.М.雷日克、И.С.格拉德什坦编著“函数表

与积分表*)3.765公式1.

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2p\cos x+p^2)\cos\alpha x\,dx=-\frac{\pi}{\alpha}p^{\alpha}\ (p^2<1).$$

**) 根据上面公式，当$p^2>1$时，有

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2p\cos x+p^2)\cos\alpha x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\ln p^2\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}2\ln p\cdot\cos\alpha x\,dx+\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos\alpha x\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{\alpha}p^{-\alpha},$$

其中α为自然数.

4329. 计算高斯积分

$$u(x,\ y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds,$$

式中$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$为向量$\vec{r}$的长度，此向量是连接点$A(x,y)$和简单封闭光滑围线$C$上的动点$M(\xi,\eta)$而得的，$(\vec{r},\ \vec{n})$为向量$\vec{r}$与在曲线$C$上$M$点的外法线$\vec{n}$所夹的角.

解 设$\vec{n}$与Ox轴的夹角为α，$\vec{r}$与Ox轴的夹角为β，则

$(\vec{r}, \vec{n})=\alpha-\beta$. 于是，

$$\cos(\vec{r}, \vec{n})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha,$$

代入高斯积分，得

$$u(x, y)=\oint_C\left(\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha\right)ds$$

$$=\oint_C\frac{\xi-x}{r^2}d\eta-\frac{\eta-y}{r^2}d\xi.$$

令

$$P=-\frac{\eta-y}{r^2}, \qquad Q=\frac{\xi-x}{r^2},$$

则有

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

因而P、Q的偏导数除去点A（此处$r=0$）外，在全平面上是连续的，并且$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial P}{\partial\eta}$. 于是，利用格林公式知：当点$A$在曲线$C$之外时，有

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}ds=0.$$

当点A在曲线C之内时，则在曲线C内以A为圆心，R为半径作一圆l，即得

$$u(x, y)=\oint_l\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}ds$$

$$=\oint_{l}\frac{1}{R}ds=2\pi .$$

当点A在曲线C上时，不妨利用关系式

$$\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds=d\varphi \quad ^{*)},$$

其中$d\varphi$为从点A看曲线C上弧长的微分ds所张的角度。今以A为圆心，r_1为半径作一小圆，交C于B_1及B_2两点，将曲线C除去小圆内的部分记以$\widehat{B_1B_2}$，则有

$$\int_{\widehat{B_1B_2}}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds=\int_{\widehat{B_1B_2}}d\varphi=\angle B_1AB_2.$$

于是，我们有

$$u(x,y)=\oint_{C}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds$$

$$=\lim_{r_1\to+0}\int_{\widehat{B_1B_2}}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds$$

$$=\lim_{r_1\to+0}\angle B_1AB_2=\pi.$$

综上所述，得高斯积分

$$u(x,y)=\oint_{C}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}ds=\begin{cases}0, & \text{点}A\text{在}C\text{外};\\ \pi, & \text{点}A\text{在}C\text{上};\\ 2\pi, & \text{点}A\text{在}C\text{内}.\end{cases}$$

*) 参看Г.М.菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538目.

4330. 采用极坐标系ρ和φ，计算双层的对数位

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}d\psi$$

和

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\,\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}d\psi,$$

式中r为点A（ρ，φ）和动点M（1，ψ）之间的距离，$(\vec{r},\ \vec{n})$为方向$\overrightarrow{AM}=\vec{r}$与从点$O$(0，0）所引的半径$\overrightarrow{OM}=\vec{n}$二者之间的夹角，$m$为自然数．

解 由题意知：

$$\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}$$

$$=\frac{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)\cos\psi+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi-\rho\cos\varphi)^2+(\sin\psi-\rho\sin\varphi)^2}$$

$$=\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}.$$

从而，当$\rho=1$时，$\dfrac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}=\dfrac{1}{2}$．又因$m$为自然数，故此时有

$$K_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi d\psi=0,$$

$$K_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin m\psi d\psi=0.$$

当$\rho<1$时，因为级数（利用2968题的结果）

$$\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\cos n(\psi-\varphi)$$

在[0，2π]上一致收敛，乘$\cos m(\psi-\varphi)$和$\sin m(\psi-\varphi)$以后在[0，2π]上也一致收敛，故可逐项积分．于是

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\int_0^{2\pi}[\cos m(\psi-\varphi)\cos m\varphi-\sin m(\psi-\varphi)\sin m\varphi]$$

$$\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho^n\cos n(\psi-\varphi)\right]d\psi$$

$$=\cos m\varphi\int_0^{2\pi}\cos m(\psi-\varphi)\rho^m\cos m(\psi-\varphi)d\psi$$

$$=\rho^m\cos m\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2 m(\psi-\varphi)d\psi$$

$$=\pi\rho^m\cos m\varphi.$$

同理，容易求得

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\,\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\pi\rho^m\sin m\varphi.$$

当$\rho>1$时，我们有

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{[1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)]+(1-\rho^2)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos m\psi$$

$$\cdot\frac{(1-r^2)+[1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)]}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\int_0^{2\pi}\cos m\psi\,\frac{1-r\cos(\psi-\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\pi r^m\cos m\varphi=-\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi,$$

其中$r=\rho^{-1}<1$.

同理，可求得

$$K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\,\frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi$$

$$=-\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi\ .$$

综上所述，得

$K_1=\pi\rho^m\cos m\varphi, K_2=\pi\rho^m\sin m\varphi$, 当 $\rho<1$,

$K_1=K_2=0$, 当 $\rho=1$,

$K_1=-\dfrac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi, K_2=-\dfrac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi$, 当 $\rho>1$.

4331．若 $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则称可微分两次的函数 $u=u(x,y)$为调和函数．证明：当且仅当

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$$

（式中C为任意封闭围线，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$为沿此围线之外法线的

导函数）时，u是调和函数。

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x),$$

而（参看4324题的推导）

$$\cos(\vec{n},x)=\frac{dy}{ds},\quad \sin(\vec{n},x)=-\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式（注意，题中应假定$u(x, y)$具有连续的二阶偏导数），得

$$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=\iint_S(\varDelta u)dxdy,$$

其中 S 表由封闭围线 C 围成的区域．由此式知：$\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$（对任何封闭围线$C$）当且仅当$\iint_S(\varDelta u)\cdot dxdy=0$（对任何区域 S）．但易知这又相当于$\varDelta u\equiv 0$．事实上，若$\varDelta u\equiv 0$，则对任何S，有$\iint_S(\varDelta u)\cdot dxdy=0$；反之，若对任何$S$，有$\iint_S(\varDelta u)dxdy=0$，则必$\varDelta u\equiv 0$．因为，若不然，在某点$(x_0, y_0)$，$\varDelta u\neq 0$．例如，设在此点，$\varDelta u>0$，则由连续性可知，必存在以$(x_0, y_0)$为中心，半径为$r_0$（充分小）的圆域$S_0$，使在其上每一点，都有$\varDelta u>0$．由

此可知，$\iint\limits_{S_0}(\Delta u)dxdy>0$．矛盾．证毕．

4332．证明：

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$=-\iint\limits_S u\Delta u dxdy+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

式中光滑围线C包围着有界域S．

证 由于

$$\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C u\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]ds$$

$$=\oint_C u\frac{\partial u}{\partial x}dy-u\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$=\iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_S u\Delta u dxdy+\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$

故得

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint\limits_S u\Delta u dxdy$$

$$+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

4333．证明：在有界域S内及其周界C为调和的函数，则此函数单值地由它在围线C上的数值确定（参照习题

4332）．

证 由题意知，我们只要证明：如在有界域S上的两个调和函数u_1和u_2，在其周界C上有相同的数值，则它们在整个域上恒等．这也就是要证明：若调和函数$u=u_1-u_2$在周界C上等于零，则它在整个域上恒为零．事实上，利用4332题的结果，得

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=0.$$

于是，在整个域S上，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

这表明，在S上u为常数．但在周界C上$u=0$，故在域S上$u\equiv0$，即$u_1=u_2$．

4334．证明平面上的格林第二公式

$$\iint\limits_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdy=\oint_C\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}ds,$$

式中光滑的围线C包围着有界域S，$\dfrac{\partial}{\partial n}$为沿$C$的外法线方向的导函数．

证 我们有

$$\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_C v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\vec{n},x)\right]ds$$

$$=\oint_C v\frac{\partial u}{\partial x}dy-v\frac{\partial u}{\partial y}dx.$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\iint_S v\Delta u dxdy.$$

同理，有

$$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\oint_C u\frac{\partial v}{\partial x}dy-u\frac{\partial v}{\partial y}dx$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\iint_S u\Delta v dxdy.$$

于是，

$$\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}ds=\oint_C\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$$

$$=\iint_S v\Delta u dxdy-\iint_S u\Delta v dxdy$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdy.$$

4335. 利用格林第二公式证明，若 $u=u(x,y)$ 是有界闭域 S 内的调和函数，则

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

式中 C 为域 S 的边界，$\vec{n}$ 为围线 C 的外法线方向，(x,y) 为域 S 内的点，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为点

(x,y)与围线C上的动点(ξ,η) 间的距离.

证 先证$v=\ln r$为 $(\xi,\ \eta)$ $((\xi,\eta)\neq(x,y))$ 的调和函数. 事实上, 我们有

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\eta-y}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2}.$$

因此,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0\text{, 即}\Delta v=0\text{.}$$

今以点(x,y) (当$(\xi,\eta)\neq(x,y)$时) 为中心, ρ为半径画一圆C_0, 使此圆包含在围线C内, C_0及C的正向如图8.67所示. 曲线C的法线向外, C_0的法线指向点(x,y). 因此, 在C_0上, 我们有

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=-\frac{1}{\rho}.$$

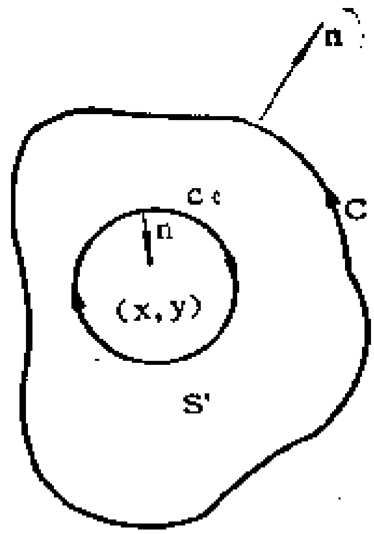

图 8.67

现将格林第二公式应用到由C_0及C所界的域S'上去，即得

$$\iint_{S'}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta \ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix} d\xi d\eta=\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix} ds.$$

由于$\Delta \ln r=0$，$\Delta u=0$，故得

$$\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix} ds=0.$$

将行列式展开，并利用线积分性质，即得

$$\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds$$

$$=-\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds.$$

但由于

$$\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds$$

$$=\oint_{C_0}\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}ds-\oint_{C_0}u\left(-\frac{1}{\rho}\right)ds$$

$$=0\cdot\ln\rho^{*)}+\frac{1}{\rho}\oint_{C_0}u\,ds$$

$$=\frac{1}{\rho}u(\xi',\eta')\oint_{C_0}ds^{**)}=2\pi u(\xi',\eta'),$$

其中$u(\xi',\eta')$为u在圆C_0上某点的值，故得

$$u(\xi',\eta')=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

两端令$\rho\to+0$取极限，并注意到函数u在点(x, y)的连续性，即得

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

*) 利用4331题的结果.

**) 利用第一型曲线积分的中值定理，其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

4336.*) 证明对于调和函数$u(M)=u(x, y)$的中值定理：

$$u(M)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi, \eta)ds,$$

式中C_ρ是以M点为中心ρ为半径的圆周.

证 利用4335题的结果（取C为C_ρ），得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds;$$

但在C_ρ上，有

$$r=\rho,$$

$$\left.\frac{\partial\ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{\partial\ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho},$$

由此，再注意到$\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$（这是利用4331题的结果），得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(\frac{u}{\rho}-\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}uds-\frac{\ln\rho}{2\pi}\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}^{*} u(\xi,\eta)\,ds.$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ，即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

4337. 证明在有界闭域内是调和的且于此域内不为常数的函数 $u(x,y)$ 在此域的内点不能达到其最大或最小值（极大值原则）.

证 设有界闭域为 $\overline{\Omega}$，它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明：如果 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0,y_0)$ 达到其最大值或最小值（例如，设达到最大值），则 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上必为常数. 下分三步证之.

i) 先证：若圆域 $S_\rho=\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2\}$ 完全属于 Ω，则 $u(x,y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何 $0<r\leqslant\rho$，用 C_r 表圆周 $\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\}$. 由4336题的结果可知

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u(\xi,\eta)\,ds,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\,ds=0. \qquad (1)$$

但因 $u(x_0, y_0)$ 为最大值，故在 C_r 上恒有

$$u(x_0, y_0)-u(\xi, \eta)\geqslant 0.$$

由此，根据（1），即易知在 C_r 上 $u(x_0, y_0)-u(\xi, \eta)\equiv 0$. 因为，若有某点 $(\xi_0, \eta_0)\in C_r$ 使 $u(x_0, y_0)$

$-u(\xi_0,\eta_0)=\tau>0$，则由 $u(x,y)$ 的连续性可知，必有以 (ξ_0,η_0) 为中心的某小圆域 σ 存在，使当 $(\xi,\eta)\in\sigma$ 时，恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant\frac{\tau}{2}$. 用 C_r' 表 C_r 含于 σ 内的部分，则

$$\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]ds\geqslant\int_{C_r'}[u(x_0,y_0)$$

$$-u(\xi,\eta)]ds\geqslant\int_{C_r'}\frac{\tau}{2}ds=\frac{1}{2}\tau l_r'>0,$$

其中 l_r' 表圆弧 C_r' 之长，此显然与（1）式矛盾.

于是，在 C_r 上恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$. 再根据 r 的任意性 $(0<r\leqslant\rho)$，即知对任何 $(\xi,\eta)\in S_\rho$，都有 $u(\xi,\eta)=u(x_0,y_0)$. 换句话说，$u(x,y)$ 在 S_ρ 上是常数.

ii) 次证：设 $P^*(x^*,y^*)$ 为 $\overline{\Omega}$ 的任一内点（即 $P^*\in\Omega$），则必 $u(x^*,y^*)=u(x_0,y_0)$.

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0,y_0)$ 与点 $P^*(x^*,y^*)$ 连接起来（图8.68）. 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之

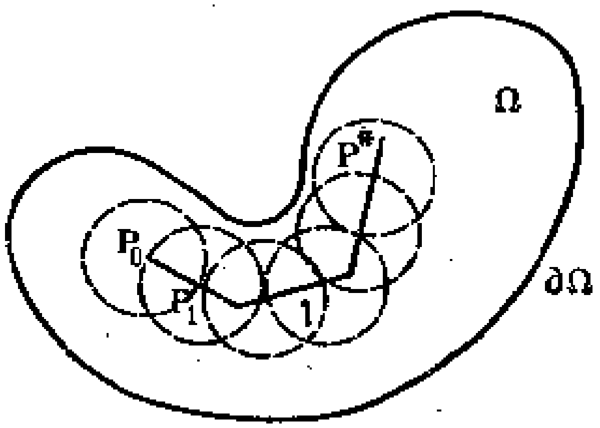

图 8.68

间的距离，即$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$，其中的min是对一切$(x,y)\in\partial\Omega$，$(x',y')\in l$来取的（由于$\partial\Omega$，$l$是互不相交的有界闭集，可证min一定能达到，从而$\delta>0$）。取$0<\delta'<\delta$。以点$P_0$为中心，$\delta'$为半径作一圆，得圆域$S_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta'^2\}$，此圆域完全含于$\Omega$内，由i)段已证的结论知$u(x,y)$在$S_0$中为常数．特别$u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0)$，这里点$P_1(x_1,y_1)$代表圆周$C_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta'^2\}$与折线$l$的交点．又以点$P_1$为中心，$\delta'$为半径作一圆，得圆域$S_1=\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leqslant\delta'^2\}$．由于$u(x,y)$在点$P_1(x_1,y_1)$也达到最大值，而$S_1$完全含于$\Omega$内，故将i)段结果用于$S_1$可知$u(x,y)$在$S_1$上为常数，特别$u(x_2,y_2)=u(x_1,y_1)$，这里点$P_2(x_2,y_2)$表圆周$C_1=\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\delta'^2\}$与$l$的交点（除$P_0$外的另一交点）．再以点$P_2$为中心，$\delta'$为半径作一圆域$S_2$，…，这样继续作下去，显然，至多经过$n$次（$n$表大于$\frac{s}{\delta'}$的最小正整数，$s$表$l$的长），点$P^*(x^*,y^*)$必属于$S_{n-1}$，从而

$$u(x^*,y^*)=u(x_{n-1},y_{n-1})=\cdots=u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0).$$

iii)由ii)段的结果可知，$u(x,y)$在Ω上是常数；根据$u(x,y)$在$\overline{\Omega}$上的连续性，通过由Ω的点趋向$\partial\Omega$的点取极限，即知$u(x,y)$在$\overline{\Omega}$上是常数．证毕．

注：从证明过程中看出，需假定区域Ω（从而$\overline{\Omega}$）

是连通的．事实上，若 Ω 不连通，则结论不一定成立．例如，设 $\overline{\Omega}=S_1+S_2$，其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域，而令

$$u(x,y)=\begin{cases}c_1, & (x,y)\in S_1;\\ c_2, & (x,y)\in S_2,\end{cases}$$

其中 $c_1\neq c_2$ 是两个常数，则显然 $u(x,y)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\overline{\Omega}$ 上不是常数，但它却在其内点达到最大值与最小值．

4338．证明黎曼公式

$$\iint\limits_S\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}dxdy=\oint_C Pdx+Qdy,$$

式中

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,$$

$$M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv$$

（a，b，c为常数），P和Q为某些确定的函数，围线C包围着有界域S．

证 因为

$$\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}=vL[u]-uM[v]$$

$$=v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+av\frac{\partial u}{\partial x}+bv\frac{\partial u}{\partial y}+cuv$$

$$-u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+au\frac{\partial v}{\partial x}+bu\frac{\partial v}{\partial y}-cuv$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+a\frac{\partial}{\partial x}(vu)$$

$$+b\frac{\partial}{\partial y}(uv)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+auv\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-buv\right),$$

故利用格林公式，即得

$$\iint_S\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}dxdy=\oint_C Pdx+Qdy,$$

其中

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x}-buv,\quad Q=v\frac{\partial u}{\partial y}+auv.$$

4339. 设 $u=u(x,y)$和 $v=v(x,y)$ 为液体的速度的分量. 求在单位时间内流过以围线C为界的域 S 的液体的量（即液体流出量与流入量的差）. 若液体不能压缩且在域S 内没有源泉和漏孔，则函数 u 和 v 满足怎样的方程式？

解 设液体的速度为$\vec{W}$，则$\vec{W}=u\vec{i}+v\vec{j}$，又 $d\vec{s}=dx\cdot\vec{i}+dj\vec{j}$. 于是，所求的液体量

$$Q=\oint_C\vec{w}\cdot\vec{n}\,ds=\oint_C[u\cos(\vec{n},x)+v\sin(\vec{n},x)]ds$$

$$=\oint_C udy-vdx\,^{*)}=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中$\vec{n}$ 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量，并且此处已假定流体的面密度等于 1 . 若液体是不可压缩的，

且在域S内无源泉和漏孔，则液体流出量与流入量的差Q应等于零，即

$$\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

又显然，对于任意的围线C，上述结果均正确．于是，连续函数u、v应满足方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

*) 参看4323题的题解．

4340． 根据比奥沙伐耳（Био—Савар）定律通过线元ds的电流i在空间的点$M(x, y, z)$处产生一磁场，其应力为

$$d\vec{H}=ki\frac{(\vec{r}\times d\vec{s})}{r^3},$$

其中$\vec{r}$为连接元素$d\vec{s}$与点M的向量，k为比例系数．对于封闭导线C的情形求磁场$\vec{H}$在点M之应力的射影H_x，H_y，H_z．

解 由题意知：若设导线C上的动点为(ξ, η, ζ)，则

$$\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k}.$$

又$d\vec{s}=d\xi\vec{i}+d\eta\vec{j}+d\zeta\vec{k}$．于是，磁场强度

$$\vec{H}=ki\oint\limits_{C}\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ d\xi & d\eta & d\zeta\end{vmatrix}$$

$$=ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\eta-y)d\zeta-(\zeta-z)d\eta]\vec{i}$$

$$+ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\zeta-z)d\xi-(\xi-x)d\zeta]\vec{j}$$

$$+ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\xi-x)d\eta-(\eta-y)d\xi]\vec{k},$$

从而射影

$$H_x=ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\eta-y)d\zeta-(\zeta-z)d\eta],$$

$$H_y=ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\zeta-z)d\xi-(\xi-x)d\zeta],$$

$$H_z=ki\oint_C \frac{1}{r^3}[(\xi-x)d\eta-(\eta-y)d\xi],$$

§14. 曲面积分

1°**第一型的曲面积分** 若S为逐片光滑的双面曲面

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$
$$((u,v)\in Q),\tag{1}$$

而$f(x,y,z)$为在曲面S上的各点上有定义并且是连续的函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_\Omega f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\cdot\sqrt{EG-F^2}\,dudv,\tag{2}$$

式中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

特别情形，若曲面的方程式的形状为

$$z=z(x,y)\qquad((x,y)\in\sigma),$$

其中 $z(x,y)$ 为单值连续地可微分函数，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_\sigma f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

此积分与曲面S 的方向的选择无关.

若把函数$f(x, y, z)$当作曲面S在点（x, y, z）的密度，则积分（2）是此曲面的质量.

2°第二型的曲面积分　若S为平滑的双面曲面；S^+为它的正面，由法线的方向$\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$所确定的一面，$P=P(x, y, z)$，$Q=Q(x, y, z)$，$R=R(x, y, z)$为在曲面$S$上有定义而且连续的三个函数，则

$$\iint\limits_{S^+}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS. \tag{3}$$

若曲面S 的方程为参数式（1），则法线$\vec{n}$ 的方向余弦

由下列公式来确定：

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中 $A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$， $B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$，

$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且方根前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面S的另一面S^-时，积分（3）的符号变为相反的符号.

4341. 积分

$$I_1=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS$$

和 $$I_2=\iint\limits_P(x^2+y^2+z^2)dP,$$

（式中S为球$x^2+y^2+z^2=a^2$的表面，P为内接于此球的八面体$|x|+|y|+|z|=a$的表面）相差若干？

解 若令

$x=a\sin\varphi\cos\theta$， $y=a\sin\varphi\sin\theta$， $z=a\cos\varphi$，

则有

$$I_1=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi}a^2\cdot a^2\sin\varphi d\theta$$

$=4\pi a^4$.

为求 I_2，只要注意到 $|z|=a-(|x|+|y|)$，并利用对称性，即得

$$I_2=\iint\limits_P (x^2+y^2+z^2)dP=8\int_0^a dx\int_0^{a-x}\sqrt{3}$$
$$\cdot[x^2+y^2+(a-x-y)^2]dy$$
$$=16\sqrt{3}\int_0^a dx\int_0^{a-x}[x^2+y^2+xy+\frac{a^2}{2}$$
$$-a(x+y)]dy$$
$$=16\sqrt{3}\int_0^a[x^2(a-x)-\frac{1}{6}(a-x)^3$$
$$-ax(a-x)+\frac{a^2}{2}(a-x)]dx$$
$$=16\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)a^4$$
$$=2\sqrt{3}a^4.$$

于是，两积分之差

$$I_1-I_2=2(2\pi-\sqrt{3})a^4.$$

4342. 计算

$$\iint\limits_S zdS,$$ 若用极坐标 $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}\sqrt{2}\,r\sin\theta\,r\,dr$

式中 S 为曲面 $x^2+z^2=2az\,(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下的部分。

解 作变换

$$x=ar\sin\theta,\ y=y,\ z=a+ar\cos\theta,$$

则两曲面分别化为

$r=1$，和$y^2=2a^2\cos\theta(1+\cos\theta)$．

两曲面交线的参数方程为

$$x=a\sin\theta,\ y=\pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)},$$

$$z=a+a\cos\theta\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，

$$\iint_S zdS=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{-\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}(a+a\cos\theta)ady$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta$$

$$=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}}{\sin\theta}d(\cos\theta)$$

$$=-4\sqrt{2}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta}\,(1+\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos\theta}}d(\cos\theta)$$

$$=4\sqrt{2}a^3\int_0^1\left[t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]dt$$

$$=4\sqrt{2}a^3\left[B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{7}{2}\sqrt{2}\pi a^3.$$

计算下列第一型曲面积分：

4343．$\iint_S \underbrace{(x+y+z)}_{=0}dS$，式中$S$为曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$．

解　由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

故有

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\cdot\left[x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\right]dy$$

$$=\int_{-a}^{a}(\pi a x+2a\sqrt{a^2-x^2}\,)\,dx$$

$$=4a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4a\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^3.$$

4344. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$，式中$S$为体积$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$的边界.

解 面积S由两部分组成.一部分为S_1:$z=\sqrt{x^2+y^2}$，它在Oxy平面上的射影为$x^2+y^2=1$；另一部分为S_2：$z=1$，它在Oxy平面上的射影也是$x^2+y^2=1$.对于这两部分分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=1.$$

若利用极坐标，则

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \iint_{S_1} (x^2+y^2)\,dS$$

$$+\iint_{S_2} (x^2+y^2)\,dS$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr$$

$$=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}),$$

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$，式中 S 为四面体 $x+y+z\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 的边界.

解 曲面S由四部分组成，分别为S_1：$x+y+z=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$；S_2：$x=0$；S_3：$y=0$；S_4：$z=0$. 于是，我们有

$$\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$+\int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+y)^2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2}$$

$$+\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$+2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+2(1-\ln 2)$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

4346. $\iint\limits_S |xyz|\,dS$，式中S为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部分。

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)},$$

故利用极坐标，并注意对称性，即得

$$\iint\limits_S |xyz|\,dS=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1+4r^2}\,rdr$$

$$=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr=\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t}\,dt \quad {}^{*)}$$

$$=\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{32}(y^2-1)^2y^2\,dy \quad {}^{**)}$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{y^7}{7}-\frac{2y^5}{5}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

*) 作代换 $r^2=t$.

**) 作代换$\sqrt{1+4t}=y$.

4347. $\iint\limits_S \frac{dS}{\rho}$，式中$S$为椭球表面，$\rho$为椭球中心到与椭球表面的元素$dS$相切的平面之间的距离。

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

则曲面上任一点（x，y，z）的法矢量为$\left\{\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right\}$.

从而，由题设知：$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos(\vec{n}, \vec{r})$，其中$\vec{n}$，$\vec{r}$分别表示点（$x$，$y$，$z$）处的法矢量和矢径，即

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

而法线与Oz轴夹角的余弦为

$$\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

于是，

$$\iint_S\frac{dS}{\rho}=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}{|z|}dxdy$$

$$=2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{c\left[\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}dxdy$$

$$=2\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\frac{c}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right.$$

$$+\frac{1}{c^2}-\frac{r^2}{c^2}\Big)abrd\theta \quad ^{*)}$$

$$=2\pi abc\int_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\sqrt{1-r^2}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+2\frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2}\right]rdr \quad ^{**)}$$

$$=-\pi abc\left[2\sqrt{1-r^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{4}{3c^2}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

*) 作广义极坐标变换：$x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$.

**) 利用关系式：$\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\sqrt{1-r^2}$.

√

4348. $\iint\limits_S zdS$，式中S为螺旋面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=v$ $(0<u<a;\ 0<v<2\pi)$ 的一部分。

解 由于

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$=\cos^2 v+\sin^2 v=1,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$
$$=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=1+u^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= -u\sin v\cos v + u\cos v\sin v = 0,$$

故得$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+u^2}$. 于是,

$$\iint_S z\,dS = \int_0^a du\int_0^{2\pi} v\sqrt{1+u^2}\,dv$$

$$= 2\pi^2\int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Big|_0^a$$

$$= \pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})].$$

4349. $\iint_S z^2 dS$, 式中S为圆锥表面的一部分 $x=r\cos\varphi\sin\alpha$, $y=r\sin\varphi\sin\alpha$, $z=r\cos\alpha$ $(0\leqslant r\leqslant a;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 和 α 为常数$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 由于

$$E=\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\sin^2\varphi\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$G=r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha+r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha=r^2\sin^2\alpha,$$

$$F=(\cos\varphi\sin\alpha)(-r\sin\varphi\sin\alpha)+\sin\varphi\sin\alpha\cdot(r\cos\varphi\sin\alpha)=0,$$

故得$\sqrt{EG-F^2}=r\sin\alpha$. 于是,

$$\iint_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\cos^2\alpha\cdot r\sin\alpha\,dr$$

$$= \frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

4350. $\iint_S (xy+yz+zx)dS$, 式中S为圆锥曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$

被曲面$x^2+y^2=2ax$所割下的部分。

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$
$$=\sqrt{2},$$

又曲面S在Oxy平面上的射影域为$x^2+y^2\leqslant 2ax$。于是，利用极坐标，即得

$$\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$$
$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}[r^2\cos\varphi\sin\varphi+r^2(\cos\varphi$$
$$+\sin\varphi)]r\,dr$$
$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\cos\varphi\,d\varphi$$
$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

4351. 证明普阿桑公式

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS$$
$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

式中S是球$x^2+y^2+z^2=1$的表面。

证 取新坐标系$Ouvw$，其中原点不变，平面$ax+by+cz=0$即为Ovw面，u轴垂直于该面，则有

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

在新坐标系下，公式左端的积分可写为

$$\iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})dS.$$

显然，球面S的方程为

$$u^2+v^2+w^2=1 \text{ 或 } v^2+w^2=(\sqrt{1-u^2})^2.$$

若表示成参数式，则为

$$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\omega,\quad w=\sqrt{1-u^2}\sin\omega,$$

其中$-1\leqslant u\leqslant 1$，$0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$。从而

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dud\omega$$

$$=\sqrt{\frac{1}{1-u^2}\cdot(1-u^2)-0}\,dud\omega=dud\omega.$$

于是，最后得

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS=\iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,dS$$

$$=\int_0^{2\pi}d\omega\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

4352. 求抛物面壳

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad(0\leqslant z\leqslant 1)$$

的质量，此壳的密度按规律$\rho=z$而变更。

解 质量为

$$M=\iint_S \rho dS=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2} z\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+x^2\leqslant 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\,d(r^2)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}(1+r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.$$

4353. 求密度为 ρ_0 的均匀球壳

$$x^2+y^2+z^2=a^2\quad(z\geqslant 0)$$

对于Oz 轴的转动惯量。

解　转动惯量为

$$I_z=\iint\limits_S(x^2+y^2)\rho_0\,dS$$

$$=\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=a\rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr$$

$$=2\pi a^4\rho_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{4}{3}\pi a^4\rho_0.$$

4354. 求密度为ρ_0的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad (0\leqslant z\leqslant b)$$

对于直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的转动惯量

解 设 (x, y, z) 为均匀锥面壳上的任一点，它到直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$

的距离为

$$|d|=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-0 & z-b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-b & x-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

于是，所求的转动惯量为

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+y^2\right]$$

$$\cdot\rho_0\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\left[\left(\frac{b}{a}r-b\right)^2\right.$$

$$\left.+r^2\sin^2\varphi\right]dr$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a}\left[2\pi a^2b^2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi a^4}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi a\rho_0(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}.$$

4355. 求均匀的曲面

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

被曲面$x^2+y^2=ax$所割下部分的重心的坐标。

解 质量为

$$M=\iint_S\rho_0dS=\sqrt{2}\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\rho_0\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{\sqrt{2}\pi a^2\rho_0}{4}.$$

从而，重心的坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}xdxdy$$

$$=\frac{4}{\pi a^2}\int_0^a xdx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}dy$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,dx$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt\quad{}^{*)}$$

$$=\frac{8}{\pi a}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,dt=\frac{a}{2}.$$

$$y_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\int_0^a dx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}y\,dy=0.$$

$$z_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}z\,dx\,dy$$

$$=\frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2\,dr$$

$$=\frac{8a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{16a}{9\pi},$$

即重心的坐标为$\left(\frac{a}{2},\ 0,\ \frac{16a}{9\pi}\right)$.

*) 作变换$t=x-\frac{a}{2}$.

4356. 求均匀曲面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ x+y\leqslant a)$$

的重心的坐标.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以,

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

由对称性知，重心的横坐标与纵坐标相等，即

$$x_0=y_0=\frac{\iint\limits_S xdS}{\iint\limits_S dS}=\frac{\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy}{\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx}.$$

由于

$$\int_0^a\int_0^{a-y}\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\int_0^a\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=a-y}dy$$

$$=a\left[\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy-\int_0^a\sqrt{2ay-2y^2}\,dy\right]$$

$$=a\left[\frac{\pi a^2}{4}-\sqrt{2}\cdot\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}\right]^{*)}$$

$$=\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx$$

$$=a\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$$

$$=-4a^2\int_1^0\frac{u}{(1+u^2)^2}\arcsin u\,du$$

$$=2a^2\left(\frac{\arcsin u}{1+u^2}\Big|_1^0-\int_1^0\frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$$=2a^2\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}\Big|_0^1\right)^{**)}$$

$$=\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right),$$

故有

$$x_0=y_0=\frac{\frac{\pi a^3}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

又由于

$$\iint_S z\,dS=\int_0^a\int_0^{a-x}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\,dx$$

$$=a\int_0^a(a-x)dx=\frac{a^3}{2},$$

故有

$$z_0=\frac{\iint_S z\,dS}{\iint_S dS}=\frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1),$$

即重心的坐标为$\left(\frac{a}{2\sqrt{2}},\ \frac{a}{2\sqrt{2}},\ \frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)\right)$.

*) 由定积分的几何意义知：

$$\int_0^a\sqrt{y(a-y)}\,dy=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}\,dy$$

$$=\frac{\pi a^2}{8}.$$

**) 利用1937题的结果.

4357. 密度为 ρ_0 的均匀截圆锥面

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$
$$0<b\leqslant r\leqslant a)$$

以怎样的力吸引质量为m位于该曲面顶点的质点?

解 显然曲面顶点为原点$O(0,0,0)$. 对应于半径r处取斜高为ds的锥面带,其面积为

$$dS=2\pi r ds=2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点O处质量为m的质点的引力在Ox轴和Oy轴上的射影显见为零,而在Oz轴上的射影为

$$dZ=\frac{km\cdot 2\sqrt{2}\pi r dr\rho_0}{r^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{k\pi m\rho_0 dr}{r}.$$

于是,截圆锥面吸引质量为m的质点(在顶点处)的引力在坐标轴上的射影分别为

$$X=0,\ Y=0,$$

$$Z=\int_b^a\frac{k\pi m\rho_0 dr}{r}=k\pi m\rho_0\ln\frac{a}{b}.$$

4358. 求在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的密度为ρ_0的均匀球壳$x^2+y^2+z^2=a^2$的位,即:计算积分

$$u=\iint\limits_S\frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

解 记$r_0=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}$. 由对称性知，在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的位，等于在点$N_0(0, 0, r_0)$的位. 由余弦定理知，球面上任一点$(x, y, z)$到点$N_0$的距离

$r=\sqrt{a^2+r_0{}^2-2r_0a\cos\psi}$ $(0\leqslant\psi\leqslant\pi)$,

而球面带$dS=2\pi a^2\sin\psi d\psi$. 于是，所求的位为

$$u=\iint\limits_S\frac{\rho_0 dS}{r}=2\pi a^2\rho_0\int_0^\pi\frac{\sin\psi d\psi}{\sqrt{a^2+r_0{}^2-2r_0a\cos\psi}}.$$

令$u^2=a^2+r_0{}^2-2r_0a\cos\psi$，则

$$2udu=2r_0a\sin\psi d\psi,$$

即

$$\sin\psi d\psi=\frac{u}{r_0a}du.$$

从而，所求的位为

$$u=\frac{2\pi a\rho_0}{r_0}\int_{|a-r_0|}^{a+r_0}du$$

$$=\begin{cases}4\pi a\rho_0, & 当r_0<a,\\ \dfrac{4\pi a^2\rho_0}{r_0}, & 当r_0>a,\\ 4\pi a\rho_0, & 当r_0=a.\end{cases}$$

也即

$$u=4\pi\rho_0\min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right).$$

上述结果表明：若M_0点在球壳内，则位是个常量；

若 M_0 在球壳外，则在该点球壳的位等于将球壳质量集中于球心的位；当 M_0 点从球壳内通过球面时位具有连续性，从而当 M_0 点在球面上时，位也是个常量，且等于球内任一点的位。

4359. 计算

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,\ y,\ z)dS,$$

式中

$$f(x,\ y,\ z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 若 x^2+y^2+z^2\leqslant 1;\\ 0, & 若 x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

作出函数 $u=F(t)$ 的图形。

解 显然，平面

$$x+y+z=\pm\sqrt{3}$$

是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的两个切平面，于是，

$$f(x,\ y,\ z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & 若 |t|\leqslant\sqrt{3},\\ 0 & 若 |t|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

由方程组

$$\begin{cases}x+y+z=t,\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

得椭圆方程

$$x^2+y^2+[t-(x+y)]^2=1,$$

或

$$x^2+y^2+xy-t(x+y)=\frac{1-t^2}{2}, \tag{1}$$

记该椭圆围成的区域为 Ω，则

$$F(t)=\iint\limits_{\Omega}\{1-x^2-y^2-[t-(x+y)]^2\}\sqrt{3}\,dxdy$$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega}[1-t^2-2(x^2+y^2)-2xy$$

$$+2t(x+y)]dxdy.$$

作平移变换

$$x=x'+\frac{t}{3},\quad y=y'+\frac{t}{3},$$

则方程（1）变为

$$x'^2+y'^2+x'y'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right), \tag{2}$$

记相应的区域为Ω'，而函数为

$$f=1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)-2x'y'.$$

于是，

$$F(t)=\sqrt{3}\iint\limits_{\Omega'}[1-\frac{t^2}{3}-2(x'^2+y'^2)$$

$$-2x'y']dx'dy'.$$

再作旋转变换

$$x'=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}},\quad y'=\frac{x''+y''}{\sqrt{2}},$$

则方程（2）变为椭圆的标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}+\frac{y''^2}{\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right)^2}=1. \tag{3}$$

记相应的区域为Ω''，而函数为

$$f=1-\frac{t^2}{3}-(3x''^2+y''^2).$$

于是，

$$F(t)=\sqrt{3}\iint_{\Omega''}\left[1-\frac{t^2}{3}-(3x''^2+y''^2)\right]dx''dy''.$$

最后，作广义的极坐标变换，即

$$x''=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\cos\varphi,$$

$$y''=\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}r\sin\varphi,$$

则有

$$F(t)=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-\frac{t^2}{3}\right)(r-r^3)drd\varphi$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\varphi=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2,$$

其中$|t|\leqslant\sqrt{3}$，而当$|t|>\sqrt{3}$，则有

$$F(t)=0.$$

考虑函数$u=F(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$. 我们有

$$\frac{du}{dt}=-\frac{2\pi}{9}(3-t^2)t \qquad (|t|<\sqrt{3}).$$

当$t=\sqrt{3}$时，u的左导数$=-\frac{2\pi}{9}(3-t^2)\Big|_{t=\sqrt{3}}=0$，$u$的右导数显然为零（因为$t\geqslant\sqrt{3}$时，$u=0$），故$t=\sqrt{3}$时$u$的导数存在且等于零. 同理可证，$t=-\sqrt{3}$时，$u$的导数也存在且等于零. 于是，曲线$u=F(t)$在$t=0$处以及$|t|\geqslant\sqrt{3}$的各$t$处切线都平行于$Ot$轴. 又$t=0$处达极大值$u=\frac{\pi}{2}$，且为最大值.

由于

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{2\pi}{3}(1-t^2),$$

所以当$t=\pm 1$时为拐点．显然，图形关于Ou轴是对称的．函数$u=F(t)$的图形，如图8.69所示．

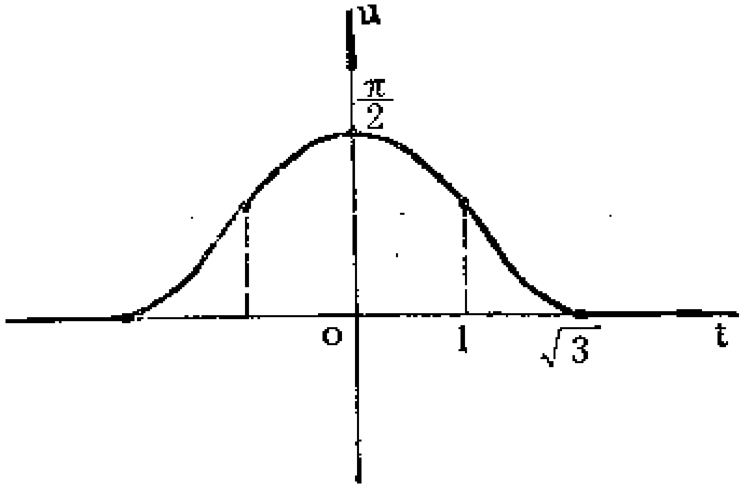

图 8.69

4360．计算积分

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z)dS,$$

式中

$$f(x, y, z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{若 } z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}; \\ 0, & \text{若 } z<\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

解 由球面方程$x^2+y^2+z^2=t^2$知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}},$$

而由

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=t^2,\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$$

可得

$$x^2+y^2=\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是，积分

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,\ y,\ z)dS$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}(x^2+y^2)$$

$$\cdot\frac{|t|}{\sqrt{t^2-(x^2+y^2)}}dxdy$$

$$=|t|\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\varphi.$$

因为

$$\int\frac{r^3}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-r^2-t^2}{\sqrt{t^2-r^2}}d(t^2-r^2)$$

$$=\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-t^2\sqrt{t^2-r^2}+C,$$

所以

$$\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=\Big[\frac{1}{3}(t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$-t^2\sqrt{t^2-r^2}\Big]\Big|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{-5\sqrt{2}}{12}|t|^3+\frac{2}{3}|t|^3$$

$$=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3.$$

于是，最后得

$$F(t)=|t|\int_0^{2\pi}\frac{8-5\sqrt{2}}{12}|t|^3d\varphi$$

$$=\frac{(8-5\sqrt{2})\pi}{6}t^4.$$

4361. 计算积分

$$F(x,\ y,\ z,\ t)=\iint\limits_S f(\xi,\ \eta,\ \zeta)dS,$$

其中S是变球

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2,$$

且假定$\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$,

$$f(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\begin{cases}1, & 若\xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2;\\ 0, & 若\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2.\end{cases}$$

解 记$x^2+y^2+z^2=r^2$. 旋转坐标轴，使点$P(x,\ y,\ z)$位于Oy轴的正方向上的点$P_0(0,\ 0,\ r)$，如

图8.70所示。

显然，当 $0<t\leqslant r-a$ 及 $t\geqslant r+a$ 时，整个球面上的点满足 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2$，此时 $f(\xi,\eta,\zeta)=0$。从而，积分

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_S f(\xi,\eta,\zeta)dS=0.$$

当 $r-a<t<r+a$ 时，则

$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_{S'}dS',$$

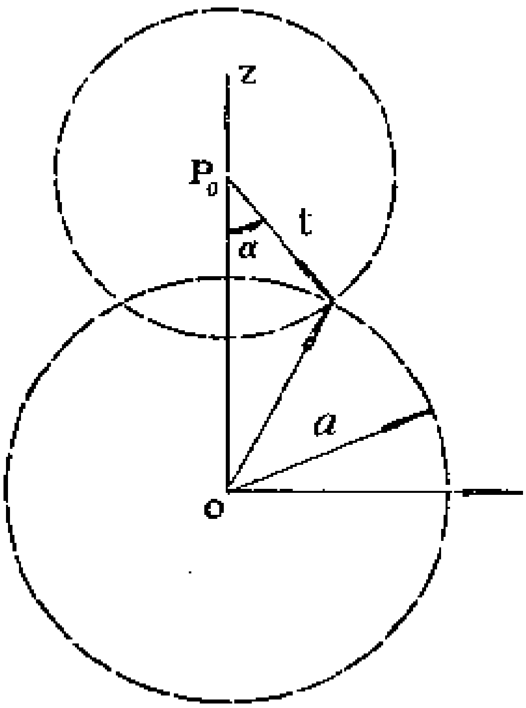

图 8.70

其中 S' 为 S 位于 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$ 内的部分．从而，我们有

$$F(x,y,z,t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}t^2\sin\theta d\theta$$
$$=2\pi t^2(1-\cos\alpha)$$
$$=2\pi t^2\left(1-\frac{t^2+r^2-a^2}{2rt}\right)$$
$$=\frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2].$$

计算下列第二型曲面积分： 高斯公式

4362．$\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$，式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2$

$=a^2$的外表面.

解 根据轮换对称，只要计算$\iint\limits_S zdxdy$. 注意到上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$应取上侧，下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$应取下侧，则有

$$\iint\limits_S zdxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

于是，积分

$$\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^3.$$

4363. $\iint\limits_S f(x)dydz+g(y)dxdz+h(z)dxdy$，式中$f(x)$，$g(y)$，$h(z)$为连续函数，$S$为平行六面体$0<x<a$；$0<y<b$，$0<z<c$的外表面.

解 只要计算任何一个积分，其它两个可类似地写出结果. 例如，下面计算$\iint\limits_S h(z)dxdy$. 由于六面体有四个面垂直于Oxy平面，故面积分应为零. 从而

$$\iint\limits_S h(z)dxdy=\iint\limits_{\substack{0<x<a\\0<y<a}}h(c)dxdy-\iint\limits_{\substack{0<x<a\\0<y<a}}h(0)dxdy$$

$$=abc\cdot\frac{h(c)-h(0)}{c}.$$

类似地，可得到$\iint\limits_S f(x)dydz$ 及$\iint\limits_S g(y)dxdz$ 的值。于是，所求的积分为

$$\iint\limits_S f(x)dydz+g(y)dxdz+h(z)dxdy$$

$$=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}\right.$$

$$\left.+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

4364. $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$，式中 S为圆锥曲面

$$x^2+y^2=z^2\ \ (0\leqslant z\leqslant h)$$

的外表面。

解 方法一

记 S_1、S_2分别为锥面的底面和侧面，而 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 锥 面外法线的方向余弦．一方面，我们有

$$\iint\limits_{S_1}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h r^2(\cos\varphi-\sin\varphi)dr$$

$$=\frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi=0.$$

另一方面，在侧面S_2上，对于任一点(x, y, z)，有

$$\frac{\cos\alpha}{x}=\frac{\cos\beta}{y}=\frac{\cos\gamma}{-z},$$

从而，dS在各坐标面上的射影分别为

$$\cos\gamma dS=-d\sigma_{xy},$$

$$\cos\alpha dS=-\frac{x}{z}\cos\gamma dS=\frac{x}{z}d\sigma_{xy},$$

$$\cos\beta dS=-\frac{y}{z}\cos\gamma dS=\frac{y}{z}d\sigma_{xy}.$$

于是，

$$\iint\limits_{S_2}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_2}[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\left[\frac{x}{z}(y-z)+\frac{y}{z}(z-x)-(x-y)\right]d\sigma_{xy}$$

$$=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(x-y)dxdy=0.$$

综上所述，我们得

$$\iint\limits_{S}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}=0.$$

方法二

记曲面 S 在各坐标面的射影域分别为 S_{xy}，S_{yz}，和S_{zx}. 于是，

$$\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

$$=\iint_S (y-z)dydz+\iint_S (z-x)dxdz$$

$$+\iint_S (x-y)dxdy$$

$$=\left[\iint_{S_{yz}} (y-z)dydz-\iint_{S_{yz}} (y-z)dydz\right]$$

$$+\left[\iint_{S_{zx}} (z-x)dxdz-\iint_{S_{zx}} (z-x)dxdz\right]$$

$$+\left[\iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy-\iint_{S_{xy}} (x-y)dxdy\right]$$

$$=0+0+0=0$$

4365. $\iint_S \frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$,式中$S$为椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外表面.

解 根据轮换对称，只要计算一个积分．例如，计算 $\iint_S \frac{dxdy}{z}$.利用广义极坐标，即得

$$\iint_S \frac{dxdy}{z}=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$
-\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{-1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy
$$

$$
=\frac{2}{c}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy
$$

$$
=\frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr
$$

$$
=\frac{4\pi ab}{c}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]\Big|_0^1=4\pi\cdot\frac{ab}{c}.
$$

于是，我们有

$$
\iint\limits_S\frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}
$$

$$
=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)
$$

$$
=\frac{4\pi}{abc}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2).
$$

由 Guass 式 $2\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}(x+y+z)dxdydz+2\iiint(a+b+c)dxdydz$ $=0$ $=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$

4366. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$，式中$S$ 为球壳

$$
(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2
$$

的外表面.

解　根据轮换对称，只要计算$\iint\limits_S z^2dxdy$.

注意到

$$
z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},
$$

并利用极坐标，即得

$$\iint_S z^2 dxdy = \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} [c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2 dxdy$$

$$-\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} [c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2 dxdy$$

$$=4c\iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dxdy$$

$$=4c\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,rdr$$

$$=8\pi c\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R=\frac{8}{3}\pi R^3 c.$$

于是，我们有

$$\iint_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$$

$$=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x, y, z)$，$Q=Q(x, y, z)$，$R=R(x, y, z)$为连续可微分的函数，C为包围逐片光滑的有界双面曲面S的简单封闭逐段光滑的围线，则有斯托克斯公式：

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

式中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为曲面S的法线的方向余弦，此法线的方向是这样的，围线C环绕着它依反时针方向（对于右旋坐标系）而回转。

4367．应用斯托克斯公式，计算曲线积分

$$\oint_C ydx+zdy+xdz,$$

式中C为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，若从Ox轴的正向看去，这圆周是依反时针方向进行的。

用直接计算法检验结果。

解 平面$x+y+z=0$的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是，

$$\oint_C ydx+zdy+xdz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS.$$

$$=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS$$

$$=-\pi a^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

下面用直接计算法检验结果．由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x+y+z=0$$

消去z，即得曲线C在Oxy平面上的射影

$$x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}.$$

作旋转变换

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

则方程化为

$$3x'^2+y'^2=a^2.$$

因而，曲线C的参数方程可取为

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right),$$

$$y=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right),$$

$$z=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

于是，曲线积分为

$$\oint_C ydx+zdy+xdz$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right)\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)\right.$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right)$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)\Big]dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}(-\sqrt{3})\cdot 2\pi=-\sqrt{3}\pi a^2 .$$

可见，两种计算法结果一样.

4368. 计算积分

$$\int_{AmB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz,$$

此积分是从点A $(a, 0, 0)$ 至点 B $(a, 0, h)$ 沿着螺线

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

上所取的.

解 连接A, B两点得线段 AB，它与 AmB 组成封闭曲线并依正向进行，则由斯托克斯公式知：

$$\oint_{AmBA}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\iint_S 0\,dydz+0\,dxdz+0\,dxdy=0 .$$

于是，

$$\int_{AmB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_{AB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_0^h z^2dz \overset{*)}{=} \frac{h^3}{3}.$$

*) 在线段 AB 上，$x=a$，$y=0$，$dx=dy=0$，而 $0\leqslant z\leqslant h$.

4369. 设 C 为位于平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$（$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦）上并包围面积为S 的封闭围线，求

$$\oint_C\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中围线C是依正方向进行的.

解 若记

$$P=\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ y & z \end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma,$$

$$Q=\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x \end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha,$$

$$R=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ x & y \end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta,$$

则得

$$\oint_C\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}=\oint_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$
=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}
$$

$$
=2\iint_S(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS
$$

$$
=2\iint_S dS=2S.
$$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
单位法向量

应用斯托克斯公式，计算积分：

4370. $\oint_C(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，式中 C 为依参数 t 增大的方向通过的椭圆 $x=a\sin^2t$，$y=2a\sin t\cdot\cos t$，$z=a\cos^2t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 $\oint_C(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$

$$
=\iint_S 0\,dydz+0\,dxdz+0\,dxdy=0.
$$

4371. $\oint_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，式中 C 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$，若从 Ox 轴正向看去，此椭圆是依反时针方向进行的。

解 椭圆如图8.71所示．把平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$上$C$所包围的区域记为$S$，则$S$的法线方向为$\{h,\ 0,\ a\}$．注意到$S$的法线方向和曲线$C$的方向是正向联系的，即得

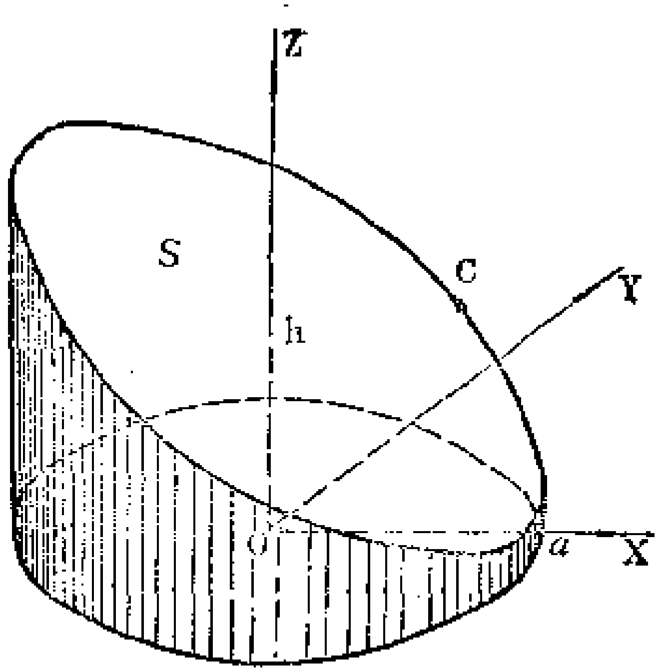

图 8.71

$$\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=-2\iint_S dydz+dxdz+dxdy$$

$$=-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\iint_S dS$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+b^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$$
$$\cdot\pi a\sqrt{a^2+h^2}$$

$$=-2\pi a(a+h).$$

4372. $\oint_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$，式中 C是曲线$x^2+y^2+z^2=2Rx$，$x^2+y^2=2rx(0<r<R$, $z>0)$，此曲线是如下进行的：由它所包围在球x^2+

$y^2+z^2=2Rx$外表面上的最小区域保持在左方.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\quad \cos\beta=\frac{y}{R},\quad \cos\gamma=\frac{z}{R},$$

即得

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\iint_S [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta$$

$$+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=2\iint_S \left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}\right.$$

$$\left.+(x-y)\frac{z}{R}\right]dS$$

$$=2\iint_S (z-y)dS.$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称，故$\iint_S ydS=0$.

又

$$\iint_S zdS=\iint_S R\cos\gamma dS=R\cdot\pi r^2,$$

于是，

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\pi Rr^2.$$

4373. $\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中

C为用平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$切立方体$0<x<a$，$0<y<a$，$0<z<a$的表面所得的切痕．若从Ox轴的正向看去，是依反时针前进的方向的．

解 平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$含于立方体内的部分记为S，它在Oxy平面上的射影域记为S_{xy}，其面积显然等于$\frac{3}{4}a^2$．当平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$取上侧时，法线方向的单位矢量为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$．于是，由斯托克斯公式知

$$\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S\left[(-2y-2z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2z-2x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}}\right]dS$$

$$=-4\iint_S \overbrace{(x+y+z)}^{=\frac{3a}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}dS$$

$$=-6a\iint_S\frac{1}{\sqrt{3}}dS=-6a\iint_{S_{xy}}dxdy$$

$$=-6a\cdot\frac{3}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

未算

4374．$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$，式中$C$为依参数$t$增

大的方向进行的封闭曲线 $x=c\cos t$，$y=a\cos 2t$，$z=a\cos 3t$.

解 取S为由参数方程

$$x=u\cos t,\quad y=u\cos 2t,\quad z=u\cos 3t$$
$$(0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

表示的曲面，则所给曲线C为曲面S的边界。

于是，根据斯托克斯公式，有

$$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$$

$$=2\iint_S x^2(y-z)dydz+y^2(z-x)dzdx$$
$$+z^2(x-y)dxdy$$

$$=\pm 2\int_0^{2\pi}\int_0^a[u^2\cos^2t(u\cos 2t-u\cos 3t)$$
$$(y_u'z_t'-y_t'z_u')+u^2\cos^2 2t(u\cos 3t-u\cos t)$$
$$\cdot(z_u'x_t'-z_t'x_u')+u^2\cos^2 3t(u\cos t-u\cos 2t)$$
$$\cdot(x_u'y_t'-x_t'y_u')]dudt$$

$$=\pm 2\int_0^a u^4du\int_0^{2\pi}[\cos^2t(\cos 2t-\cos 3t)$$
$$\cdot(2\sin 2t\cos 3t-3\cos 2t\sin 3t)+\cos^2 2t(\cos 3t-\cos t)$$
$$\cdot(3\sin 3t\cos t-\sin t\cos 3t)+\cos^2 3t(\cos t-\cos 2t)$$
$$\cdot(\sin t\cos 2t-2\sin 2t\cos t)]dt$$

$$=\pm\frac{2}{5}a^5\int_{-\pi}^{\pi}[\cos^2t(\cos 2t-\cos 3t)(2\sin 2t\cos 3t$$
$$-3\cos 2t\sin 3t)+\cos^2 2t(\cos 3t-\cos t)$$
$$\cdot(3\sin 3t\cos t-\sin t\cos 3t)+\cos^2 3t(\cos t-\cos 2t)$$

$\cdot(\sin t\cos 2t-2\sin 2t\cos t)]dt=0,$

上式中正负号应这样选取，使得S的侧正好配合C的方向（t增大的方向），积分$\int_0^{2\pi}$可以换为$\int_{-\pi}^{\pi}$是因为被积函数（t的函数）是周期为2π的函数，而$\int_{-\pi}^{\pi}$等于零是因为被积函数为奇函数。

注：本题若不用斯托克斯公式，而直接计算线积分，则较为简单：

$$\oint_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$$

$$=-\int_0^{2\pi}a^5(\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t+2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)dt$$

$$=-\int_{-\pi}^{\pi}a^5(\cos^2 2t\cos^2 3t\sin t+2\cos^2 t\cos^2 3t\sin 2t$$

$$+3\cos^2 t\cos^2 2t\sin 3t)dt$$

$$=0,$$

$\int_0^{2\pi}$可换为$\int_{-\pi}^{\pi}$及$\int_{-\pi}^{\pi}=0$的理由同上。

4375．有函数

$$W(x,y,z)=ki\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS\ （k=常数）,$$

其中S为由围线C所界的面积，$\vec{n}$为曲面S的法线，$\vec{r}$为连接空间的点$M(x,y,z)$与曲面S上的动点$A(\xi,\eta,\zeta)$所成之矢径，证明此函数为通过围线C

的电流 i 所产生磁场$\vec{H}$的位势（参阅4340题）.

证 利用4340题指出的定律，并注意到

$$\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k},$$

其中$\vec{r}=(\xi-x)\vec{i}+(\eta-y)\vec{j}+(\zeta-z)\vec{k}$，即得

$$\vec{H}=ki\oint_c\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{r^3}$$

$$=ki\left[\left(\oint_c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta\right)\vec{i}\right.$$

$$+\left(\oint_c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta\right)\vec{j}$$

$$\left.+\left(\oint_c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi\right)\vec{k}\right].$$

利用斯托克斯公式，并注意到

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi},\quad\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta}$$

及$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$，从而

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

即得

$$H_x=ki\oint_c \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta$$

$$=ki\iint_S\left[\left(\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta\partial y}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial z}\right)\vec{i}-\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial y}\vec{j}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi\partial z}\vec{k}\right]\cdot\vec{n}dS$$

$$=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\vec{n}dS$$

$$=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2}dS=ki\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS.$$

同理，

$$H_y=ki\frac{\partial}{\partial y}\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,$$

$$H_z=ki\frac{\partial}{\partial z}\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS.$$

于是，最后得

$$\vec{H}=\frac{\partial W}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial W}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial W}{\partial z}\vec{k},$$

即函数$W(x,\ y,\ z)$是磁场$\vec{H}$的位势。

§16. 奥斯特洛格拉德斯基公式

若 S 为包含体积 V 的逐片光滑曲面，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 和它们的一阶偏导函数均为域 $V+S$ 内的连续函数，则奥斯特洛格拉德斯基公式真确：

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

$dxdydz$，式中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

应用奥斯特洛格拉德斯基公式以变换下列曲面积分，设光滑的曲面 S 包围着有界的体积 V，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

4376. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$.

解 由于 $P=x^3$，$Q=y^3$，$R=z^3$，从而

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2).$$

于是，

$$\iint\limits_S x^3dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$$

$$=3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

4377. $\iint\limits_S xydxdy+xzdxdz+yzdydz$.

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

故得

$$\iint_S xydxdy+xzdxdz+yzdydz$$

$$=\iiint_V 0\,dxdydz=0.$$

4378. $\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$.

解 由于

$$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad Q=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$R=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

于是，

$$\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$$

$$=2\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

4379. $\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$.

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

故得

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\iiint_V \Delta u dxdydz.$$

4380. $\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right.$

$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$

解 记

$$P^*=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ Q^*=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$R^*=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

则易知:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x}+\frac{\partial Q^*}{\partial y}+\frac{\partial R^*}{\partial z}=0.$$

于是，原面积分等于零.

4381. 证明：若 S 为封闭的简单曲面而 $\vec{l}$ 为任何的固定方向，则

$$\iint_S\cos(\vec{n},\ \vec{l})dS=0,$$

式中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线。

证 因为

$$\cos(\vec{n},\vec{l})=\cos\alpha\cos(\vec{l},x)+\cos\beta\cos(\vec{l},y)$$
$$+\cos\gamma\cos(\vec{l},z),$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦，故有

$$\iint_S\cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iint_S\cos(\vec{l},x)dydz$$
$$+\cos(\vec{l},y)dxdz+\cos(\vec{l},z)dxdy.$$

由于 $\vec{l}$ 为固定方向，从而 $\cos(\vec{l},x)$，$\cos(\vec{l},y)$，$\cos(\vec{l},z)$ 均为常数。于是，

$$\iint_S\cos(\vec{n},\vec{l})dS=\iiint_V\Big[\frac{\partial\cos(\vec{l},x)}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial\cos(\vec{l},y)}{\partial y}+\frac{\partial\cos(\vec{l},z)}{\partial z}\Big]dxdydz$$
$$=\iiint_V 0\,dxdydz=0.$$

4382．证明：由曲面 S 所包围的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,$$

式中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

证 由奥氏公式，有

$$\iint_S(x\cos d+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint_V 3\,dx\,dy\,dz=3V,$$

由此可知

$$V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS.$$

证毕.

4383. 证明，由平滑的圆锥曲面 $F(x,y,z)=0$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所包围的锥体体积等于

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

式中 S 为位于已知平面上的锥底之面积，H 为锥的高.

证 方法一

不失一般性，设坐标原点位于圆锥曲面 $F(x,y,z)=0$ 的顶点. 于是 $F(x,y,z)$ 是 x，y，z 的二次齐次函数. 因此，根据尤拉定理知

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=2F(x,y,z). \qquad (1)$$

由 4382 题的结果，有

$$V=\frac{1}{3}\iint_{S+S_1}(\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$+\frac{1}{3}\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS, \qquad (2)$$

其中 S 为锥底（位于平面 $Ax+By+Cz+D=0$上），而 S_1 是圆锥的侧面. 在锥面 S_1（即 $F(x, y, z)=0$）上，有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\beta=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

于是，注意到（1）式，即知在 S_1 上有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}$$

$$=\frac{2F(x,y,z)}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=0,$$

从而

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=0. \qquad (3)$$

又在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上，有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\vec{r}\cdot\vec{n}=H,$$

其中 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 是从原点（0，0，0）到点（x，y,z）的矢径，$\vec{n}$ 为平面（锥底）的外法线单位向量，H为从原点到平面的距离（即锥的高）.于是，

$$\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS$$

$$= H\iint_S dS = HS.$$

由此，再注意到（2）式与（3）式，即得$V=\frac{1}{3}SH$。

方法二

取坐标系$Ox'y'z'$，使圆锥的顶点在坐标原点，$Ox'y'$平面平行于圆锥的底面，由于在z处的圆锥的截面面积

$$S(z')=\frac{Sz'^2}{H^2},$$

故所求的体积为

$$V=\int_0^H S(z')\,dz'$$

$$=\int_0^H \frac{S}{H^2} z'^2 dz' = \frac{1}{3}SH.$$

4384. 求由曲面，$z=\pm c$及

$x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v$,

$y=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v$,

$z=c\sin u$

所界物体的体积。

解 方法一

我们有

$$x^2+y^2=a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u, \qquad (1)$$

以 $z=c\sin u$ 代入得

$$x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2=a^2, \qquad (2)$$

故所界物体由平面 $z=c$，$z=-c$ 及曲面（2）围成．利用4382题的结果，即知所求的体积为

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{S_1+S_2+S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS, \qquad (3)$$

其中 S_1，S_2 分别是平面 $z=c$，$z=-c$ 上的部分（此时$u=\frac{\pi}{2}$，$u=-\frac{\pi}{2}$，从而 $x^2+y^2=b^2$，故 S_1，S_2为圆盘 $x^2+y^2\leqslant b^2$），S_3表曲面（2）的部分，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 表外法线的方向余弦．显然，在S_1上，

$\cos\alpha=\cos\beta=0$，$\cos\gamma=\frac{c}{|c|}$，于是，

$$\iint\limits_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS=\iint\limits_{S_1}\frac{c^2}{|c|}dS$$
$$=|c|\pi b^2.$$

同理可得

$$\iint\limits_{S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=|c|\pi b^2.$$

此外

$$\iint\limits_{S_3}(x\cos d+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{S_3} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

$$=\pm\int_0^{2\pi} dv\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(a\cos u\cos v+b\sin u\sin v)$$

$$\cdot(y'_u z'_v-y'_v z'_u)$$

$$+(a\cos u\sin v-b\sin u\cos v)(z'_u x'_v-z'_v x'_u)$$

$$+c\sin u(x'_u y'_v-x'_v y'_u)]du$$

$$=\pm\int_0^{2\pi} dv\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ca^2\cos u\,du=\pm 4\pi ca^2, \qquad (4)$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_3 的外侧．下面确定此正负号．由（2），S_3的方程可写为$F(x, y, z)=a^2$,其中 $F(x,y,z)=x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2$ 是二次齐次函数．于是，在 S_3上，有

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\beta=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

其中正号对应于 S_3 的一侧，负号对应于 S_3 的另一侧．于是，根据齐次函数的尤拉定理，在 S_3(外侧)上有

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

$$=\frac{xF'_x+yF'_y+zF'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}=\frac{2F}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}$$

$$=\frac{2a^2}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}. \qquad (5)$$

但在 S_3 与 Oxy 平面的交线（即 $x^2+y^2=a^2$，$z=0$）的各点上，对 S_3 的外侧，显然有（注意到曲面（2）关于 Oxy 坐标平面对称）

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\vec{r}\cdot\vec{n}>0,$$

（这是因为此时向径 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 与外法线单位向量 $\vec{n}$ 的方向一致），由此可知，在（5）式中应取正号，于是

$$\iint_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{S}\frac{2a^2}{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}dS>0.$$

从而，由（4）式知

$$\iint_{S_3}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=4\pi|c|a^2.$$

综上所述，最后得（注意（3）式）

$$V=\frac{1}{3}(4\pi|c|a^2+|c|\pi b^2+|c|\pi b^2)$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|.$$

方法二

不用面积分求体积的公式（3），而直接计算体积较为简单. 由（1）式知，平面 $z=$常数（即$u=$常数）与曲面（2）的截面$S(z)$是圆，故所求的体积为

$$V=\int_{-c}^{c}dz\iint_{S(z)}dxdy=\int_{-c}^{c}S(z)dz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(a^2\cos^2u+b^2\sin^2u)|c|d(\sin u)$$

$$=|c|\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2+(b^2-a^2)\sin^2u]d(\sin u)$$

$$=\pi|c|[2a^2+\frac{2}{3}(b^2-a^2)]$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|.$$

4385. 求由曲面

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=-u+a\cos v\quad (u\geqslant 0)$$

及平面 $x=0$，$z=0$ $(a>0)$ 所界物体的体积.

解 方法一

用 S_1 表物体表面位于平面 $z=0$ 上的那一部分，S_2 为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分，此外，物体表面在平面 $x=0$ 上的那部分显然是一线段 $x=0$，$y=0$，$0\leqslant z\leqslant a$. 于是，利用4382题的结果，即知所求体积为

$$V=\frac{1}{3}\iint_{S_1+S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,\quad(1)$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是向外法线的方向余弦．显然，在 S_1 上，$\cos\alpha=0$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=-1$，$z=0$，故

$$\iint_{S_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=0. \qquad (2)$$

另外，我们有

$$\iint_{S_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{S_2}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\pm\iint_D[u\cos v(y'_u z'_v-y'_v z'_u)+u\sin v(z'_u x'_v-z'_v x'_u)$$
$$+(-u+a\cos v)(x'_u y'_v-x'_v y'_u)]dudv$$

$$=\pm\iint_D[u\cos v(u\cos v-a\sin^2 v)$$
$$+u\sin v(a\sin v\cos v+u\sin v)$$
$$+(-u+a\cos v)u]dudv$$

$$=\pm\iint_D au\cos v dudv=\pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dv\int_0^{a\cos v}au\cos v du$$

$$=\pm\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}a^3\cos^3 v\right)dv=\pm\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(1-\sin^2 v)d(\sin v)$$

$$=\pm a^3\left(\sin v-\frac{\sin^3 v}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pm\frac{2}{3}a^3,$$

其中的正负号应这样选取，使对应于S_2的外侧，D为u,v的变化区域（对应于S_2）。由此，再注意到（1）式与（2）式，即得$V=\pm\frac{2}{9}a^3$。但体积恒为正（$V>0$），故必有$V=\frac{2}{9}a^3$。

方法二

本题若不利用面积分计算体积的公式（1），而直接计算体积，则较为简单（下面Ω表物体在Oxy平面上的投影）：

$$V=\iint_{\Omega} z\,dx\,dy=\iint_{D}(-u+a\cos v)\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv$$

$$=\iint_{D}(-u+a\cos v)u\,du\,dv$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dv\int_{0}^{a\cos v}(-u+a\cos v)u\,du$$

$$=\frac{a^3}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\,dv$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 v)\,d(\sin v)=\frac{2}{9}a^3.$$

4386. 证明公式

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\,dxdydz\right\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\,dS$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}\,dxdydz\quad(t>0).$$

证 证法一

作变量代换$x=tu$，$y=tv$，$z=tw$($t>0$固定)，则（利用奥氏公式）

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{y^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)\,dxdydz\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3 f(tu,tv,tw,t)\,dudvdw\right\}$$

$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left[t^3\left(\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}w+\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right.$$

$$\left.+3t^2 f\right]dudvdw$$

$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\left\{\frac{1}{t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]\right\}dudvdw$$

$$+\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} t^3\frac{\partial f}{\partial t}\,dudvdw$$

$$=\frac{1}{t}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(fx)+\frac{\partial}{\partial y}(fy)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}(fz)\right]dxdydz$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dxdydz$$

$$=\frac{1}{t}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta$$

$$+fz\cos\gamma)dS$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dxdydz\quad(t>0),$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 上向外法线的方向余弦．显然

$$\cos\alpha=\frac{x}{t},\ \cos\beta=\frac{y}{t},\ \cos\gamma=\frac{z}{t},$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}(fx\cos\alpha+fy\cos\beta+fz\cos\gamma)dS$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}f\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{t}dS$$

$$=t\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2}fdS.$$

于是，最后得

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)dxdydz\right\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} fdS$$

$$+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}dxdydz \quad (t>0).$$

证法二

不利用奥氏公式更简单些．采用球坐标，我们有

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,y,z,t)dxdydz\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t\left[\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi,\right.\right.$$

$$\left.\left. r\sin\psi,\ t\ )\ r^2\cos\psi d\psi d\varphi\right]dr\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t\cos\varphi\cos\psi,\ t\sin\varphi\cos\psi,$$

$$t\sin\psi,\ t)t^2\cos\psi\, d\psi d\varphi$$

$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial t}f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi,$$

$$r\sin\psi,\ t)r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t)dS$$

$$+ \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dxdydz.$$

利用奥斯特洛格拉德斯基公式计算下列面积分：

4387. $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$，式中 S 为立方体 $0<x<a$，$0<y<a$，$0<z<a$ 的边界的外表面。

解 $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$

$$= 2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz$$

$$= 6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a zdz = 3a^4.$$

4388. $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$，式中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面。

解 $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$

$$= 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$\neq a^2$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a r^4 \cos\psi dr$$

$$= 6\pi\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi\right)\left(\int_0^a r^4 dr\right) = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

4389. $\iint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz+(z-x+y)$ $\cdot dxdy$，式中 S 为曲面

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$$

的外表面。

解 $\iint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz$

$+(z-x+y)dxdy$

$=\iiint\limits_V 3dxdydz,$

其中 V 为由曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x$ $+y|=1$ 围成的体积．作变换

$$u=x-y+z,\quad v=y-z+x,\quad w=z-x+y,$$

则　　　　除飞友变换

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4,$$

且由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$.*) 于是，所求的积分

$$\iint_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dxdz$$

$$+(z-x+y)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1} 3\cdot\frac{1}{4}dudvdw$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$$

*) 由$|u|+|v|+|w|=1$围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积，其大小等于由平面$u+v+w=1$，$u=0$，$v=0$，$w=0$所围成的四面体体积的8倍，即为$8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{4}{3}$.

4390. 计算

$$\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS,$$

式中S为圆锥曲面$x^2+y^2=z^2$（$0\leqslant z\leqslant h$）的一部分，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为此曲面外法线的方向余弦.

解 并合平面$S_1: z=h$，$x^2+y^2\leqslant h^2$的部分得一立体V，则（利用奥氏公式）

$$\iint\limits_{S+S_1} (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=2\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h r dr\int_r^h [r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]dz$$

$$= 2\pi\int_0^h (rh^2 - r^3)dr = \frac{\pi h^4}{2}.$$

又因

$$\iint_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$= h^2\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} dxdy = \pi h^4,$$

于是，

$$\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$= \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

4391. 证明公式

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS,$$

其中 S 为包围体积 V 的封闭曲面，$\vec{n}$ 为封闭曲面 S 上的动点 (ξ,η,ζ) 处的外法线，而

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\vec{r}$ 为从点 (x,y,z) 到点 (ξ,η,ζ) 的矢径。

证 先设曲面 S 不包围点 (x,y,z)（即点 (x,y,z) 在 V 之外），我们有

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\cos(\vec{r},x)\cos\alpha+\cos(\vec{r},y)\cos\beta+\cos(\vec{r},z)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦．由于

$$\cos(\vec{r},x)=\frac{\xi-x}{r},\quad \cos(\vec{r},y)=\frac{\eta-y}{r},$$

$$\cos(\vec{r},z)=\frac{\zeta-z}{r},$$

故

$$\cos(\vec{r},\vec{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cdot\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

于是，利用奥氏公式，得

$$\iint\limits_S\cos(\vec{r},\vec{n})\,dS=\iint\limits_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cdot\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]d\xi d\eta d\zeta$$

$$=\iiint\limits_V\frac{2}{r}\,d\xi d\eta d\zeta,$$

故

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS.$$

次设曲面 S 包围点 (x, y, z). 这时，不能对 V 应用奥氏公式. 必须用一小区域将点 (x, y, z) 挖掉，即以点 (x, y, z) 为中心，ε 为半径作一开球域 V_ε (ε充分小)，其边界（球面）以 S_ε 表示. 对闭域 $V-V_\varepsilon$ 应用奥氏公式，仿上可得

$$\iint_S \cos(\vec{r},\vec{n})\,dS + \iint_{S_\varepsilon} \cos(\vec{r},\vec{n})dS$$

$$= \iiint_{V-V_\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]d\xi d\eta d\zeta$$

$$= 2\iiint_{V-V_\varepsilon}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.$$

但在 S_ε 上，$\vec{n}$ 的方向与 $\vec{r}$ 的方向相反，故 $\cos(\vec{r},\vec{n}) = -1$. 于是，

$$\iint_{S_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})dS = -4\pi\varepsilon^2.$$

由此可知，在前式中令 $\varepsilon\to+0$ 取极限，即得

$$\iiint\limits_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS.$$

证毕。

4392. 计算高斯积分

$$I(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2} dS,$$

式中 S 为包含体积 V 的简单封闭平滑曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 处的外法线，$\vec{r}$ 为连接点 (x,y,z) 和点 (ξ, η, ζ) 的矢径，

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

研究两种情形：(a) 当曲面 S 不包围点 (x,y,z)；(б) 当曲面 S 包围点 (x,y,z)。

解　设法线 $\vec{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则

$$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \cos(\vec{r},x)\cos\alpha + \cos(\vec{r},y)\cos\beta + \cos(\vec{r}, z)\cos\gamma$$

$$= \frac{\xi-x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta-y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

因此，高斯积分

$$I(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\xi-x}{r^3} d\eta d\zeta + \frac{\eta-y}{r^3} d\zeta d\xi + \frac{\zeta-z}{r^3} d\xi d\eta,$$

这里 $P=\frac{\xi-x}{r^3}$，$Q=\frac{\eta-y}{r^3}$，$R=\frac{\zeta-z}{r^3}$. 于是，

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\eta-y)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \zeta}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(\zeta-z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点 (x, y, z) 处不连续. 因此

(a) 当曲面 S 不包围点 (x, y, z) 时，则

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}+\frac{\partial Q}{\partial \eta}+\frac{\partial R}{\partial \zeta}=0.$$

于是，利用奥氏公式有

$$I(x,y,z)=\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=0.$$

(б) 当曲面 S 包围点 (x, y, z) 时，则我们以点 (x, y, z) 为中心，ε 为半径作一球 V_ε 包围在 S 内，此球面记以 S_ε. 将奥氏公式用于 $V-V_\varepsilon$ 上，即得

$$\iint_{S+S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=0.$$

但因

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=\iint_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)dS=-4\pi,$$

故得

$$I(x,y,z)=\iint\limits_{S}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS=4\pi.$$

4393. 证明：若

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

及 S 为包围有界体积 V 的光滑曲面，则下列公式正确：

(a) $$\iint\limits_{S}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_{V}\Delta u\,dxdydz;$$

(б) $$\iint\limits_{S}u\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

$$=\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

$$+\iiint\limits_{V}u\Delta u\,dxdydz,$$

式中 u 和它的直到二阶的偏导函数是在域 $V+S$ 内连续的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导函数。

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

因此，利用奥氏公式即得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

$$= \iiint_V \Delta u dx dy dz.$$

(6) $$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial u}{\partial z}\right) \right] dx dy dz$$

$$= \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] dx dy dz.$$

4394. 证明空间的格林第二公式

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中体积 V 是由曲面 S 所包围的，$\vec{n}$ 是曲面 S 的外法线方向，而函数 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 为域 $V+S$ 内可微分两次的函数。

证 $$\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS$$

$$=\iint_S\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta\right.$$

$$\left.+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint_V\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right.$$

$$\left.-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint_V\begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix}dxdydz.$$

4395. 函数 $u=u(x,y,z)$ 在某一域内具有直到二阶的连续导函数，若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

则 $u(x, y, z)$ 在这个域内称为调和函数.

证明：若 u 是被平滑曲面 S 所包围的有界闭域 V 内的调和函数，则下列公式是正确的.

(a) $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$;

(б) $\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dxdydz$

$$= \iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

式中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线.

试用公式(б)，证明在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定.

证 (a)由于 $\Delta u = 0$，故利用4393题 (a) 的结果，即得

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_V 0\, dxdydz = 0.$$

(б) 利用4393题 (б) 的结果，即得

$$\iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_V u \cdot 0\, dxdydz$$

$$+ \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dxdydz$$

$$=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz.$$

与 4333 题一样，只要证明：若在界限 S 上调和函数 $u=0$，则它在域 V 上也恒有 $u=0$。事实上，利用本题（б），得

$$\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz=0.$$

因此，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\frac{\partial u}{\partial z}\equiv 0,$$

即在域 V 上 $u\equiv$常数．但在 S 上 $u=0$，故在域 V 上 $u=0$．这就是证明：在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定．

4396．证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 是在由光滑曲面 S 所包围着的有界闭域 V 内的调和函数，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS,$$

式中 $\vec{r}$ 是从域 V 的内面的点 (x,y,z) 引至曲面 S 上的动点 (ξ,η,ζ) 的矢径，而

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\vec{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ,η,ζ) 的外法线向量．

证 在 4394 题中令 $v=\frac{1}{r}$，则当 $(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$ 时，有 $\Delta v=0$．现以点 $P(x,y,z)$ 为中心，ρ 为

半径作一球面S_ρ含于曲面 S 内，再将 4394题应用到由曲面 $S+S_\rho$所包围的体积V 内，即得

$$\iint\limits_{S+S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS=0,$$

或

$$\iint\limits_{S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS$$

$$=-\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

显然，S 上的法线是向外的，而 S_ρ 上的法线是指向球心的，即指向半径减少一方．因此，

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\Bigg|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho^2}.$$

于是，我们有

$$\iint\limits_{S_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{u}{\rho^2}\right)dS=-\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

但

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\frac{1}{\rho}\iint\limits_{S_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0,$$

又利用中值定理，得

$$\iint\limits_{S_\rho}\frac{u}{\rho^2}dS=\frac{1}{\rho^2}u(x',y',z')\cdot 4\pi\rho^2$$

$$=4\pi u(x',y',z'),$$

其中 $u(x',y',z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而

$$u(x',y',z')=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

上式右端与 ρ 无关. 而 $\lim\limits_{\rho\to+0}u(x',y',z')=u(x,y,z)$. 因而, 令 $\rho\to+0$, 即得

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

又由于

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\cos\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos\beta+\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)$$

$$=-\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2},$$

故最后得

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{u\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.$$

4397．证明：若 $u=u(x,y,z)$ 为在以 R 为半径，以点 (x_0, y_0, z_0) 为球心的球 S 内的调和函数，则

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)dS$$

（中值定理）。

证 在球 S 上应用 4396 题的结果，即得

$$u(x_0,y_0,z_0)=\iint_S\left(\frac{u\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{u}{R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)dS^{*)}.$$

*）利用 4395 题的结果，有

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=0.$$

4398．证明，在有界闭域 V 内连续且在其内部是调和的函数 $u=u(x, y, z)$，若它不是常数，则在域内的点函数不能达到最大和最小的值（极大值原则）．

证 证明与 4337 题（平面情形）完全类似．设有界闭域为 $\overline{\Omega}$，它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成．我们要证明：如果 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 达到其最大值或最小值（例如，设达到最大值），则 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上必为常数，下分三步证明：

(1) 先证：若球域 $V_\rho=\{(x, y, z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant\rho^2\}$完全属于$\Omega$，则 $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上必为常数。

对任何的 $0<r\leqslant\rho$，用 S_r 表球面 $\{(x, y, z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2\}$。由4397题的结果知

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}u(x,y,z)dS,$$

故

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]dS=0, \qquad (1)$$

但因 $u(x_0,y_0,z_0)$ 是最大值，故在 S_r 上恒有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\geqslant 0.$$

由此，根据（1），即易知在 S_r 上 $u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\equiv0$. 因为，若有某点 $(x_1,y_1,z_1)\in S_r$ 使

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x_1,y_1,z_1)=\tau>0,$$

则由 $u(x,y,z)$的连续性知，必有以 (x_1,y_1,z_1) 为中心的某小球域 σ 存在，使当 $(x,y,z)\in\sigma$时，恒有

$$u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)\geqslant\frac{\tau}{2}.$$

用 S_r' 表 S_r 含于σ 内的部分，则

$$\iint_{S_r}[u(x_0,y_0,z_0)-u(x,y,z)]dS$$

$$\geqslant \iint\limits_{S'_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS$$

$$\geqslant \iint\limits_{S'_r} \frac{\tau}{2} dS = \frac{1}{2}\tau D_r > 0,$$

其中 D_r 表 S'_r 的面积．此显然与(1) 式矛盾．于是，在 S_r 上有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0 .$$

再根据 r 的任意性（$0 < r \leqslant \rho$），即知对任何 $(x, y, z) \in V_\rho$，都有 $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$；换句话说，$u(x, y, z)$在 V_ρ上是常数．

（2）次证：设$P^*(x^*, y^*, z^*)$ 为 $\overline{\Omega}$ 的任一内点（即 $P^* \in \Omega$），则必有

$$u(x^*, y^*, z^*) = u(x_0, y_0, z_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 P_0 (x_0, y_0, z_0) 与点 P^* (x^*, y^*, z^*) 连接起来．用 δ 表$\partial\Omega$与 l 之间的距离，即

$$\delta = \min \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

其中的 min 是对一切 $(x, y, z) \in \partial\Omega$，$(x', y', z') \in l$ 来取的（由于 $\partial\Omega$，l 是互不相交的有界闭集，可证 min 一定能达到，从而$\delta > 0$）．取 $0 < \delta' < \delta$．以点 P_0为中心，δ' 为半径作一球，得球域 $V'_0 = \{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) \leqslant \delta'^2\}$．此球域完全含于 Ω 内，由（1）段已证的结果知，$u(x, y, z)$ 在 V_0 中为常数．特别是 $u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0)$．这里点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 代表球面 $S_0 = \{(x, y,$

$z) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\delta^2\}$ 与折线 l 的交点（参看 4337 题的图）．又以点 P_1 为中心，δ'为半径作一球，得球域 $V_1=\{(x, y, z) \mid (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 \leqslant \delta'^2\}$．于是，$V_1$ 也完全含于 Ω内．由于 $u(x,y,z)$也在点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 达到最大值，故将（1）段的结果用于 V_1，可知 $u(x, y, z)$在 V_1 上是常数．特别是 $u(x_2,y_2,z_2)=u(x_1, y_1, z_1)$．这里点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$为球面$S_1=\{(x,y,z) \mid (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\delta^2\}$与 l 的交点（除 P_0 外的另一交点）．再以点 P_2 为中心，δ' 为半径作一球域 V_2，…这样继续作下去．显然，至多经过 n 次（n 为大于$\frac{s}{\delta'}$的最小正整数，s 表折线 l 的长），点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 必属于 V_{n-1}．从而

$$u(x^*,y^*,z^*)=u(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})=\cdots$$
$$=u(x_1,y_1,z_1)=u(x_0,y_0,z_0).$$

（3）由（2）段的结果知，$u(x,y,z)$ 在 Ω 上是常数．根据 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的连续性，通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限，即知 $u(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是常数．证毕．

注：从证明过程中看出，需假定区域 Ω（从而$\overline{\Omega}$）是连通的．事实上，若 Ω 不连通，则结论不一定成立．例如，设 $\overline{\Omega}=V_1+V_2$，其中 V_1 与 V_2 是两个互无公共点的闭球域，而令

$$u(x,y,z)=\begin{cases} C_1, & (x, y, z)\in V_1, \\ C_2, & (x, y, z)\in V_2, \end{cases}$$

其中 $C_1 \neq C_2$ 是两个常数，则 $u(x, y, z)$ 显然是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\overline{\Omega}$ 上不是常数，但它却在其内点达到最大值与最小值.

4399. 物体 V 全部浸溺于液体中，从巴斯葛耳定律出发，证明液体的浮力等于物体同体积液体之重而方向垂直向上（阿基米德定律）.

证 将 Oxy 坐标面取在液面上，而 Oz 轴垂直液面向下. 设液体比重为 ρ，浸入液体的物体 V 的表面积为 S. 若对应于面积元素 dS 液体的深度为 z，则在 dS 上所受的压力为 $\rho z dS$. 由于此压力总是垂直于 dS 面的，故压力在各坐标轴上的射影为

$$-\rho z\cos\alpha dS, \quad -\rho z\cos\beta dS, \quad -\rho z\cos\gamma dS.$$

利用奥氏公式，即得作用于物体整个表面的总压力在各坐标轴上的射影

$$P_x = -\rho\iint_S z\cos\alpha dS = -\rho\iiint_V 0 dxdydz = 0,$$

$$P_y = -\rho\iint_S z\cos\beta dS = -\rho\iiint_V 0 dxdydz = 0,$$

$$P_z = -\rho\iint_S z\cos\gamma dS = -\rho\iiint_V dxdydz = -\rho V.$$

因此，压力的主向量即合力，朝着垂直向上的方向，其大小等于被物体排出的液体的重量. 这就是阿基米德定律.

4400. 设 S_t 是变动的球 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$，而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 是连续的，证明函数

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS_t$$

满足波动方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初值条件$u\Big|_{t=0}=0,\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z)$.

证 首先指出，本题应设$f(\xi,\eta,\zeta)$具有连续的二阶偏导函数. 先验证函数u满足初值条件$u|_{t=0}=0$（意即$\lim\limits_{t\to+0}u=0$）及$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z)$（意即$\lim\limits_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,y,z)$）. 今固定$(x,y,z)$. 由连续性知，存在常数$M>0$，使当$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\leqslant 1$时恒有

$$|f(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,\quad |f'_\xi(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,$$
$$|f'_\eta(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M,\quad |f'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant M.$$

当$0<t<1$时，我们有

$$|u(x,y,z,t)|\leqslant\frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t}|f(\xi,\eta,\zeta)|dS_t$$

$$\leqslant\frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t}MdS_t=\frac{1}{4\pi t}\cdot M4\pi t^2$$

$$=Mt,$$

由此可知，$\lim\limits_{t\to+0} u(x,y,z,t)=0$．

又作变量代换 $\xi=x+ut, \eta=y+vt$，$\zeta=z+wt$，则有

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi}\iint_S f(x+ut, y+vt,\ z+wt)$$

$$\cdot t dS, \qquad (1)$$

其中 S 是单位球面 $u^2+v^2+w^2=1$．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial t}\iint_S f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)tdS$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S\Big(\frac{\partial f}{\partial \xi}u+\frac{\partial f}{\partial \eta}v+\frac{\partial f}{\partial \zeta}u\Big)tdS$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)dS$$

$$=I_1+I_2. \qquad (2)$$

显然，当 $0<t<1$ 时，

$$|I_1|\leqslant\frac{t}{4\pi}\iint_S 3MdS=3Mt,$$

故 $\lim\limits_{t\to+0} I_1=0$．又显然（由于连续性）

$$\lim_{t\to+0} I_2=\frac{1}{4\pi}\iint_S f(x,y,z)dS$$

$$=\frac{f(x,y,z)}{4\pi}\iint_S dS=f(x,y,z).$$

因此，得

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,\ y,\ z).$$

下面再验证 u 满足波动方程．由（2）式，利用奥氏公式，有（V 为球体 $u^2+v^2+w^2\leqslant 1$，V_t 为球体 $u_1^2+v_1^2+w_1^2\leqslant t^2$）

$$I_1=\frac{t}{4\pi}\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial\eta}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{t^2}{4\pi}\iiint_V\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)\ dudvdw$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\iiint_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,z+w_1)du_1dv_1dw_1$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\iiint_{V_t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x+u_1,y+v_1,z+w_1)du_1dv_1dw_1$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\iiint_{V_t}f(x+u_1,\ y+v_1,z+w_1)\,du_1dv_1dw_1\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,y+r\cos\psi\sin\varphi,\ z+r\sin\psi)\ r^2\cos\psi\,d\psi d\varphi dr\right)$$

$$=\frac{I_3}{4\pi t},$$

其中$\cos\alpha=u$，$\cos\beta=v$，$\cos\gamma=w$为S的外法线的方向余弦，又由（2）式及（1）式，有

$$I_2=\frac{1}{4\pi t}\iint_S f(x+ut,\ y+vt,\ z+wt)\,t\,dS$$

$$=\frac{u}{t},$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{I_3}{4\pi t}+\frac{u}{t}\quad(t>0).$$

于是，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t}-\frac{I_3}{4\pi t^2}-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t}-\frac{I_3}{4\pi t^2}-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{I_3}{4\pi t}+\frac{u}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I_3}{\partial t}\quad(t>0).\tag{3}$$

但

$$\frac{\partial I_3}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Big(\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,\ y$$

$$+r\cos\psi\sin\varphi,\ z+r\sin\psi)r^2\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr\Big)$$

$$=\Delta\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+r\cos\psi\cos\varphi,\ y$$

$$+r\cos\psi\sin\varphi, z+r\sin\psi)r^2\cos\psi d\psi d\varphi dr\Big]$$

$$=\Delta\left(\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\ (x+t\cos\psi\cos\varphi,\ y\right.$$

$$\left.+t\cos\psi\sin\varphi,\ z+t\sin\psi)t^2\cos\psi d\psi d\varphi\right)$$

$$=\Delta\left(\iint_{S_t} f(\xi,\ \eta,\ \zeta)dS_t\right)$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\Delta\left(\iint_{S_t} f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\ dS_t\right)$$

$$=\Delta\left(\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}\ dS_t\ \right)$$

$$=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ \ (t>0).$$

证毕.

§17. 场论初步

1° 梯度　若 $u(\vec{r})=u(x, y, z)$ (其中 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$) 是连续可微分的数量场, 则称向量

$$\text{grad } u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

为 $u(\vec{r})$的梯度, 或简记为grad $u=\nabla u$, 其中 $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}$

$\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. 于已知点 (x, y, z) 场 u 的梯度的方向是与过此点的等位面 $u(x,y,z)=C$ 的法线方向一致. 对于场的每一点此向量给出函数 u 变化之最大速度的大小

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

与方向.

在某方向 $\vec{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 上场 u 的导数等于

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad} u\cdot\vec{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2° 场的散度与场的旋度　若

$$\vec{a}(\vec{r})=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

是连续可微分的向量场, 则称数量

$$\operatorname{div} a=\nabla\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

名为场的旋度.

3° 穿过曲面的流量　若向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 在域 Ω 内产生向量场, 则称积分

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}dS=\iint_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS$$

为穿过位于域 Ω 内的已知曲面 S 的流向法线上单位向量 $\vec{n}$ $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ 所指的那一面的流量．在向量的论述中奥斯特洛格拉德斯基公式具有下面的形状：

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}dS=\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}dxdydz,$$

式中 S 为包围体积 V 的曲面，$\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线单位向量．

4° 向量的环流 数

$$\int_C \vec{a}d\vec{r}=\int_C a_xdx+a_ydy+a_zdz$$

称为向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 沿某曲线 C 所取的线积分（场作的功）．

若围线 C 是封闭的，则称线积分为向量 $\vec{a}$ 沿围线 C 的环流．

在向量的形式上斯托克斯公式为

$$\oint_C \vec{a}d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\operatorname{rot}\vec{a}dS,$$

式中 C 为包围曲面 S 的封闭围线，并且对曲面 S 的法线 $\vec{n}$ 之方向应当这样来选择：使得立于曲面 S 上的观察者，以头向着法线的方向，围线 C 的回绕是依反时针前进的方向作成的（对于右旋坐标系）．

5° 有势场 向量场 $\vec{a}(\vec{r})$ 是某数量 u 的梯度即 $\operatorname{grad} u$

$=\vec{a}$，$\vec{a}$ 名为有势场，而数量 u 名为场的势。

若势 u 为单值函数，则

$$\int_{AB}\vec{a}d\vec{r}=u(B)-u(A).$$

特别是，在这个情形向量 $\vec{a}$ 的环流等于零。

给定在单联通域内的场 $\vec{a}$ 为有势场的充要条件，是条件 $\mathrm{rot}\,\vec{a}=\vec{0}$ 满足，就是说，这样的场应当是无旋场。

4401. 求场

$$u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$$

在：(a)$O(0,0,0)$；(б)$A(1,1,1)$；(в)$B(2,1,1)$ 诸点梯度的大小和方向。在场的怎样的点，梯度等于零？

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3$，$\frac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2$，$\frac{\partial u}{\partial z}=6z-6$.

(a) 在 O 点，有

$$\mathrm{grad}\,u=3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k},\quad |\mathrm{grad}\,u|=7,$$

方向：$\cos\alpha=\frac{3}{7}$，$\cos\beta=-\frac{2}{7}$，$\cos\gamma=-\frac{6}{7}$；

(б) 在 A 点，有

$$\mathrm{grad}\,u=6\vec{i}+3\vec{j},\quad |\mathrm{grad}\,u|=3\sqrt{5},$$

方向：$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\gamma=0$；

(в) 在 B 点，有

$$\mathrm{grad}\,u=7\vec{i},\quad |\mathrm{grad}\,u|=7,$$

方向：$\cos\alpha=1$，$\cos\beta=\cos\gamma=0$。

一般地说，我们有

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{(2x+y+3)^2+(4y+x-2)^2+(6z-6)^2}.$$

要 $|\operatorname{grad} u|=0$，只要

$$\begin{cases}2x+y+3=0,\\4y+x-2=0,\\6z-6=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=-2$，$y=1$，$z=1$，即在点 $(-2,1,1)$ 梯度为零.

4402. 在空间 $Oxyz$ 的那些点，场

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

的梯度 (а) 垂直于 Oz 轴；(б) 平行于 Oz 轴；(в) 等于零？

解 $\operatorname{grad} u=(3x^2-3yz)\vec{i}+(3y^2-3xz)\vec{j}$
$$+(3z^2-3xy)\vec{k}.$$

(а) 要 $\operatorname{grad} u\perp Oz$，只要 $\operatorname{grad} u\cdot\vec{k}=0$，即 $3z^2-3xy=0$ 或 $z^2=xy$。因此，在满足 $z^2=xy$ 的点 (x,y,z)，其梯度垂直于 Oz 轴.

(б) 要 $\operatorname{grad} u\parallel Oz$，只要

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=y=0$ 及 $x=y=z$。因此，在点 $(0,0,z)$ 及 (x,y,z)（其中 $x=y=z$），其梯度平行于 Oz 轴.

(в) 要 $|\operatorname{grad} u|=0$，只要

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0,\\3z^2-3xy=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=y=z$．因此，在满足 $x=y=z$ 的点 (x, y, z)，其梯度等于零。

4403．已给数量场

$$u=\ln\frac{1}{r},$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$．在空间 $Oxyz$ 的哪些点下面等式成立

$$|\operatorname{grad} u|=1?$$

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x-a}{r^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y-b}{r^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{z-c}{r^2}$．

于是，

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}$$

$$=\frac{1}{r}.$$

要 $|\operatorname{grad} u|=1$，只要 $r=1$，即在以点 (a, b, c) 为中心，1 为半径的球面上，均有

$$\left|\operatorname{grad}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right|=1,$$

其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$．

4404. 作数量场

$$u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$$

的等位面.求通过点 $M(9,12,28)$ 的等位面. 在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

解 等位面可由

$$u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$$

化简得到. 显然有

$$u\geqslant\sqrt{(z+8)^2}+\sqrt{(z-8^2)}\geqslant z+8-(z-8)=16.$$

于是, 当 $u\geqslant 16$时, 有

$$u-\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}.$$

平方化简可得

$$u^2-32z=2u\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2},$$

再平方化简, 即得等位面方程

$$\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1\quad(u\geqslant 16),$$

这是绕Oz轴旋转的一个旋转面. 图形省略.

当 $x=9$, $y=12$, $z=28$时, $u=64$. 因此,等位面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1.$$

在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$内, 由于

$$\begin{aligned}u&=\sqrt{x^2+y^2+z^2+16z+64}\\&\quad+\sqrt{x^2+y^2+z^2-16z+64}\\&\leqslant\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}\ (0\leqslant z\leqslant 6),\end{aligned}$$

故函数 $f(z)=\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}$在$[0,6]$上的

最大值即 u 的最大值. 但是,

$$f(z)=8\left(\frac{1}{\sqrt{100+16z}}-\frac{1}{\sqrt{100-16z}}\right)<0$$

$$(0<z\leqslant 6),$$

故 $f(z)$ 在 $[0, 6]$ 上是严格减函数, 从而

$$\max_{0\leqslant z\leqslant 6} f(z)=f(0)=20.$$

因此, 有

$$\max u=20.$$

4405. 求场

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

在点 $A(1,2,2)$ 及 $B(-3,1,0)$ 的梯度之间的夹角 θ.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

在 A, B 点的梯度分别为

$$\operatorname{grad} u(A)=\frac{7}{81}\vec{i}-\frac{4}{81}\vec{j}-\frac{4}{81}\vec{k},$$

$$\operatorname{grad} u(B)=-\frac{2}{25}\vec{i}+\frac{3}{50}\vec{j}.$$

于是，

$$\cos\theta=\frac{\operatorname{grad}u(A)\cdot\operatorname{grad}u(B)}{|\operatorname{grad}u(A)|\cdot|\operatorname{grad}u(B)|}$$

$$=\frac{-\frac{4}{405}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}}=-\frac{8}{9}$$

4406. 设已知数量场

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

作出场的等位面和梯度的等模面。

在域 $1<z<2$ 内求 $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\operatorname{grad}u|$, $\sup|\operatorname{grad}u|$.

解 将 $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 化简整理，即得

$$x^2+y^2+\frac{u^2-1}{u^2}z^2=0,$$

其中显然有 $0<|u|<1$. 由此可知，等位面是一个以原点为顶点，Oz 轴为旋转轴的圆锥，但要去掉原点 $O(0,0,0)$. 因此，它是一个圆锥孔，又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$-\frac{z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}，\text{故有}$$

$$|\text{grad } u|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}. \text{ 令 } \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=c,$$

显见此等模面是一个以 Oz 轴为旋转轴的旋转面。现在令 $y=0$，得

$$x=cx^2+cz^2 \text{ 或} \left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+z^2=\frac{1}{4c^2}\ (c\neq 0),$$

它是 Oxz 面上的圆。因此，梯度的等模面是一个旋转环面。

当 $1<z<2$ 时，显然有 $0<u\leqslant 1$；且当 $x=y=0$ 时，$u=1$，而当 x^2+y^2 充分大时 u 可任意小，故

$$\inf_{1<z<2} u=0, \quad \sup_{1<z<2} u=1.$$

另外，显然

$$\inf_{1<z<2}|\text{grad } u|=\inf_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

由于对于常数 $a>0$，函数 $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{t+a}\ (0\leqslant t<+\infty)$ 当 $t=a$ 时达最大值 $f(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$（这可从讨论 $f(t)$ 简单地得知），故对于固定的 z，$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值是 $\dfrac{1}{2\sqrt{z^2}}=\dfrac{1}{2z}$ （$z>0$ 时），由此可知

$$\sup_{1<z<2}|\text{grad } u|=\sup_{1<z<2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}.$$

4407. 求在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处之二无限接近的等位面

$$u(x,y,z)=c \text{ 及 } u(x,y,z)=c+\varDelta c$$

之间的距离准确到高阶无穷小，其中$u(x_0,y_0,z_0)=c$，

解 过点 M_0 作等位面 $u(x,y,z)=c$ 的垂线，交等位面 $u(x,y,z)=c+\varDelta c$ 于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则显然二等位面 $u(x,y,z)=c$ 和 $u(x,y,z)=c+\varDelta c$ 之间的距离 $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$．由于梯度垂直于等位面．因此 $\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)$的方向与 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 的方向或者重合，或者相反．于是，注意到 $u(x_0,y_0,z_0)=c$，$u(x_1,y_1,z_1)=c+\varDelta c$，知

$$\begin{aligned}\varDelta c&=u(x_1,y_1,z_1)-u(x_0,y_0,z_0)\\&\doteq\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x_1-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\\&\cdot(y_1-y_0)\\&\quad+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z_1-z_0)\\&=[\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)]\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\\&=\pm|\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)|\cdot|\overrightarrow{M_0M_1}|\\&=\pm|\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)|d.\end{aligned}$$

由此可知（准确到高阶无穷小）

$$d\doteq\frac{|\varDelta c|}{|\text{grad } u(x_0,y_0,z_0)|}.$$

4408. 证明公式

(а) $\operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad} u$ （c 为常数）；

(б) $\operatorname{grad} cu=c\operatorname{grad} u$ （c 为常数）；

(в) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$；

(г) $\operatorname{grad} uv=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v$；

(д) $\operatorname{grad}(u^2)=2u\operatorname{grad} u$；

(е) $\operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad} u$。

证 (а) 由于$\frac{\partial(u+c)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(u+c)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial(u+c)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad} u.$$

(б) 由于$\frac{\partial(cu)}{\partial x}=c\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(cu)}{\partial y}=c\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial(cu)}{\partial z}=c\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{grad} cu=c\operatorname{grad} u.$$

(в) 由于$\frac{\partial(u+v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(u+v)}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial(u+v)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v.$$

(г) 由于$\frac{\partial(uv)}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(uv)}{\partial y}=u\frac{\partial v}{\partial y}$

$+v\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial z}=u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{grad} uv=u\operatorname{grad} v+v\operatorname{grad} u.$$

(д) 在 (г) 中令 $v=u$，即得

$$\operatorname{grad}(u^2)=2u\operatorname{grad} u.$$

(е) 由于 $\frac{\partial f(u)}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f(u)}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial f(u)}{\partial z}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad} u.$$

4409．计算：(а) $\operatorname{grad} r$，(б) $\operatorname{grad} r^2$，(в) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 (а) $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$. 于是，

$$\operatorname{grad} r=\frac{\vec{r}}{r}, \text{ 其中 } \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

(б) $\operatorname{grad}(r^2)=2r\operatorname{grad} r=2r\cdot\frac{\vec{r}}{r}=2\vec{r}$,

(в) $\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\operatorname{grad} r=-\frac{\vec{r}}{r^3}$.

4410．求 $\operatorname{grad} f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\operatorname{grad} r\overset{*)}{=}f'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ **)．

*）利用 4408 题的结果．

**）利用 4409 题的结果．

4411．求 grad $(\vec{c}\cdot\vec{r})$，其中 $\vec{c}$ 为常向量，$\vec{r}$ 为从坐标原点起的向径．

解 设 $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，其中 c_x，c_y，c_z 为常数．由于

$$\vec{c}\cdot\vec{r}=c_xx+c_yy+c_zz$$

及 $\dfrac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial x}=c_x$，$\dfrac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial y}=c_y$，$\dfrac{\partial(\vec{c}\cdot\vec{r})}{\partial z}=c_z$，

故 grad $(\vec{c}\cdot\vec{r})=\vec{c}$．

4412．求 grad$\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}$（$\vec{c}$ 为常向量）．

解 $|\vec{c}\times\vec{r}|^2=(c_yz-c_zy)^2+(c_zx-c_xz)^2+(c_xy-c_y\cdot x)^2$．于是，

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\{|\vec{c}\times\vec{r}|^2\}&=[2c_z(c_zx-c_xz)-2c_y(c_xy-c_y\cdot x)]\vec{i}+[-2c_z(c_yz-c_zy)+2c_x(c_xy-c_yx)]\vec{j}\\&\quad+[2c_y(c_yz-c_zy)-2c_x(c_zx-c_xz)]\vec{k}\\&=2[x(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_x(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{i}\\&\quad+2[y(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_y(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{j}\\&\quad+2[z(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_z(c_xx+c_yy+c_zz)]\vec{k}\\&=2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c})-2\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

4413．证明公式

$$\operatorname{grad} f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

证 由于

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z},$$

故有

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\\&\quad+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.\end{aligned}$$

4414. 证明公式

$$\nabla^2(uv)=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\nabla v,$$

其中 $$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2=\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

证 由于 $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$，故

$$\begin{aligned}&\nabla^2(uv)=\nabla(\nabla(uv))=\nabla(u\nabla v+v\nabla u)\\&=\nabla(u\nabla v)+\nabla(v\nabla u)\\&=(u\nabla^2v+\nabla u\nabla v)+(v\nabla^2u+\nabla u\nabla v)\\&=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\nabla v.\end{aligned}$$

4415. 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 在凸形域 Ω 内可微分且 $|\mathrm{grad}\, u|\leqslant M$，其中 M 为常数，则对于 Ω 中任意两点 A，B 有：

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$ 为 A 与 B 两点间之距离。

证 由于 Ω 为凸形域，故线段 $\overline{AB}$ 整个属于 Ω。设 B 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，A 的坐标为 (x_1,y_1,z_1)，且令 $x_1-x_0=\Delta x$，$y_1-y_0=\Delta y$，$z_1-z_0=\Delta z$。并考虑一元函数 $f(t)=u(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，显然 $f(0)=u(B)$，$f(1)=u(A)$，且 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 可微，并且

$$\begin{aligned}f'(t)=&u'_x(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y,\ z_0+t\Delta z)\Delta x\\&+u'_y(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y,\ z_0+t\Delta z)\Delta y\\&+u'_z(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y,\ z_0+t\Delta z)\Delta z.\end{aligned}$$

于是，由微分学中值定理知

$$\begin{aligned}&u(A)-u(B)=f(1)-f(0)=f'(\xi)\\=&u'_x(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)\Delta x\\&+u'_y(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)\Delta y\\&+u'_z(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)\Delta z\\=&[\mathrm{grad}\, u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA},\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}|u(A)-u(B)|&=|[\mathrm{grad}\, u(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA}|\\&\leqslant|\mathrm{grad}\, u(x_0+\xi\Delta x,\ y_0+\xi\Delta y,\ z_0+\xi\Delta z)|\cdot|\overrightarrow{BA}|\\&\leqslant M\rho(A,B).\end{aligned}$$

4416. 求场$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在已知点$M$（$x,y,z$）沿此点的向径$\vec{r}$之方向的导数。

在什么情况下，此导数将等于梯度的大小？

解 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，其中$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\cos\beta=\frac{y}{r}$，$\cos\gamma=\frac{z}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．于是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

又 $|\mathrm{grad}\,u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$.

要 $|\mathrm{grad}\,u|=\frac{\partial u}{\partial r}$，只要$\frac{u}{r}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$，即只要$a=b=c$，此即所求之解.

4417. 求场$u=\frac{1}{r}$(其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)在方向$\vec{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$上的导数.

在什么情况下，此导数等于零？

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$．于是，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{x}{r^3}\cos\alpha-\frac{y}{r^3}\cos\beta-\frac{z}{r^3}\cos\gamma$$

$$= -\frac{1}{r^2}[\cos(\vec{r},x)\cos\alpha + \cos(\vec{r},y)\cos\beta$$

$$+\cos(\vec{r},z)\cos\gamma]$$

$$= -\frac{\cos(\vec{l},\vec{r})}{r^2}.$$

要$\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要$\cos(\vec{l},\vec{r})=0$，即$\vec{l}\perp\vec{r}$，此即所求之解。

4418. 求场 $u=u(x,y,z)$ 在场 $v=v(x,y,z)$ 的梯度方向的导数。

在什么情况下，此导数等于零？

解 $\vec{l}=\mathrm{grad}\, v$，$\vec{l}_0=\frac{\mathrm{grad}\, v}{|\mathrm{grad}\, v|}$。于是，

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}\, u\cdot\vec{l}_0=\frac{\mathrm{grad}\, u\cdot\mathrm{grad}\, v}{|\mathrm{grad}\, v|}.$$

要$\frac{\partial u}{\partial l}=0$，只要$\mathrm{grad}\, u\perp\mathrm{grad}\, v$，此即所求之解。

4419^{+}. 设：

$$u=\mathrm{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ 及 } \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},$$

计算 $$\vec{a}=\vec{c}\times\mathrm{grad}\, u.$$

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}}\left(-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2+z^2}.$$

于是，

$$\vec{a}=\vec{c}\times \operatorname{grad} u=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\left[(x^2+y^2+yz)\vec{i}\right.$$

$$\left.-(x^2+y^2+xz)\vec{j}+(x-y)z\vec{k}\right].$$

4420．确定向量场

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$$

的力线．

解 力线系这样的一条曲线C，在C上每一点的切线与向量场在该点的方向重合．因此，有 $d\vec{r}\parallel\vec{a}$，即

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z},$$

其中 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$.

今有 $a_x=x$, $a_y=y$, $a_z=2z$, 故得

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{2z}.$$

解之, 得 $y=c_1x$, $z=c_2x^2$.

4421. 用直接计算的方法证明向量 $\vec{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$ (坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) 外, 另有直角坐标系 $O'x'y'z'$ (坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$). 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

设

$$\begin{cases}\vec{i}'=\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k},\\ \vec{j}'=\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k},\\ \vec{k}'=\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}.\end{cases}$$

又设 $\vec{r}_0=\overrightarrow{OO'}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$. 于是, 空间一点 P 在两个坐标系中的坐标 (x, y, z) 与 (x', y', z') 之间的关系为 (令 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{r}'=\overrightarrow{O'P}$):

$$x'=\vec{r}'\cdot\vec{i}'=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{i}'$$

$$=(x-a)\cos\alpha_1+(y-b)\cos\beta_1+(z-c)\cos\gamma_1,$$

$$y'=\vec{r}'\cdot\vec{z}'=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{j}'$$

$$=(x-a)\cos\alpha_2+(y-b)\cos\beta_2+(z-c)\cos\gamma_2,$$

$$z'=\vec{r}'\cdot\vec{k}'=(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}'$$

$$=(x-a)\cos\alpha_3+(y-b)\cos\beta_3+(z-c)\cos\gamma_3 .$$

我们有

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_{x'}\vec{i}'+a_{y'}\vec{j}'+a_{z'}\vec{k}'\\&=a_{x'}(\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k})\\&\quad+a_{y'}(\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k})\\&\quad+a_{z'}(\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}).\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}a_x&=a_{x'}\cos\alpha_1+a_{y'}\cos\alpha_2+a_{z'}\cos\alpha_3\\a_y&=a_{x'}\cos\beta_1+a_{y'}\cos\beta_2+a_{z'}\cos\beta_3\\a_z&=a_{x'}\cos\gamma_1+a_{y'}\cos\gamma_2+a_{z'}\cos\gamma_3 .\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}$$

$$=\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\alpha_1$$

$$+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\alpha_2$$

$$+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\alpha_3 .$$

同理，可得

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}=\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\beta_1$$

$$+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\beta_2$$

$$+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_z{}'}{\partial z}\right)\cos\beta_3,$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x}\right)\cos\gamma_1$$

$$+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\gamma_2$$

$$+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\gamma_3.$$

将这三式相加，得

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=(\vec{i}'\cdot\vec{i})\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}$$

$$+(\vec{j}'\cdot\vec{i})\frac{\partial a_{y'}}{\partial x}+(\vec{k}'\cdot\vec{i})\frac{\partial a_{z'}}{\partial x}$$

$$+(\vec{i}'\cdot\vec{j}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+(\vec{j}'\cdot\vec{j})\frac{\partial a_{y'}}{\partial y}+(\vec{k}'\cdot\vec{j}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}$$

$$+(\vec{i}'\cdot\vec{k}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+(\vec{j}'\cdot\vec{k}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+(\vec{k}'\cdot\vec{k})\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}$$

$$=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

证毕.

4422. 证明

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(s)\to 0}\frac{1}{v}\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS,$$

其中S为围绕着点M和界有体积V的封闭曲面，$\vec{n}$为曲面S之外法线，$d(S)$为曲面S的直径．

证 由于

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是$\vec{n}$之方向余弦．应用奥氏公式以及积分中值定理，得

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS&=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS\\&=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz\\&=\iiint\limits_V(\operatorname{div}\vec{a})dxdydz\\&=\operatorname{div}\vec{a}(M_1)\cdot V,\end{aligned}$$

其中M_1是V中某点，即

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS.$$

令$d(S)\to0$，这时V缩向点M，从而点$M_1\to M$，取极限，即得

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(S)\to0}\frac{1}{V}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}dS.$$

证毕．

4423．求：

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\omega_x&\omega_y&\omega_z\end{vmatrix}.$$

解

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

$$=\operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)\vec{j}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)$$

$$=0.$$

4424. 证明：

(а) $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$;

(б) $\operatorname{div}(u\vec{c})=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}u$ ($\vec{c}$为常向量，u 为数量)；

(в) $\operatorname{div}(u\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}u$.

证 (а) 设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

由于$\dfrac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x}=\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial b_x}{\partial x}$，$\dfrac{\partial(a_y+b_y)}{\partial y}$

$=\dfrac{\partial a_y}{\partial y}+\dfrac{\partial b_y}{\partial y}$及$\dfrac{\partial(a_z+b_z)}{\partial z}=\dfrac{\partial a_z}{\partial z}+\dfrac{\partial b_z}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}.$$

(б) 设 $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，其中 c_x, c_y, c_z 为常数。

由于 $\frac{\partial(uc_x)}{\partial x}=c_x\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(uc_y)}{\partial y}=c_y\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(uc_z)}{\partial z}=c_z\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{div}(u\vec{c})=\vec{c}\cdot\operatorname{grad} u.$$

(в) 由于 $\frac{\partial(ua_x)}{\partial x}=u\frac{\partial a_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial(ua_y)}{\partial y}=u\frac{\partial a_y}{\partial y}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(ua_z)}{\partial z}=u\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}$，故得

$$\operatorname{div}(u\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad} u.$$

4425. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$。

解
$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$=\Delta u \quad (\text{或记成}\nabla^2 u).$$

4426. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]=0$？

解 由 4410 题的结果知，

$$\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

于是，

$$\mathrm{div}[\mathrm{grad} f(r)]=\frac{\partial}{dx}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[f'(r)\frac{y}{r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[f'(r)\frac{z}{r}\right]$$

$$=f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)+f'(r)$$

$$\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)$$

$$=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).$$

要 $\mathrm{div}[\mathrm{grad} f(r)]=0$，只要 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$.

将上述方程写成下述形式：

$$rf''(r)+2f'(r)=0$$

或 $[rf''(r)+f'(r)]+f'(r)=0$.

积分之，即得

$$rf'(r)+f(r)=C \quad (C\text{为常数}).$$

再积分之，得

$$rf(r)=Cr+C_1 \quad (C_1\text{为常数}).$$

于是，最后得

$$f(r)=C+\frac{C_1}{r},$$

此即所求之解.

4427. 计算：(a) $\mathrm{div}\vec{r}$；(б) $\mathrm{div}\,\frac{\vec{r}}{r}$.

解 (a) $\mathrm{div}\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$.

(б) $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$

$=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)$

$=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}$.

4428. 计算 $\mathrm{div}[f(r)\vec{c}]$，式中 $\vec{c}$ 为常向量。

解 $\mathrm{div}[f(r)\vec{c}]=\vec{c}\cdot\mathrm{grad}f(r)^{*)}$

$$=\vec{c}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\overset{**)}{=}\frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\cdot\vec{r}).$$

*) 利用 4424 题（б）的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4429. 求 $\mathrm{div}[f(r)\vec{r}]$. 在什么情况下此向量的散度等于零?

解 $\mathrm{div}[f(r)\vec{r}]=f(r)\mathrm{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\mathrm{grad}f(r)^{*)}$

$=3f(r)+\vec{r}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r}^{**)}$

$=3f(r)+rf'(r)$.

要 $\mathrm{div}[f(r)\vec{r}]=0$，只要 $3f(r)+rf'(r)=0$，即

$$\frac{f'(r)}{f(r)}=-\frac{3}{r}.$$

积分之，即得

$$f(r)=\frac{C}{r^3}\ （C\text{ 为常数}），$$

此即所求之解．

*）利用 4424 题(в)的结果．

**）利用 4410 题的结果．

4430．求：(a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$；(б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$．

解 (a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)=u\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)+\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} u^{*)}$

$=u\Delta u+(\operatorname{grad} u)^{2**)}$

(б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)=u\operatorname{div}(\operatorname{grad} v)+\operatorname{grad} v\cdot\operatorname{grad} u^{*)}$

$=u\Delta v+\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v^{**)}$．

*）利用 4424 题(в)的结果．

**）利用 4425 题的结果．

4431．物体以一定的角速度 ω 依逆时针方向绕 Oz 轴旋转．求速度向量 $\vec{v}$ 和加速度向量 $\vec{\omega}$ 在空间的点 $M(x,y,z)$ 和在已知时刻的散度．

解 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}$，微分之，即得

$$\begin{aligned}\vec{\omega}&=\dot{\vec{\omega}}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\\&=\dot{\vec{\omega}}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}\\&=\dot{\vec{\omega}}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\\&=\dot{\vec{\omega}}_0+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}_0+(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}^{\,*)}.\end{aligned}$$

为了计算 $\operatorname{div}\vec{v}$ 和 $\operatorname{div}\vec{\omega}$，先计算 $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r})$，此处 $\vec{a}$ 为常向量．由于

$(\vec{a}\times\vec{r})_x=a_y z-a_z y$，$(\vec{a}\times\vec{r})_y=a_z x-a_x z$，

$(\vec{a}\times\vec{r})_z=a_x y-a_z y$，

故得

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r})=\frac{\partial}{\partial x}(a_y z-a_z y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_z x-a_x z)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_x y-a_y x)=0.$$

于是，即得

$$\operatorname{div}\vec{v}=\operatorname{div}\vec{v}_0+\operatorname{div}(\vec{\omega}\times\vec{r})=0.$$

$$\operatorname{div}\vec{\omega}=\operatorname{div}\vec{\omega}_0+\operatorname{div}(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r})+\operatorname{div}(\vec{\omega}\times\vec{v}_0)$$

$$+\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}]-\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}],$$

而 $\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}]=\vec{\omega}\cdot\vec{r}\operatorname{div}\vec{\omega}+\vec{\omega}\cdot\operatorname{grad}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^{**)}$

$$=\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}^{***)}=\omega^2$$

及 $\operatorname{div}[(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}]=\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})$

$$=3\omega^2,$$

从而，最后得

$$\operatorname{div}\vec{\omega}=\omega^2-3\omega^2=-2\omega^2.$$

*) 利用向量代数中的公式(二重外积展开式)：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

**) 利用 4424 题(в)的结果.

***) 利用 4411 题的结果.

4432. 求由引力中心的有限系统所产生的动力场之散度.

解 引力 $\vec{F}=\frac{k\vec{r}}{r^3}$ (k为常数). 于是，

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kz}{r^3}\right)$$

$$=k\left[\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)\right]$$

$$=k\left[\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right]$$

$$=k\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)=0.$$

4433⁺ 求由极坐标 r 与 φ 所表的平面向量 $\vec{a}=\vec{a}(r,\varphi)$ 之散度的表示式.

解 设极坐标的 r 线与 φ 线的单位矢量为 $\vec{e}_r$ 与 $\vec{e}_\varphi$，且

$$\vec{a}(r,\varphi)=a_r(r,\varphi)\vec{e}_r+a_\varphi(r,\varphi)\vec{e}_\varphi.$$

这里自然假定 a_r，a_φ 都具有连续的偏导函数. 取面积元素 $\Delta S=r\Delta\varphi\Delta r$，记其界线为 ΔC. 首先，推导矢量 $\vec{a}$ 经过界线 ΔC 的通量，即矢流. 通量可分两部分：一部分是经过 r 线的；另一部分是经过 φ 线的. 它们分别是

$$\int_r^{r+\Delta r}a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)dr-\int_r^{r+\Delta r}a_\varphi(r,\varphi)dr$$

$$=\int_r^{r+\Delta r}[a_\varphi(r,\varphi+\Delta\varphi)-a_\varphi(r,\varphi)]dr$$

$$\doteq\int_r^{r+\Delta r}\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}\Delta\varphi dr$$

$$\doteq\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi}\Delta\varphi\Delta r,$$

$$\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)d\varphi-\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}a_r(r,\varphi)rd\varphi$$

$$=\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}[a_r(r+\Delta r,\varphi)(r+\Delta r)-a_r(r,\varphi)r]d\varphi$$

$$\doteq \int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r d\varphi$$

$$\doteq \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r} \Delta r \Delta\varphi,$$

且由于 a_r, a_φ 的偏导函数的连续性，当 Δr, $\Delta\varphi$ 取得愈小时，上述近似等式愈精确．于是，矢量 $\vec{a}$ 经过 ΔC 的通量

$$\oint_{\Delta C} \vec{a}\cdot\vec{n} ds \doteq \left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\} \Delta\varphi \Delta r,$$

其中 $\vec{n}$ 为曲线 ΔC 的外法线方向，而且当 Δr, $\Delta\varphi$ 愈小时此近似等式愈精确．

于是，根据散度的定义，并注意到 ΔS 收缩为一点 (r,φ) 与 $\Delta r\to 0$，$\Delta\varphi\to 0$ 等价，从而即得

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\oint_{\Delta C} \vec{a}\cdot\vec{n} ds}{\Delta S}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}} \frac{\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}\Delta r\Delta\varphi}{r\Delta r\Delta\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial a_\varphi(r,\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial[a_r(r,\varphi)r]}{\partial r}\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

4434．设

$$x=f(u,v,w), y=g(u,v,w), z=h(u,v,w),$$

用直交曲线坐标 u,v,w 表示 $\operatorname{div}\vec{a}(x,y,z)$。

作为特殊的情形，求用柱坐标和球坐标表示$\mathrm{div}\vec{a}$的表示式。

解 考虑向量$\vec{a}$通过由曲面$u=$常数，$v=$常数，$w=$常数所界的小立体（接近于长方体）V的表面S的流量（图8.72），我们有

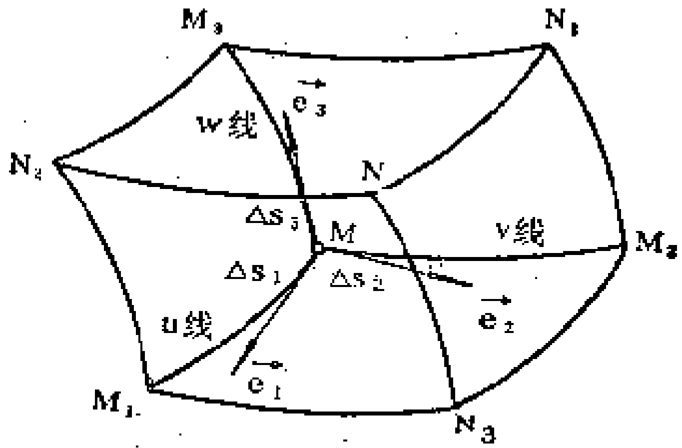

图 8.72

$\vec{a}=a_u\vec{e}_1+a_v\vec{e}_2+a_w\vec{e}_3$.

在u曲线上，只有u变化（v和w都是常数），故

$$d\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial u}du\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}du\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}du\vec{k},$$

从而

$$ds_1=|d\vec{r}|=Ldu,$$

其中 $$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

ds_1为u曲线上的弧元素．同理可得

$$ds_2=Mdv,\quad ds_3=Ndw,$$

其中ds_2, ds_3分别为v, w曲线上的弧元素，而

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直，$\Delta s_1,\Delta s_2,\Delta s_3$ 都很小，故 V 接近于长方体. 因此，其体积为

$$\begin{aligned}V&\doteq\Delta s_1\Delta s_2\Delta s_3\doteq ds_1ds_2ds_3\\&=LMN\,du\,dv\,dw.\end{aligned}$$

现计算 $\vec{a}$ 通过 V 的表面 S 向外的流量 $\iint\limits_S a_n dS$，S 共包括六块小曲面（图8.72），记垂直于 $\vec{e}_1$ 方向的两块为 S_1 与 S_2（即图中的 $MM_2N_1M_3$ 与 $M_1N_3NN_2$），垂直于 $\vec{e}_2$ 方向的两块为 S_3 与 S_4，垂直于 $\vec{e}_3$ 方向的两块为 S_5 与 S_6. 显然，由于曲面很小，有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S_2}a_n dS+\iint\limits_{S_1}a_n dS\\&\doteq a_u\Delta S_2\Delta S_3\big|_{(u+\Delta u,v,w)}\\&\quad-a_u\Delta S_2\Delta S_3\big|_{(u,v,w)}\\&\doteq a_u MN\,dv\,dw\big|_{(u+\Delta u,v,w)}\\&\quad-a_u MN\,dv\,dw\big|_{(u,v,w)}\\&\doteq\frac{\partial(a_u MN\,dv\,dw)}{\partial u}du\\&=\frac{\partial(MNa_u)}{\partial u}du\,dv\,dw.\end{aligned}$$

同理可得

$$\iint\limits_{S_4}a_n dS+\iint\limits_{S_3}a_n dS\doteq\frac{\partial(NLa_v)}{\partial v}du\,dv\,dw,$$

$$\iint_{S_6} a_n dS + \iint_{S_5} a_n dS \doteq \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w} dudvdw.$$

相加即得

$$\iint_S a_n dS \doteq \left[\frac{\partial(MNa_u)}{\partial u} + \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w}\right] dudvdw.$$

于是，

$$\frac{\iint_S a_n dS}{V} \doteq \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right].$$

显然，当小立体V愈缩向点M（V愈小）时，上述各近似等式都愈精确．于是，令V缩向M（即S的直径$d(S)$趋于零）取极限，利用4422题的结果，得

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{d(S)\to 0} \frac{\iint_S a_n dS}{V}$$

$$= \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right].$$

特别是在柱坐标情形下，有

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ z=z$$
$$(u=r,\ \ v=\varphi,\ \ w=z).$$
从而

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=r,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1.$$

于是，

$$\mathrm{div}\,\vec{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right].$$

在球坐标情形下，有

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=\rho\cos\theta\ \ (u=\rho,\ \ v=\theta,\ \ w=\varphi).$$

于是，

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}=\rho,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=\rho\sin\theta.$$

由此可知

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2\sin\theta)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\rho\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi\rho)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2)\right.$$

$$\left.+\rho\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)+\rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

4435. 证明:

(a) $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}$;

(б) $\operatorname{rot}(u\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{grad}u\times\vec{a}$.

证 (a) 设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则有

$$\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}.$$

(б) $$\operatorname{rot}_x(u\vec{a})=\frac{\partial}{\partial y}(ua_z)-\frac{\partial}{\partial z}(ua_y)$$

$$=u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\left(a_z\frac{\partial u}{\partial y}-a_y\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\mathrm{rot}_x\vec{a}+(\mathrm{grad}\ u\times\vec{a})_x,$$

同法可得

$$\mathrm{rot}_y(u\vec{a})=u\mathrm{rot}_y\vec{a}+(\mathrm{grad}\ u\times\vec{a})_y,$$

$$\mathrm{rot}_z(u\vec{a})=u\mathrm{rot}_z\vec{a}+(\mathrm{grad}\ u\times\vec{a})_z.$$

于是，

$$\mathrm{rot}(u\vec{a})=u\mathrm{rot}\vec{a}+\mathrm{grad}\ u\times\vec{a}.$$

4436. 求：(a) $\mathrm{rot}\vec{r}$；(б) $\mathrm{rot}[f(r)\vec{r}]$.

解 (a) $$\mathrm{rot}\vec{r}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

(б) $$\mathrm{rot}[f(r)\vec{r}]=f(r)\mathrm{rot}\vec{r}+\mathrm{grad}f(r)\times\vec{r}\ ^{*)}$$

$$=\vec{0}+f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{r}$$

$$=\vec{0}.$$

*) 利用4435题(б)的结果.

**) 利用4410题的结果.

4437. 求：(a) $\mathrm{rot}\vec{c}f(r)$，(б) $\mathrm{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$（$\vec{c}$为定向量）.

解 (a) $$\mathrm{rot}\vec{c}f(r)=f(r)\mathrm{rot}\vec{c}+\mathrm{grad}f(r)\times\vec{c}$$

$$=\frac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{c}).$$

(б) $$\mathrm{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]=f(r)\mathrm{rot}(\vec{c}\times\vec{r})$$

$+\operatorname{grad} f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})$. 但是,

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ c_y z-c_z y & c_z x-c_x z & c_x y-c_y x\end{vmatrix}=2\vec{c}$$

$$\operatorname{grad} f(r)\times(\vec{c}\times\vec{r})=\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{r})$$

$$=\frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}],$$

故最后得

$$\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]=2f(r)\vec{c}+\frac{f'(r)}{r}[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{c}$$

$$-(\vec{r}\cdot\vec{c})\vec{r}]$$

4438. 证明 $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$.

证 $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\dfrac{\partial}{\partial x}(a_y b_z-a_z b_y)+\dfrac{\partial}{\partial y}(a_z b_x-a_x b_z)$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y-a_y b_x)$$

$$=b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)$$

$$-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)$$

$$=\vec{b}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}-\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{b}.$$

4439. 求：(a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)$；(б) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})$.

解 (a) $$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

(б) $$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0.$$

4440. 物体以一定的角速度ω围绕轴$\vec{l}\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\cos\gamma\}$旋转．求速度向量$\vec{v}$在空间的点$M(x,y,z)$和在已知时刻的旋度．

解 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}$．从而有

$v_x=v_{0x}+\omega_y z-\omega_z y$，$v_y=v_{0y}+\omega_z x-\omega_x z$，

$v_z=v_{0z}+\omega_x y-\omega_y x$.

由于 $\mathrm{rot}_x\vec{v}=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\omega_x$，$\mathrm{rot}_y\vec{v}=2\omega_y$及$\mathrm{rot}_z\vec{v}$

$=2\omega_z$，故 $\operatorname{rot}\vec{v}=2\vec{\omega}$。

4441．求向量 $\vec{r}$ 的流量：(a) 穿过圆锥形 $x^2+y^2\leqslant z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面；(б) 穿过此圆锥形的底．

解 (a) 在侧面上，点的向径的方向与圆锥的母线重合．因此，点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直，即 $\vec{r}$ 在法线方向上的射影 $\vec{r}^n=0$．于是，向量 r 穿过侧面 D 的流量为

$$\iint\limits_D r_n dS=0\ .$$

(б) 在圆锥形的底面上，$r_n=h$．于是，所求的流量为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} r_n dS=h\cdot\pi h^2=\pi h^3\ .$$

4442．求向量 $\vec{a}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的流量：(a) 穿过圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面；(б) 穿过此圆柱的全表面．

解 先求(б)，由于

$$\iint\limits_S a_n dS=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dV=\iiint\limits_V 0dV=0\ ,$$

故向量 $\vec{a}$ 穿过圆柱的全表面的流量为零．

再求(a)，又由于 $S=S_{侧}+S_{上、下底}$ 及在上、下底上 $a_n=xy$，故有

$$\iint\limits_{S_{上、下底}} a_n dS=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} xydxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}r^3\sin\varphi\cos\varphi dr=0\text{。}$$

于是，

$$\iint\limits_{S_{侧}}a_n dS=0\text{，}$$

即向量 $\vec{a}$ 穿过侧面的流量也为零。

4443．求向径 $\vec{r}$ 穿过曲面

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2}\quad(0\leqslant z\leqslant 1)$$

的流量

解 设 S 为所给的曲面（锥），D 为锥的底面（即 Oxy 平面上的圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$）．由于

$$\iint\limits_{S}r_n dS+\iint\limits_{D}r_n dS=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{r}dV$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 rdr\int_0^{1-r}dz=\pi$$

及在 D 上，$\vec{r}\perp\vec{n}$，故 $r_n=0$，$\iint\limits_{D}r_n dS=0$，从而，得

$$\iint\limits_{S}r_n dS=\pi\text{。}$$

4444．求向量 $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ 穿过球 $x^2+y^2+z^2=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 的正八分之一的流量．

解 设 S 为所给的曲面，S_1、S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分，则有

$$\iint_S a_n dS + \iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_3} a_n dS$$

$$= \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} \mathrm{div}\vec{a}\,dV = 2\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} (x+y+z)\,dxdydz$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2\cos\psi\cdot r(\cos\varphi\cos\psi$$

$$+\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi)dr$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos\psi\sin\psi+\cos^2\psi(\cos\varphi+\sin\varphi)]d\psi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]d\varphi$$

$$= \frac{3}{8}\pi.$$

但在 $S_i(i=1,2,3)$ 上，显然有 $\vec{a}\perp\vec{n}$，故 $a_n=0$，从而 $\iint_{S_i} a_n dS = 0$ $(i=1,2,3)$。于是，所求的流量为

$$\iint_S a_n dS = \frac{3}{8}\pi.$$

4445．求向量 $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ 穿过由诸平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=a$ $(a>0)$ 所包围角锥的全表面的流量．

利用奥斯特洛格拉德斯基公式，验证结果．

解 方法一

由于 $\mathrm{div}\vec{a}=0$，故所求的流量为

$$\iint_S a_n dS=\iiint_V \mathrm{div}\vec{a}dV=0\ .$$

方法二

如图 8.73 所示。在平面 $z=0(S_1)$上，$\vec{n}=\{0,0,-1\}$；在平面 $y=0$ (S_3) 上，$\vec{n}=\{0,-1,0\}$；在平面 $x=0$ (S_2) 上，$\vec{n}=\{-1,0,0\}$。于是，向量 $\vec{a}$ 穿过曲面 S_1 的流量为

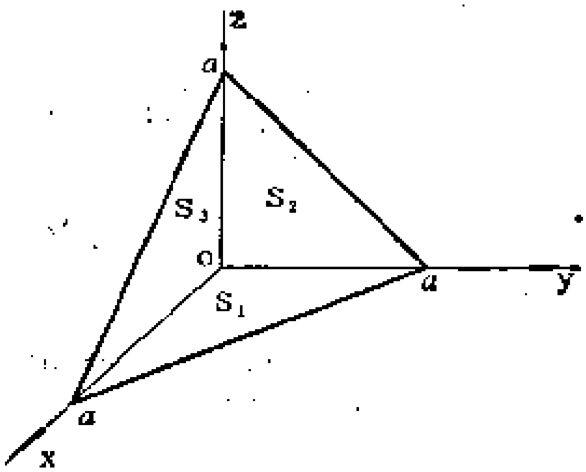

图 8.73

$$\iint_{S_1} a_n dS=\iint_{S_1}\vec{a}\cdot\vec{n}dS=\iint_{\substack{x+y<a\\x>0,\ y>0}}(-x)dxdy$$

$$=-\frac{a^3}{6}.$$

同法可求得向量 $\vec{a}$ 穿过 S_2 及 S_3 面的流量也为 $-\frac{a^3}{6}$。

对于平面 $x+y+z=a$ (S_4)，其法向量为 $\vec{n}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，故流量为

$$\iint_{S_4} a_n dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_4}(y+z+x)dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant a\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} a\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,dx\,dy=\frac{a^3}{2}.$$

因此，最后得向量 $\vec{a}$ 穿过角锥全表面的流量为

$$\sum_{i=1}^{4}\iint\limits_{S_i} a_n\,dS=\frac{a^3}{2}+3\left(-\frac{a^3}{6}\right)=0.$$

4446. 证明：向量 $\vec{a}$ 穿过由方程式 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ $((u,v)\in\Omega)$ 所给出的曲面 S 的流量等于

$$\iint\limits_{S}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_{\Omega}\left(\vec{a}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv,$$

式中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的法线之单位向量.

证 设曲面 S 的方程为

$$\vec{r}=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},$$

则有

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k},$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}.$$

从而

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\vec{j}$$

$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\vec{k}.$$

因此，易得

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{EG-F^2}.$$

又$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$的方向显然是法线$\vec{n}$的方向．于是，我们有

$$\iint_S\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_\Omega\vec{a}\cdot\sqrt{EG-F^2}\,\vec{n}\,du\,dv$$

$$=\iint_\Omega\vec{a}\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$

$$=\iint_\Omega\left(\vec{a}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv.$$

4447．求向量$\vec{a}=m\frac{\vec{r}}{r^3}$（$m$为常数）穿过围绕坐标原点的封闭曲面$S$的流量．

解 所求的流量为

$$\iint_S a_n\,dS=m\iint_S\frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{n}\,dS=m\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS$$

$$=m\cdot 4\pi^{*)}=4\pi m.$$

*）利用4392题(б)的结果。

4448．已知向量

$$a(\vec{r})=\vec{a}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

其中 e_i 为常数，r_i 为点 M_i（起点）距动点 $M(\vec{r})$ 的距离．求此向量穿过围绕点 M_i（$i=1,2,\cdots,n$）的封闭曲面 S 的流量。

解 首先，我们有

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i\vec{r}_i}{4\pi r_i^3}.$$

其次，我们考虑这样一个立体(V)，它由曲面 S 及包围点 M_i（$i=1,2,\cdots,n$）的 n 个小球所围成（这些小球的球心在点 M_i，半径为 ρ_i）．由于 $\operatorname{div}\vec{a}$ 在V内为零，故

$$\iint_S a_n dS=\sum_{j=1}^{n}\iint_{S_j}a_n dS,$$

其中 S_j 为第 j 个小球面．但是

$$\iint_{S_j}a_n dS=\iint_{S_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i\vec{r}_i}{4\pi r_i^3}\right)\cdot\vec{n}dS.$$

由于

$$\iint_{S_j}\frac{1}{r_i^3}(\vec{r}_i\cdot\vec{n})dS=\iint_{S_j}\frac{\cos(\vec{r}_i,\vec{n})}{r_i^2}dS$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq i \text{ 时，}^{*)}\\ 4\pi, & \text{当 } j=i \text{ 时，}\end{cases}$$

故得

$$\iint_{S_i} a_n dS = e_i.$$

从而

$$\iint_S a_n dS = \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

*) 利用 4392 题的结果.

4449. 证明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dxdydz,$$

其中曲面 S 包围体积 V.

证 参看 4393 题(a).

4450. 在单位时间内经过曲面元素 dS 而进入温度场 u 的热量等于

$$dQ = -k\vec{n}\cdot\mathrm{grad}\, u dS,$$

其中 k 为内热的传导系数, $\vec{n}$ 为曲面 S 的法线之单位向量. 求在单位时间内物体 V 所积累的热量. 研究温度上升的速度以推出为物体温度所满足的方程式(热传导方程式).

解 由于

$$dQ = -k\vec{n}\cdot\mathrm{grad} u\, dS = -k\mathrm{grad}_n u dS,$$

故由奥氏公式, 即得

$$Q = -\iint_S k\mathrm{grad}_n u dS = \iiint_V k\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u) dS.$$

因此，每单位时间内向立体内部流入的热量为

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)\,dS. \qquad (1)$$

这一热量引起立体内部温度的增加。现在我们从另一方面再来计算此热量。在时间 dt 内温度 u 增加

$$du=\frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

需要对体积元素 dV 输入热量

$$c\,du\,\rho\,dV=c\frac{\partial u}{\partial t}\rho\,dt\,dV,$$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量。于是，在时间 dt 内整个立体就要吸收热量

$$dt\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint\limits_V c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}dV. \qquad (2)$$

比较 (1) 式及 (2) 式，便得等式

$$\iiint\limits_V \left\{c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)\right\}dV=0.$$

由于上式对取在所考察境域内的任何立体 V 都适合，且被积函数显见连续，故根据 4097 题的结果，当点属于所考察的境域时，恒有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u),$$

此即所求的热传导方程。

4451. 在运动中不可压缩的液体占有体积 V。假定在域 V 内源泉和漏孔都不存在，试推出连续性的方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0,$$

式中 $\rho=\rho(x,y,z,t)$ 为液体密度，$\vec{v}$ 为速度向量，t 为时间。

解 首先，我们已知：在每单位时间内自 V 中的任一立体 V' 的表面 S' 向外流出的流量 Q 为

$$Q=\iint_{S'}\rho v_n dS=\iiint_{V'}\operatorname{div}(\rho\vec{v})dV. \qquad (1)$$

现在我们用另一法来计算 Q，如考虑到在时间 dt 内密度 ρ 增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t}dt$，则立体元素 dV 的质量就增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t}dt\,dV$，而整个所考察的立体 V' 的质量就增加

$$dt\iiint_{V'}\frac{\partial \rho}{\partial t}dV.$$

因此，每单位时间内 V' 中质量减少

$$-\iiint_{V'}\frac{\partial \rho}{\partial t}dV.$$

由于 V 内无源泉和漏孔，故这个减少的质量正好就是从 V' 的表面 S' 流出的质量流量 Q，即

$$Q=-\iiint_{V'}\frac{\partial \rho}{\partial t}dV. \qquad (2)$$

比较(1)式和(2)式，便得等式

$$\iiint\limits_{V'}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})\right\}dV=0.$$

由于上式对 V 中任一立体 V' 均成立，且被积函数连续，故根据 4097 题的结果，当 $(x,y,z)\in V$ 时，恒有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0.$$

4452. 求向量 $\vec{a}=\vec{r}$ 沿着螺线

$$\vec{r}=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+bt\vec{k}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的一段的功。

解 由于

$$d\vec{r}=(-a\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}+b\vec{k})dt,$$
$$\vec{a}\cdot d\vec{r}=b^2tdt,$$

故所求的功为

$$W=\int_0^{2\pi}b^2tdt=2\pi^2b^2.$$

4453. 求向量 $\vec{a}=f(r)\vec{r}$（其中 f 是连续函数）沿着弧 AB 的功。

解 所求的功为

$$W=\int_{r_A}^{r_B}f(r)\vec{r}\cdot d\vec{r}=\int_{r_A}^{r_B}f(r)\vec{r}\cdot\vec{t}^0ds$$
$$=\int_{r_A}^{r_B}f(r)rdr,$$

其中 $\vec{t^0}$ 是单位切向量。

4454. 求向量

$$\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$$

（c为常数）的环流：(a)沿着圆周 $x^2+y^2=1, z=0$；(б) 沿着圆周$(x-2)^2+y^2=1, z=0$。

解 (a) 圆 $x^2+y^2=1$，$z=0$的向径$\vec{r}$适合方程

$$\vec{r}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+0\vec{k} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由于

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot d\vec{r}&=(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+c\vec{k})\\&\cdot(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+0\vec{k})dt\\&=dt,\end{aligned}$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

(б) 对于圆$(x-2)^2+y^2=1$，$z=0$，有

$$\vec{r}=(2+\cos t)\vec{i}+\sin t\vec{j}+0\vec{k} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

由于

$$\vec{a}\cdot d\vec{r}=(2\cos t+1)dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi}(2\cos t+1)dt=2\pi.$$

4455. 求向量$\vec{a}=\operatorname{grad}\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)$沿着围线$C$的环流$\Gamma$：(a) C不围绕Oz轴；(б) C围绕Oz轴。

解 我们有

$$\vec{a}=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

于是，易知

$$\text{rot}\,\vec{a}=\vec{0}\quad（除x=y=0，即Oz轴上的点）.$$

(a) 若 C 不围绕 Oz 轴，则可于 C 上张一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交，于是，根据斯托克斯公式，得

$$\Gamma=\oint_C\vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_S\vec{n}\cdot\text{rot}\,\vec{a}\,dS=0.$$

(б) 若 C 围绕 Oz 轴．先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周，取常数 $\tau<0$ 充分小，使 C 位于平面 $z=\tau$ 的上方．在平面 $z=\tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 C_r ($x^2+y^2=r^2$，$z=\tau$) 充分小，使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离．以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交．由斯托克斯公式，得

$$\oint_C\vec{a}\cdot d\vec{r}+\oint_{C_r}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_S\vec{n}\cdot\text{rot}\,\vec{a}\,dS=0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向．于是

$$\Gamma=\oint_C\vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_r}\vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=\tau$ 后，得

$$\oint_{C_r}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}\right)(-r\sin\theta)+\left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\right)(r\cos\theta)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.$$

从而

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi.$$

现设 C 围绕 Oz轴旋转了 n圈．为叙述简单起见，假定$n=2$．在平面 Ozx 上引辅助线（直线段），AB，将 C 分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线$C_1=ABMA$与$C_2=ANBA$(图8.74)．根据前面已证的结果可知

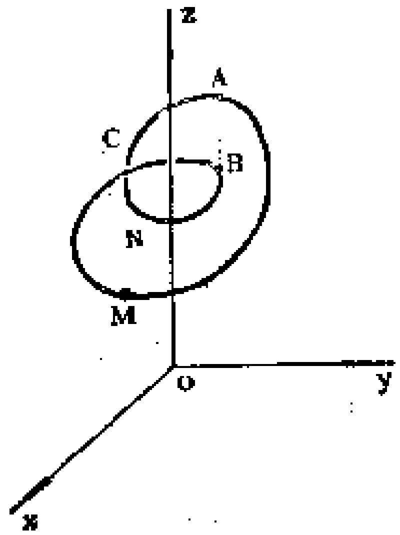

图 8.74

$$\oint_{C_1}\vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi,\quad \oint_{C_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi.$$

于是，注意到$\overline{AB}$上的线积分（第二型）与$\overline{BA}$上的线积分相消，即得

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_{C_1}\vec{a}\cdot d\vec{r}+\oint_{C_2}\vec{a}\cdot d\vec{r}=4\pi.$$

完全类似地，可得一般情况（C 围绕 Oz轴转 n 圈）时，有

$$\Gamma=\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}=2\pi n.$$

4456*. 平面的不可压缩稳流由速度向量

$$\vec{w}=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$$

描写出来，求出：(1)经过包围域 S 的封闭围线C所

流出液体的量 Q（液体的消耗）；（2）速度向量沿着围线 C 的环流 Γ. 若流场无源泉、无漏孔且无旋度，则函数 u 和 v 满足什么样的方程式？

解 （1）考虑包含着点 $D(x,y)$ 的两边长分别为 Δx 与 Δy 的小矩形元 $ABCD$（图8.75）.

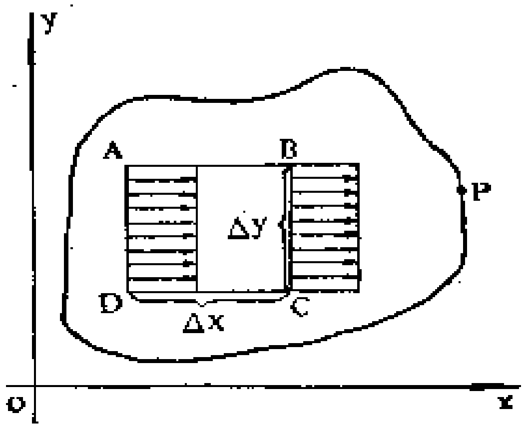

图 8.75

在单位时间内沿 Ox 轴方向从 AD 边流入的量为 $u(x,y)\cdot\Delta y$（为简单起见，设密度 $\rho=1$），而同时从 BC 边流出的量为 $u(x+\Delta x,y)\Delta y$.

于是，在单位时间内，沿 Ox 轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x\Delta y}\Delta y.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，此比值的极限 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是在点 (x,y) 沿 Ox 轴方向的发散强度. 类似地，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 就是在点 (x,y) 沿 Oy 轴方向的发散强度. 于是，在点 (x,y) 处液体的发散强度为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$，而对于面积元 $dxdy$ 的流量即为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

因此，总的流量为

$$Q=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

另一解法：令点 P 为围线 C 上的任一点，$\vec{n}$ 为向外法线，考虑曲线元素 ds。单位时间内通过 ds 弧段的流量为

$$dQ=w_n ds,$$

其中 w_n 为点 P 处的流速 $\vec{w}$ 在法向量 $\vec{n}$ 上的投影：$w_n=\vec{w}\cdot\vec{n}$. 于是，所求的通过曲线 C 的流量为

$$Q=\int_C w_n ds.$$

但是，$w_n=\vec{w}\cdot\vec{n}=u\cos(n,x)+v\cos(n,y)=u\frac{dy}{ds}-v\cdot\frac{dx}{ds}$**)，故得

$$Q=\int_C udy-vdx.$$

应用格林公式，即得

$$Q=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

(2) $d\Gamma=\vec{w}\cdot d\vec{r}=udx+vdy$，故

$$\Gamma=\int_C u dx+v dy=\iint_S\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy.$$

若流场无源泉无漏孔及无旋度，则对于流场中任何围线 C 及其所包围的域 S，均有

$$Q=0 \text{ 及 } \Gamma=0.$$

于是，在流场中的每一点，均有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \text{ 及 } \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

或
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

这就是 u,v 所应满足的方程。

*) 编者注：从原书答案来看，本题叙述有误。最后的问题中"流体是不可压缩"应改为"流场无源泉、无漏孔"，而在题目开始，应假定流体不可压缩。

**) 参看 4324 题的推导。

4457. 证明：场

$$\vec{a}=yz(2x+y+z)\vec{i}+xz(x+2y+z)\vec{j}$$
$$+xy(x+y+2z)\vec{k}$$

是有势场，并求这个场的势。

解 由于对空间任一点 (x,y,z) 均有

$$rot\vec{a}=\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[xy(x+y+2z)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left[xz(x+2y+z)\right]\right\}\vec{i}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[yz(2x+y+z)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\left[xy(x+y+2z)\right]\right\}\vec{j}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[xz(x+2y+z)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}\left[yz(2x+y+z)\right]\right\}\vec{k}$$

$$=\vec{0},$$

故 $\vec{a}$ 为有势场。

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}du&=\vec{a}\cdot d\vec{r}\\&=yz(2x+y+z)dx+xz(x+2y+z)dy\\&\quad+xy(x+y+2z)dz\\&=xyz(dx+dy+dz)+(x+y+z)\\&\quad\cdot(yzdx+zxdy+xydz)\\&=xyzd(x+y+z)+(x+y+z)d(xyz)\\&=d[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

故势 $u=xyz(x+y+z)+C$，其中 C 为任意常数。

4458. 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场

$$\vec{a}=-\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

的势。

解 由于

$$du=\vec{a}\cdot d\vec{r}=-\frac{m}{r^3}(xdx+ydy$$

$$+zdz)=-\frac{m}{2r^3}d(r^2)$$

$$=-\frac{m}{r^2}dr=d\left(\frac{m}{r}\right),$$

故势$u=\frac{m}{r}+C$(C为任意常数)，通常取$u=\frac{m}{r}$ $(r\neq 0)$.

4459．求位置在$M_i(i=1,2,\cdots,n)$各点的质量系$m_i(i=1,2,\cdots,n)$所产生引力场的势.

解 引力场$\vec{a}=-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}\vec{r}_i$，其中$r_i$为动点$M$与$M_i$之间的距离. 由于

$$du=\vec{a}\cdot d\vec{r}=d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}+C$($C$为任意常数),通常取$u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}$.

4460．证明：场$\vec{a}=f(r)\vec{r}$（其中$f(r)$是单值连续函数）是有势场. 求这个场的势.

解 利用4436题(б)的结果，即知$rot(f(r)\vec{r})=\vec{0}$，故$\vec{a}$为有势场. 又由于

$$du=\vec{a}\cdot d\vec{r}=xf(r)dx+yf(r)dy+zf(r)dz$$

$$=\frac{1}{2}f(r)d(r^2)=rf(r)dr,$$

故势$u=\int_{r_0}^{r} tf(t)dt$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

4461．证明公式

$$\operatorname{grad}_P\left\{\iiint_V \rho(Q)\frac{dV}{r}\right\}=-\iint_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}$$
$$+\iiint_V \operatorname{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r},$$

其中S为包含体积V的曲面，$\vec{n}$为曲面S的外法线，r为点$P(x,y,z)$与点$Q(\xi,\eta,\zeta)$两点间的距离.

证 首先指出，题中需假定$\rho(Q)$在V上具有连续的导函数。

i）先设点$P(x,y,z)$在V之外．令

$$f(x,y,z)=\iiint_V \rho(Q)\frac{dV}{r}. \tag{1}$$

显然，右端积分的被积函数对参变量x，y，z都具有连续的偏导函数，故可在积分号下求导数，得

$$\operatorname{grad}_P f=\iiint_V \rho(Q)\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}dV. \tag{2}$$

又由于

$$\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}=-\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r},\quad \vec{r}=\overrightarrow{QP}.$$

代入（2）式，得

$$\operatorname{grad}_P f=-\iiint_V \rho(Q)\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r}dV. \tag{3}$$

在公式（4408题(r)）

$$\mathrm{grad}_Q(\varphi\psi)=\varphi\,\mathrm{grad}_Q\psi+\psi\,\mathrm{grad}_Q\varphi$$

中，令 $\varphi=\rho(Q)$，$\psi=\frac{1}{r}$，再代入（3）式，得

$$\mathrm{grad}_P f=-\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV+\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r}. \qquad (4)$$

根据奥氏公式，有

$$\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV=\iint\limits_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}. \qquad (5)$$

将上式代入（4）式，即得

$$\mathrm{grad}_P f=-\iint\limits_S \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}+\iiint\limits_V \mathrm{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r}.$$

ii）现设点 $P(x,y,z)$ 在 V 的内部。仍按（1）式令 $f(x,y,z)$。注意，这时（1）式右端的积分为广义重积分（点 P 为瑕点）；但易知它收敛，因为在以 P 点为中心，ε 为半径的球域 V_ε 上的积分满足（$M=\max\limits_{Q\in V}|\rho(Q)|$）

$$\left|\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{\rho(Q)}{r}dV\right|\leqslant\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{|\rho(Q)|}{r}dV\leqslant M\iiint\limits_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r}$$

$$=M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r}dr=2M\pi\varepsilon^2\to 0$$ （当 $\varepsilon\to+0$ 时）。

我们证明：这时仍可将（1）式的积分在积分号下求导数而得（2）式．事实上，由于

$$\left|\iiint_{V_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV\right|\leqslant\iiint_{V_\varepsilon}\left|\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right|dV$$

$$=\iiint_{V_\varepsilon}\left|-\rho(Q)\frac{x-\xi}{r^3}\right|dV\leqslant M\iiint_{V_\varepsilon}\frac{dV}{r^2}$$

$$=M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{r^2}{r^2}dr=4M\pi\varepsilon,$$

故积分

$$\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV$$

关于 x 一致收敛．于是，（1）式右端的积分可在积分号下关于 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}dV. \tag{6}$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}dV, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\iiint_V\rho(Q)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}dV. \tag{8}$$

由(6)，(7)，(8)三式，即得（2）式．仿 i) 段办法，可得(3)式与(4)式（注意，仿前，可知（4）式右端两

个积分都收敛）．但不能直接对V应用奥氏公式而得(5)式，因为有瑕点P，但显然可对$V-V_\varepsilon$应用奥氏公式，得

$$\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} \mathrm{grad}_Q\left(\frac{\rho(Q)}{r}\right)dV=\iint\limits_{S+S_\varepsilon}\rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}, \quad (9)$$

其中S_ε为球域V_ε的边界（球面），在S_ε上的$\vec{n}$是指向点P的．由于

$$\left|\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\vec{n}\frac{dS}{r}\right|\leqslant\sqrt{3}\iint\limits_{S_\varepsilon}|\rho(\theta)|\frac{dS}{r}\leqslant\sqrt{3}M\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{dS}{r}$$

$$=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\iint\limits_{S_\varepsilon}dS=\frac{\sqrt{3}M}{\varepsilon}\cdot4\pi\varepsilon^2=4\sqrt{3}\pi M\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(\theta)\vec{n}\frac{dS}{r}=0.$$

于是，在(9)式两端令$\varepsilon\to+0$取极限，即得(5)式．以(5)式代入(4)式，最后得所要证的公式

$$\mathrm{grad}_P\left\{\iiint\limits_V\rho(\theta)\frac{dV}{r}\right\}=-\iint\limits_S\rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r}$$

$$+\iiint\limits_V\mathrm{grad}_Q\rho(Q)\frac{dV}{r}.$$

证毕．

4462．证明：若$\vec{a}=\mathrm{grad}\ u$，其中

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

及 $\quad r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$,

则 $\quad \operatorname{div}\vec{a}=\rho(x,y,z)$

（假定对应的积分有意义）.

证 首先指出，为保证题述的广义重积分（既是无穷积分，又是瑕积分）的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性，一般我们需假定：$\rho(\xi,\eta,\zeta)$在全空间具有连续的偏导函数,并且当$R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$充分大时($R\geqslant R_0$)，有

$$|\rho(\xi,\eta,\zeta)|\leqslant\frac{M}{R^{2+\alpha}},\qquad (1)$$

其中$M>0$，$\alpha>0$是两个常数.

考虑空间任一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$.用V_0表示以P_0为中心，1为半径的单位球域.我们先限制点$P(x,y,z)$只在V_0中变动.又用V_1表示以P_0为中心，2为半径的球域，V_2表示整个空间去掉V_1所剩下的部分（无界域）.令

$$u_1(x,y,z)=\iiint_{V_1}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta,\qquad (2)$$

$$u_2(x,y,z)=\iiint_{V_2}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\xi d\eta d\zeta.\qquad (3)$$

于是，

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}[u_1(x,y,z)$$
$$+u_2(x,y,z)].\qquad(4)$$

(2) 式右端为瑕积分，在 4461 题证明的第 ii) 段中已证它是收敛的；(3) 式右端为无穷积分，下面证明它收敛．令

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},\ R_1=\max\{R_0,2(r_0+1)\},$$

则当 $R\geqslant R_1$ 时，有 $R\geqslant R_0$ (从而(1)式满足)，且 $R\geqslant 2(r_0+1)$．以 Q 表示点 (ξ,η,ζ)，O 表示原点 (0，0，0)．由于三角形两边之和大于第三边，故 (注意 $P\in V_0$)．

$$R=\overline{OQ}\leqslant\overline{OP}+\overline{PQ}\leqslant r_0+1+r\leqslant\frac{R}{2}+r,$$

从而

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\left|\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{rR^{2+\alpha}}$$

$$\leqslant 2M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_1^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{3+\alpha}}$$

$$=2M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{R^2}{R^{3+\alpha}}dR$$

$$=2M\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{R_1}^{+\infty}\frac{dR}{R^{1+\alpha}}$$

$$=\frac{8M\pi}{aR_1^a}<+\infty, \tag{5}$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由 (4) 式知 $u(x,y,z)$ 有定义. 由于 div (grad$u$) $=\Delta u$, 故我们只要证明

$$\Delta u=\rho(x,y,z). \tag{6}$$

我们证明 (3) 式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta. \tag{8}$$

为此, 只要证明(7)式右端的积分和 (8) 式右端的积分都关于$(x,y,z)\in V_0$一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\xi-x}{r^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(\xi-x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导,可得: 当 $R_2>R_1=max\{R_0, 2(r_0+1)\}$时, 对一切$(x,y,z)\in V_0$, 有

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\left|\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2R^{2+a}}\leqslant 4M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{4+a}}$$

$$=\frac{16M\pi}{(1+\alpha)R_2^{1+\alpha}},$$

$$\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\left|\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\leqslant 4M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3R^{2+\alpha}}\leqslant 32M\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant R_2^2}\frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{5+\alpha}}$$

$$=\frac{128M\pi}{(2+\alpha)R_2^{2+\alpha}}.$$

由此可知，（7）式右端的积分和（8）式右端的积分都关于 $(x,y,z)\in V_0$ 一致收敛．因此，（7）式与(8) 式当 $(x,y,z)\in V_0$ 时成立．同理可证，当 $(x,y,z)\in V_0$ 时，有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta. \qquad (10)$$

将(8)，(9)，(10)三式相加，即得(注意到 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$)

$$\Delta u_2=\iiint\limits_{V_2}\rho(\xi,\eta,\zeta)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta d\zeta=0. \qquad (11)$$

下面再求 $\Delta u_1=\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1)$．由4461 题的结果知

$$\operatorname{grad} u_1 = -\iint\limits_{S_1} \rho(Q)\vec{n}\frac{dS}{r} + \iiint\limits_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q)\frac{dV}{r}, \quad (12)$$

其中 S_1 表示 V_1 的边界（球面）。显然，当 $P(x, y, z)\in V_0$ 时，(12)式右端的第一个积分（面积分）的被积函数具有对于 x，y 及 z 的连续偏导函数，故可在积分号下求对于 x，y 及 z 的偏导函数。另外，仿照 4461 题 ii) 段之证可知(12)式右端的第二个积分（三重积分）也可在积分号下求对于 x，y 及 z 的偏导函数。于是，得

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = -\iint\limits_{S_1} \operatorname{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r}\right] dS$$

$$+\iiint\limits_{V_1} \operatorname{div}_P\left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}_Q \rho(Q)\right] dV. \quad (13)$$

利用公式 $\operatorname{div}(v\vec{a}) = v\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad} v$ (4424题(B))，可知（注意到 $\rho(Q)\vec{n}$ 及 $\operatorname{grad}_Q\rho(Q)$ 均与 P 无关）

$$\operatorname{div}_P\left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r}\right] = \rho(Q)\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\rho(Q)\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\operatorname{div}_P\left[\frac{1}{r}\operatorname{grad}_Q\rho(Q)\right] = \operatorname{grad}_Q\rho(Q)\cdot\operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\operatorname{grad}_Q\rho(Q)\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right).$$

代入（13）式，得

$$\Delta u_1=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\iiint\limits_{V_1}\operatorname{grad}_Q\rho(Q)$$

$$\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)dV。\tag{14}$$

由于

$$\operatorname{div}_Q\left[\rho(Q)\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]=\rho(Q)\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)+\operatorname{grad}_Q\rho(Q)$$

$\cdot\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)$，而$\Delta_Q\left(\frac{1}{r}\right)=0\ (Q\neq P)$，故(14)

式可写为

$$\Delta u_1=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

$$-\iiint\limits_{V_1}\operatorname{div}_Q\left[\rho(Q)\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV。\tag{15}$$

下面计算(15)式中的三重积分，用Ω_ε表示以点$P(x,y,z)$为中心，ε为半径的球域，其边界（球面）记为S_ε。对$V_1-\Omega_\varepsilon$应用奥氏公式，得

$$\iiint\limits_{V_1-\Omega_\varepsilon}\operatorname{div}_Q\left[\rho(Q)\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$

$$=\iint\limits_{S_1+S_\varepsilon}\rho(Q)\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{n}dS$$

$$=\iint\limits_{S_1}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\iint\limits_{S_\varepsilon}\rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS,\tag{16}$$

其中 $\vec{n}$ 是向外法线，从而在 S_ε 上是指向点 $P(x, y, z)$ 的．由中值定理知

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = -\iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS$$

$$= \iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)\frac{dS}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon} \rho(Q)dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\rho(Q_\varepsilon)\cdot 4\pi\varepsilon^2$$

$$= 4\pi\rho(Q_\varepsilon),$$

其中 Q_ε 是球面 S_ε 上的某一点．代入(16)式，得

$$\iiint\limits_{V_1 - \Omega_\varepsilon} \mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\,\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$

$$= \iint\limits_{S_1} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + 4\pi\rho(Q_\varepsilon),$$

两端令 $\varepsilon \to +0$ 取极限，得

$$\iiint\limits_{V_1} \mathrm{div}_Q\left[\rho(Q)\,\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)\right]dV$$

$$= \iint\limits_{S_1} \rho(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS + 4\pi\rho(P),$$

再以此式代入(15)式，得

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho(x, y, z). \tag{17}$$

由(17)式，(11)式以及(4)式，即得(6)式．于是，(6)式对一切点 $P(x, y, z) \in V_0$ 成立．由于 V_0 的中心 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是任意的（可为空间任一点），故知(6)式对空间任一点都成立．证毕．