Занятие 1. Алгебра логики высказываний

1. (Устно.) Укажите, какие из приведённых ниже записей являются ФЛВ.

а) $x_1 \to (x_2 \to x_1)$;

б) $((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_1))$;

в) $((x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_1))$;

г) $((x_1 \wedge (x_2 \to x_3))(\neg x_1))$;

д) $((x_2 \to x_3) \to ((x_1 \vee x_2) \to x_3))$;

е) $((x_1 \to ((x_2 \wedge x_2) \to x_3)) \wedge (x_3 \to x_1))$.

2. Дано выражение:

$$x_1 \to x_2 \vee \neg x_1 \to x_2.$$

а) Расставьте в нём скобки так, чтобы получилась формула (это выражение не считается записью булевой функции, т.е. не действуют соглашения о приоритетах!). Перечислите все возможные варианты. Для контроля подсчитайте, сколько должно получиться формул.

б) Для каждого получившейся формулы напишите выражение, полученное удалением скобок в соответствии с соглашениями о приоритете операций и свойствами ассоциативности.

в) Распределите все полученные вами формулы по классам равносильности.

Везде ниже, если это специально не оговорено, мы будем допускать в записи формул вольности в неупотреблении скобок в соответствии с принятыми на этот счёт соглашениями.

3. Определите, какие из ниже приведённых формул являются тавтологиями, какие противоречиями, а какие ни тем, ни другим.

а) $x_1 \to (x_2 \to x_1)$;

б) $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_1)$;

в) $x_1 \vee (x_2 \wedge x_1) \leftrightarrow x_1 \wedge (x_2 \vee x_1)$;

г) $(x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_3) \vee (x_3 \to x_1)$;

д) $(x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_1)$;

е) $(x_1 \to x_3) \to ((x_2 \to x_3) \to (x_1 \vee x_2 \to x_3))$;

ж) $(x_1 \to x_2) \leftrightarrow (\neg x_2 \to \neg x_1)$;

з) $(x_1 \to x_3) \to (x_2 \to x_3) \to (x_1 \vee x_2 \to x_3)$.

4. Выясните, существует ли такая формула p, зависящая от x_1 и x_2, чтобы имела место равносильность.

а) $x_1 \wedge p \vee (x_2 \to p) \equiv (x_1 \vee p) \wedge \neg x_2$.

б) $p \to x_1 \to x_2 \equiv x_1 \vee x_2 \wedge p$.

в) $(x_1 \vee p) \wedge (p \to x_1 \wedge x_2) \equiv \neg x_1 \wedge p \to (p \to x_1 \wedge x_2)$.

5. (Устно.) Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями.

а) «Выхожу один я на дорогу» (М. Лермонтов);

б) «Никто не может объять необъятное» (К. Прутков);

в) «Давайте восклицать, друг другом восхищаться» (Б. Окуджава);

г) «Не жалею, не зову, не плачу» (С. Есенин);

д) «Если у вас нет собаки, ее не отравит сосед» (Ал. Аронов);

е) «Пусть всегда будет солнце!» (Л. Ошанин);

ж) «Я спросил у ясеня: «Где моя любимая?» (В. Киршон)

з) «Никого не будет в доме, кроме сумерек» (Б.Пастернак);

и) «А где мне взять такую песню и о любви, и о судьбе?» (М.Агашина)

6. Некоему мятежнику правитель вынес смертный приговор и, будучи в душе демократом, предложил мятежнику самому выбрать способ казни – отрубанием головы или повешеньем. А будучи при этом любителем математической логики, предложил сделать этот так – в заключительном слове мятежник должен высказать некоторое утверждение о своей казни, если оно будет истинным, ему отрубят голову, если ложным – повесят. Может ли мятежник сказать что-то такое, чтобы вообще избежать казни?

7. Дано высказывание: «Миша водит Ауди». Имеется ли среди следующих высказываний хотя бы одно такое, которое является отрицанием исходного высказывания?

– «Миша не водит Ауди»;
– «Миша водит не Ауди»;
– «Ауди водит не Миша».

8. Определить, какие из приведённых ниже формул являются логическими следствиями совокупности формул $\{x_1 \to x_2;\ x_1 \vee x_2\}$.

а) x_1; б) x_2. в) $x_1 \wedge x_2$; г) $(x_1 \wedge \neg\, x_2) \vee (\neg x_1 \wedge\ x_2)$.

9. а) Проверить, что $\{x_1 \vee x_2 \vee x_3;\ x_1 \vee x_2 \to x_4;\ \neg x_1 \wedge \neg x_3\} \models x_4 \wedge x_2$.

б) У олигарха три яхты «Альфа», «Бета» и «Гамма». Каждый день он катается на одной из них. Когда он катается на «Альфе» или «Бете», жена остаётся дома. Сегодня «Альфа» и «Гамма» на ремонте. Будет логическим следствием утверждение, что олигарх катается на Бете, а жена сидит дома?

в) Маша может посещать бассейн во вторник, четверг или субботу (не обязательно 1 раз в неделю). Во вторник и четверг она ездит на такси. Сегодня не вторник и не суббота, но Машу видели в бассейне. Будет логическим следствием утверждение, что сегодня четверг, а Маша приехала на такси?

г) (Устно.) Ситуации в пунктах б) и г) различны – олигарх не может одновременно кататься на нескольких яхтах, а Маша в одну неделю может посетить бассейн несколько раз. Почему можно, не вникая в эти различия, делать вывод о логическом следовании?

10. Вот высказывания некоторого молодого человека: «Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу эту работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой». Является ли высказывание «Если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я получу эту работу» логическим следствием остальных его высказываний?

Домашнее задание

1. Для выражения $x_1 \to x_2 \to x_1 \to x_2 \to x_1$ выполните такое же задание, как 2 в классной работе.

2. Определите, какие из ниже приведённых формул являются тавтологиями, какие противоречиями, а какие ни тем, ни другим.

а) $(\neg x_1 \to \neg x_2) \to ((\neg x_1 \to x_2) \to x_1)$; б) $(x_1 \vee x_2) \to (x_2 \vee x_3) \to (x_3 \vee x_1)$;

в) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1) \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_1)$.

3. Выясните, существует ли такая формула p, зависящая от x_1 и x_2, чтобы имела место равносильность.

а) $(p \to x_1 \wedge x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \equiv (x_1 \to p \wedge x_2) \vee \neg x_1 \wedge p$;

б) $(p \to x_1) \wedge (x_1 \to x_2) \equiv x_1 \wedge p \vee (x_1 \to p) \wedge x_2$;

в) $(p \to x_1) \wedge (x_2 \to p) \equiv x_1 \wedge p \vee x_2 \wedge \neg p$.

4. Докажите, что любая формула логики предикатов равносильна некоторой формуле, в которой присутствуют только связки $\to$ и $\neg$. Для формул $x_1 \vee x_2$ и $x_1 \wedge x_2$ напишите равносильные им формулы, в которых использованы только связки $\to$ и $\neg$.

5. Дано высказывание: «Миша водит Ауди».

а) Выясните, какие из следующих высказываний являются логическими следствиями отрицания исходного высказывания.

– «Миша не водит Ауди»;

– «Миша водит не Ауди»;

– «Ауди водит не Миша».

б) Выясните, для каких из высказываний, приведённых в пункте а), высказывание «Миша водит Ауди» является логическим следствием отрицания.

6. а) В деле о расследовании убийства записано: «Если Джонс не встретил этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи». Является ли высказывание «Смит был убийцей» логическим следствием высказываний, изложенных в деле?

б) Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Является ли высказывание «Губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров» логическим следствием предыдущих высказываний?