Занятие 4. Предикаты. Понятие логики 1-го порядка

1. (Устно) Пусть переменная x пробегает множество четырехугольников. Рассмотрим несколько предикатов от этой переменной:

$A(x)$ – «x – параллелограмм»;

$B(x)$ –«x – прямоугольник»;

$C(x)$ – «x – ромб»;

$D(x)$ – «x – квадрат»;

$E(x)$ – «диагонали x равны»;

$F(x)$ – «диагонали x перпендикулярны»;

$G(x)$ – «диагонали x делятся пополам точкой пересечения».

Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

а) $\forall x\, E(x)$; б) $\exists x\, F(x)$; в) $\forall x\, A(x) \leftrightarrow G(x)$; г) $\exists x\, B(x) \wedge \neg A(x)$;

д) $\forall x\, B(x) \to E(x)$; е) $\exists x\, C(x) \to D(x)$; ж) $\forall x\, E(x) \to B(x)$;

з) $\exists x\, C(x) \wedge \neg E(x)$; и) $\exists x\, \neg C(x) \wedge E(x)$; к) $\exists x\, C(x) \wedge E(x)$.

Какие из высказываний а) – к) представляют собой известные вам теоремы геометрии?

2. а) На множестве действительных чисел задан предикат $P(x, y)$:

$$x^2(3 + y) - 4xy + 2y - 1 \geq 0.$$

Найдите все значения y, для которых истинен предикат $\forall x\, P(x, y)$.

б) Тот же предикат $P(x, y)$ рассматривается на множестве положительных действительных чисел. Найдите все значения y, для которых истинен предикат $\forall x\, P(x, y)$.

в) Выполните то же задание, если предикат $P(x, y)$ изначально определен на множестве натуральных чисел.

3. На множестве натуральных чисел рассматривается предикат $S(x, y, z)$: число z равно сумме чисел x и y. Используя этот предикат, связки и кванторы, запишите следующие предикаты:

а) Ev(x): число x чётно; б) Less(x, y): число x меньше числа y;

в) Eq(x, y): числа x и y равны; г) Del3(x): число x кратно 3;

д) One(x): число x равно 1; е) Eq3(x): число x равно 3.

4. Через LCD(x, y, z) обозначен некоторый предикат на множестве натуральных чисел, $S(x, y, z)$ и Eq(x, y) – предикаты, определённые в задании 3.

Какое отношение должен описывать предикат LCD(x, y, z), чтобы предикат, приведённый ниже,

$$\mathrm{LCD}(x, y, z) \leftrightarrow \exists u\, (S(x, u, y) \wedge \mathrm{LCD}(x, u, z)) \vee \exists u\, (S(y, u, x) \wedge \mathrm{LCD}(y, u, z)) \vee (\mathrm{Eq}(x, y) \wedge \mathrm{Eq}(x, z))$$

был тождественно истинен на множестве натуральных чисел?

5. Пусть $A = \langle \boldsymbol{N};\ |, \leq \rangle$ – алгебраическая система, в которой $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел, | – отношение делимости, $\leq$ – отношение не больше. Сигнатура $\Sigma = \{P_1^2, P_2^2\}$.

а) Сколько моделей может быть построено для данной сигнатуры в данной алгебраической системе?

б) Дана формула $F = P_1^2 x_1 x_2 \to P_2^2 x_1 x_2$. Равны ли FInt($F$) для разных моделей в алгебраической системе A?

в) Дана формула $G = P_1^2x_1x_2 \wedge P_1^2x_2x_1 \to P_2^2x_1x_2$. Равны ли FInt($G$) для разных моделей в алгебраической системе A?

г) Дана формула $H = P_1^2x_1x_2 \wedge P_2^2x_2x_1 \to P_1^2x_2x_1 \wedge P_2^2x_1x_2$. Равны ли FInt($H$) для разных моделей в алгебраической системе A?

6. Дана формула $F = \forall x_1\forall x_2(P_1^2x_1x_3 \to P_2^2x_3x_1 \vee P_2^2x_1x_2)$.

а) Формула интерпретируется в алгебраической системе A, описанной в задании 6, так, что символу P_1^2 соответствует отношение |, а символу P_2^2 – отношение ≤. Вычислите значения FInt(F) для x_3 в диапазоне от 1 до 9. Верно ли, что существует бесконечно много значений переменной x_3 для которых FInt(F) = 1?

б) Формула интерпретируется в алгебраической системе A, описанной в задании 5, так, что символу P_1^2 соответствует отношение ≤, а символу P_2^2 – отношение |. Вычислите значения FInt(F) для x_3 в диапазоне от 1 до 5. Верно ли, что существует бесконечно много значений переменной x_3, для которых FInt(F) = 1?

7. Даны формулы $F = \forall x_1\exists x_2(P_1^1x_1 \wedge \neg P_1^1x_2)$ и $G = \exists x_1\forall x_2(P_1^1x_1 \wedge \neg P_1^1x_2)$.

а) Имеется ли модель, в которой формула F истинна? Тот же вопрос для формулы G.

б) Имеется ли модель, в которой формула F выполнима, но не истинна? Тот же вопрос для формулы G.

в) Имеется ли модель, в которой формула F противоречие?

8. Дана формула $F = \forall x_1 (P_1^2x_1x_2 \wedge \neg P_1^2x_2x_1)$.

а) Имеется ли модель, в которой эта формула истинна?

б) Имеется ли модель, в которой эта формула выполнима, но не истинна?

в) Имеется ли модель, в которой эта формула противоречие?

Комментарии к заданиям

4. Только $z = \text{НОД}(x, y)$.

5. а) 2 модели. В алгебраической системе A = < **N;** |, ≤ > каждый символ из $\Sigma = \{P_1^2, P_2^2\}$ может быть интерпретирован в сигнатуре этой системы. Тройка {A, Σ, μ} называется ***моделью*** логики 1-го порядка, где μ - всюду определенное, однозначное, сюръективное отображение множества Σ в сигнатуру алгебраической системы A. Таким образом, можно построить всего 2 модели: в первой $\mu(P_1^2) = |$ и $\mu(P_2^2) = \leq$, во второй $\mu(P_1^2) = \leq$ и $\mu(P_2^2) = |$.

б) нет, в) да, г) да.

6. а) да (все простые подходят), б) нет (для $x_3 \geq 3$ берем $x_1 = x_3 - 2, x_2 = x_3 - 1$, тогда $FInt(F) = 0$).

7. Ответ: а) нет, б) нет (нет свободных переменных), в) в любой.

Решение. Пусть в некоторой модели формула F истинна, тогда для любого x_1 следует, что $P_1^1x_1$ будет тинным, но тогда для любого x_2, $\neg P_1^1x_2$ – ложно, т.е. и конъюнкция $P_1^1x_1 \wedge \neg P_1^1x_2$ ложна. Для G – аналогично.

8. Ответ: а) нет, б) нет, в) в любой.

Решение. Возьмем $x_1 = x_2$, тогда $P_1^2x_1x_1$ должен быть одновременно истинным и ложным, чтобы конъюнкция $P_1^2x_1x_1 \wedge \neg P_1^2x_1x_1$ была истинной, что невозможно.

Домашнее задание... на следующей странице.

Домашнее задание.

1. Внимательно изучите комментарии к задачам из практического занятия.
2. Доделать 1в) из практического занятия. Должно получиться: $y \in \{1; 2\}$.
3. На множестве действительных чисел задан предикат $P(x, y)$:

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 1.$$

а) Найдите все значения y, для которых истинен предикат $\forall x\, P(x, y)$.

б) Найдите все значения x, для которых истинен предикат $\forall y\, P(x, y)$.

в) Зависит ли значение предиката $\exists x\, P(x, y)$ от значения переменной y?

4. На множестве целых неотрицательных чисел рассматривается предикат $S(x, y, z)$: число z равно сумме чисел x и y. Используя этот предикат, связки и кванторы, запишите следующие предикаты:

а) $\mathrm{Nil}(x)$: число x равно 0;
б) $\mathrm{Ev}(x)$: число x чётно;
в) $\mathrm{NoMore}(x, y)$: число x не больше числа y;
г) $\mathrm{One}(x)$: число x равно 1;
д) $\mathrm{Eq}(x, y)$: числа x и y равны;
е) $\mathrm{F}(x, y, z)$: число z равно $|x - y|$.

5. Через $\mathrm{U}(x, y, z)$ обозначен некоторый предикат на множестве неотрицательных целых чисел, $S(x, y, z)$, $\mathrm{Nil}(x)$, $\mathrm{One}(x)$ и $\mathrm{Eq}(x, y)$ – предикаты, определённые в домашнем задании 4. Приведённый ниже предикат тождественно истинен на множестве неотрицательных целых чисел:

$$\mathrm{U}(x, y, z) \leftrightarrow \exists u \exists v \exists w(\mathrm{One}(u) \wedge S(u, v, y) \wedge \mathrm{U}(x, v, w) \wedge S(x, w, z)) \vee$$
$$\exists u(\mathrm{Nil}(u) \wedge \mathrm{Eq}(y, u) \wedge \mathrm{Eq}(z, u)).$$

а) Найдите значения $\mathrm{U}(1, 0, 0)$, $\mathrm{U}(2, 2, 2)$, $\mathrm{U}(2, 3, 6)$.

б) Каково значение z, если $\mathrm{U}(3, 1, z)$ истинно? А если истинно значение $\mathrm{U}(4, 2, z)$?

в) Каково значение x, если $\mathrm{U}(x, 1, 5)$ истинно? А если истинно значение $\mathrm{U}(x, 2, 10)$?

г) Каково значение y, если $\mathrm{U}(2, y, 8)$ истинно? А если истинно значение $\mathrm{U}(4, y, 12)$?

д) Какие значения могут иметь x и y, если $\mathrm{U}(x, y, 9)$?

е) Верно ли, что при любых значениях x и y существует значение z, для которого $\mathrm{U}(x, y, z)$ имеет значение истина? Если существует, то какое именно?

4. Пусть M – множество подмножеств некоторого множества X. Отношение $\mathrm{Sub}(A, B)$ означает, что множество A – подмножество B; отношение $\mathrm{Emb}(A, B)$ означает, что множество A вложимо в множество B. Используя эти предикаты, связки и кванторы, запишите следующие предикаты:

а) $\mathrm{Emp}(A)$: множество A пусто;
б) $\mathrm{One}(A)$: множество A одноэлементно;
в) $\mathrm{Card}(A, B)$: множества A и B равномощны;
г) $\mathrm{Eq}(A, B)$: множества A и B равны;
д) $\mathrm{Inf}(A)$: множество A бесконечно;
е) $\mathrm{Fin}(A)$: множество A конечно;
ж) $\mathrm{Count}(A)$: множество A счётно.

5. Пусть $A = \langle M;\ \omega_1,\ \omega_2;\ \rho \rangle$ – алгебраическая система с носителем M, бинарными операциями ω_1, ω_2 и бинарным отношением ρ. Даны формулы $F = \forall x_3(P_1^2 x_1 x_2 \to P_2^1 f_1^2 x_1 x_3 f_1^2 x_2 x_3)$ и $G = \exists x_3 P_1^2 x_3 f_1^2 f_2^2 x_1 x_2 f_2^2 x_2 x_1$ в сигнатуре $\Sigma = \{ f_1^2, f_2^2, P_1^2\}$.

а) Пусть M – множество действительных чисел, ω_1 – операция сложения, ω_2 – операция умножения, ρ – отношение меньше. Равны ли $\mathrm{FInt}(F)$ для разных моделей в алгебраической системе A? Равны ли FInt(G) для разных моделей в алгебраической системе A?

б) Пусть M – множество положительных действительных чисел, ω_1 – операция сложения, ω_2 – операция умножения, ρ – отношение меньше. Равны ли FInt(F) для разных моделей в алгебраической системе A? Равны ли FInt(G) для разных моделей в алгебраической системе A?

в) Пусть M – множество подмножеств некоторого множества X, ω_1 – операция объединения множеств, ω_2 – операция пересечения множеств, ρ – отношение «быть собственным подмножеством». Равны ли FInt(F) для разных моделей в алгебраической системе A? Равны ли FInt(G) для разных моделей в алгебраической системе A?

г) Пусть M – множество натуральных чисел, ω_1 – операция div, ω_2 – операция mod, ρ – отношение меньше. Равны ли FInt(F) для разных моделей в алгебраической системе A? Равны ли FInt(G) для разных моделей в алгебраической системе A?